Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 426-432

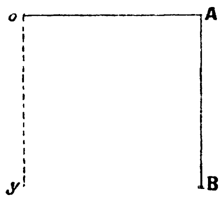
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__426_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Deux barres* OA *et* AB *pesantes, homogènes et identiques, sont clouées l'une sur l'autre à leur extrémité commune* A.

L'extrémité O *de* OA *est fixe et en outre la barre* OA



est assujettie à rester horizontale. Il n'y a pas de frottement.

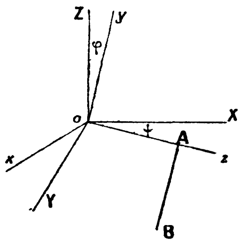
Le système étant en équilibre, on écarte très peu la barre AB *de la verticale et l'on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale.*

Étudier les petites oscillations.

N. B. — *On remarquera que, si l'on prend pour axes invariablement liés au système, la droite* OA *pour axe des z, la parallèle à* AB *pour axe des y, la quantité* Σmyz *n'est pas nulle.*

SOLUTION.

Rapportons le solide à trois axes liés à lui, Oz dirigé sui-



vant OA, Oy parallèle à AB et Ox perpendiculaire sur yOz, et prenons trois axes fixes dont OZ vertical dirigé vers le haut comme Oy.

Soit φ l'angle de Oy et de OZ.

Soit ψ l'angle de Oz avec OX.

Les rotations autour de Ox, Oy, Oz sont

$$p = \sin\varphi\psi', \qquad q = \cos\varphi\psi', \qquad r = \varphi'.$$

L'ellipsoïde d'inertie du corps par rapport à $Oxyz$ est, en désignant par M la masse de l'une des barres et par a sa longueur,

$$Ma^2\left[\frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{1}{3}z^2 + 2\ \frac{1}{2}yz\right].$$

La force vive est donc

$$2T = Ma^2\left[\frac{5}{3}p^2 + \frac{4}{3}q^2 + \frac{1}{3}r^2 + 2\cdot\frac{1}{2}qr\right].$$

La somme des moments des forces par rapport à OZ étant nulle, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est constante, et par suite nulle et l'on a

$$\frac{\partial T}{\partial p}\sin\varphi + \frac{\partial T}{\partial q}\cos\varphi = 0,$$

ou

$$\frac{5}{3}p\sin^2\varphi + \left(\frac{4}{3}q + \frac{1}{2}r\right)\cos\varphi = 0.$$

Or, φ, p, q, r étant petits, admettons qu'on puisse négliger le second ordre, il viendra

$$(1)\qquad 8\psi' + 3\varphi' = 0.$$

Le théorème des moments par rapport à Oz donne, d'après Euler,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{2}Mga\sin\varphi$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}r + \frac{1}{2}q\right] + p\left[\frac{4}{3}q + \frac{1}{2}r\right] - q\times\frac{5}{3}p = -\frac{1}{2}\frac{g}{a}\sin\varphi,$$

ou approximativement

$$(2)\qquad 2\varphi'' + 3\psi'' + 3\frac{g}{a}\varphi = 0.$$

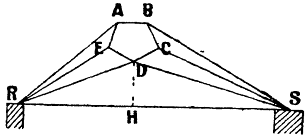
En intégrant (1) et (2) et posant $\frac{24}{7}\frac{g}{a} = k^2$, et en supposant que primitivement φ soit égale à α et ψ à zéro, on aura

$$\varphi = \alpha\cos kt,$$
$$T = \frac{3}{8}\alpha(1 - \cos kt).$$

Le mouvement est donc périodique. L'amplitude de l'oscillation de OA est α et celle (en ψ) de AB par rapport à la verticale $\frac{3}{4}\alpha$.

L'amplitude de l'oscillation de OA est donc les $\frac{4}{3}$ de celle de AB.

Épreuve pratique. — *Un système articulé est formé de* *onze tiges Cinq des tiges forment un pentagone régulier* ABCDE. *Aux sommets* B, C, D *sont articulées trois*



tiges BS, CS, DS *articulées toutes trois à leur extrémité* S. *Aux sommets* A, E, D *sont articulées trois tiges* AR, ER, DR *articulées toutes trois à leur extrémité* R.

Ce système est placé dans un plan vertical et il repose sans frottement par les sommets R *et* S *sur deux appuis situés dans un même plan horizontal.*

On applique aux cinq sommets du pentagone cinq poids égaux chacun à 200^{kg}. *Trouver les tensions des tiges. On négligera le poids des barres.*

Le côté du pentagone est égal à $0^m,40$. *La ligne* RS *est parallèle à la barre* AB, *et elle est à une distance de* AB *égale à* $1^m,20$. *Enfin, la perpendiculaire* DH *abaissée de* D *sur* RS *détermine les deux segments*

$$RH = 1^m,90, \qquad SH = 2^m,10.$$

(Novembre 1913.)

Epreuve ecrite. — *Une plaque rectangulaire est mobile autour de son centre* O *qui est fixe. Trouver son mouvement.*

L'un des côtés de la plaque est double de l'autre, de sorte que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O *est, par un choix convenable d'unités,*

$$x^2 + 5y^2 + 4z^2 = 1,$$

en prenant pour axe des x *la parallèle au grand côté, pour axe des* y *la normale au plan de la plaque et pour axe des* z *la parallèle au petit côté de la plaque.*

La rotation initiale ω_0 *s'effectue autour d'un axe situé dans le plan des* xy *et elle fait avec l'axe des* x *un angle dont la tangente est* $\sqrt{\frac{3}{5}}$ *de sorte qu'on a pour les compo-*

santes de la rotation initiale

$$p_0 = \omega_0\sqrt{\frac{5}{8}}, \qquad q_0 = \omega_0\sqrt{\frac{3}{8}}, \qquad r_0 = 0.$$

On étudiera uniquement le mouvement de l'axe OZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On prend dans un plan horizontal quatre points fixes* A_1, A_2, A_3, A_4 *situés aux quatre sommets d'un carré de* 2^m *de côté.*

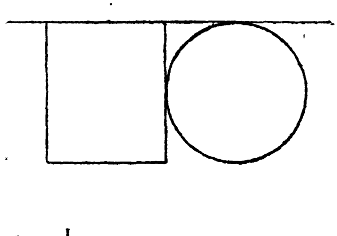
A ces quatre points on attache quatre fils élastiques de 4^m *de longueur chacun et l'on réunit leurs extrémités en un point* B *auquel on suspend un poids de* 100^{kg}.

Trouver approximativement la tension de chacun des fils et la position finale du point B *sachant que les fils s'allongent proportionnellement à leurs tensions et que sous l'action d'un poids de* 100^{kg} *le premier s'allonge de* 1 *pour* 100, *le deuxième de* 2 *pour* 100, *le troisième de* 3 *pour* 100 *et le quatrième de* 4 *pour* 100.

(Juin 1914.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, sur une droite dont la pente est* $\frac{3}{4}$, *on place une plaque carrée et un disque circulaire, la plaque étant poussée par le disque.*

Les deux corps ont le même poids et sont dépolis. Le coefficient de frottement de ces corps entre eux et avec la



droite est égal à $\frac{1}{2}$. *Primitivement le système est sans vitesse; trouver son mouvement.*

Quel devrait être le coefficient de frottement pour qu'il y ait équilibre?

SOLUTION.

Soient :

α l'inclinaison de la droite sur l'horizon ;
f le coefficient de frottement ;
M la masse du disque et celle de la plaque ;
X la composante normale de la pression d'un corps sur l'autre ;
Y la composante normale de la pression de la plaque sur la droite ;
Z la composante normale de la pression du disque sur la droite ;
T la composante tangentielle de cette pression ;
x l'abscisse du centre du disque dans la direction de la droite.

On a d'abord

$$Y = Mg\cos\alpha + Xf,$$
$$Z = Mg\cos\alpha - Xf.$$

On a ensuite, pour la translation de la plaque,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha + X - Yf;$$

pour la translation du disque,

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - X - T$$

et, pour la rotation du disque,

$$\frac{1}{2}M\frac{d^2x}{dt^2} = T - Xf.$$

En résolvant ce système d'équations, on trouve

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2g\,\frac{2\sin\alpha - f(\sin\alpha + \cos\alpha)}{5 - 3f},$$
$$X = Mg\,\frac{3f\cos\alpha - \sin\alpha}{(5 - 3f)(1 + f)},$$
$$T = Mg\,\frac{2\sin\alpha - f\cos\alpha - f^2(\sin\alpha - 2\cos\alpha)}{(5 - 3f)(1 + f)},$$
$$Z = Mg\,\frac{5\cos\alpha + f(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - 6f^2\cos\alpha}{(5 - 3f)(1 + f)}.$$

Il y a roulement du disque si l'on a $T < Zf$, ce qui conduit à la condition $f > \frac{1}{3} \operatorname{tang} \alpha$, réalisée pour $f = \frac{1}{2}$.

Il y a donc roulement sans glissement et le mouvement des deux corps est uniformément accéléré, l'accélération étant égale à $\frac{2}{7} g$.

Si le frottement était tel qu'on eût $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$, il y aurait équilibre. On aurait, dans ce cas,

$$f = \frac{2 \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha},$$

et, pour $\operatorname{tang} \alpha = \frac{3}{4}$, on aurait $f = \frac{6}{7}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un fil flexible, de poids négligeable,* ABCDE, *est attaché par ses deux extrémités,* A *et* E, *à deux points fixes* A *et* E *situés sur une même horizontale. Les quatre longueurs* AB, BC, CD, DE *sont égales chacune au côté de l'octogone régulier inscrit dans un cercle dont le diamètre serait* AE.

On suspend au point C *un poids de* 10^{kg}; *quels poids faut-il suspendre en* B *et* D *pour que le fil prenne la forme d'un demi-octogone régulier? On calculera ces poids à* 1^{g} *près.*

SOLUTION.

$$P = 10^{kg}(\sqrt{2} + 1) = 24^{kg},142.$$

(Novembre 1914.)