F. GOMES TEIXEIRA

Sur une manière de construire les cubiques circulaires

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 449-454

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__449_0>

[$M^1 5 k \alpha$]

SUR UNE MANIÈRE DE CONSTRUIRE LES CUBIQUES CIRCULAIRES ;

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

1. Le nombre des méthodes qu'on a données pour la construction des cubiques circulaires non unicursales est bien petit. Casey en a donné une dans les *Transactions of the Royal Irish Academy* (t. XXIV, 1867), que nous avons exposée dans notre *Traité des courbes spéciales* (t. I, p. 80), et Czuber en a donné une autre dans le *Zeitschrift für Mathematik* (t. XXXII, 1887), laquelle a été indiquée par M. Loria dans son *Spezielle Ebene Kurven* (t. I, p. 34). Il ne sera donc pas inutile d'en donner ici une autre qui n'a pas été encore signalée, croyons-nous.

La méthode que nous allons exposer est basée sur le théorème suivant :

Prenons sur un plan quatre points A, B, A_1, B_1. *Par le point* B *menons une droite* (D) *de direction arbitraire et désignons par* C *le point où elle coupe la droite* AA_1. *Ensuite marquons sur cette droite un point* C_1 *tel que le rapport des distances de* C *et* C_1 *au point* A *soit égal à une constante donnée* c, *et décrivons une circonférence passant par* A_1, B_1 *et* C_1. *Cette circonférence coupe la droite* (D) *en deux points qui décrivent une cubique circulaire, quand la direction de la droite varie.*

Prenons pour origine des coordonnées orthogonales le point A et pour axe des abscisses la droite AA_1, et désignons respectivement par (a, b), $(h, 0)$, (a_1, b_1) les coordonnées des points B, A_1 et B_1. L'équation d'une droite arbitraire (D) passant par B est

$$y - b = m(x - a), \tag{1}$$

et cette droite coupe l'axe des abscisses en un point C dont l'abscisse est déterminée par l'égalité

$$x_1 = a - \frac{b}{m}.$$

L'équation d'un cercle passant par le point A_1 et ayant le centre en un point (α_1, β_1) est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y = h^2 - 2h\alpha_1,$$

et la condition pour que ce cercle passe par le point B_1 est, par suite,

$$a_1^2 + b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 - 2\beta_1 b_1 = h^2 - 2h\alpha_1.$$

Donc, en supposant b_1 différent de zéro, l'équation des cercles passant par A_1 et B_1 est

$$\left\{\begin{aligned} &b_1(x^2+y^2) - 2\alpha_1 b_1 x - (a_1^2 + b_1^2 - 2a_1\alpha_1 + 2h\alpha_1 - h^2)y \\ &\quad = b_1(h^2 - 2h\alpha_1). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ce cercle coupe l'axe des abscisses au point A_1 et en un autre point C_1 dont l'abscisse est déterminée par l'équation

$$x_2 = 2\alpha_1 - h,$$

et l'on a par hypothèse

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{ma - b}{m(2\alpha_1 - h)} = c. \tag{3}$$

En éliminant maintenant m et α_1 entre les équations (1), (2) et (3), on obtient l'équation du lieu décrit par les points d'intersection de la droite (D) et du cercle considéré, quand h varie, savoir :

$$(4)\quad \begin{cases} [(ch+a)(y-b)-b(x-a)][b_1x+(h-a_1)y-hb_1] \\ \quad = c(y-b)[b_1(x^2+y^2)-(a_1^2+b_1^2-h^2)y-b_1h^2], \end{cases}$$

ou

$$(5)\quad \begin{cases} cb_1(x^2+y^2)y \\ \quad = bb_1(c-1)x^2+[(ch+a)b_1-b(h-a_1)]xy \\ \qquad +[c(a_1^2+b_1^2+bb_1-ha_1)+a(h-a_1)]y^2 \\ \qquad + bb_1h(1-c)x+[bc(ha_1-a_1^2-b_1^2)-ahb_1]y. \end{cases}$$

On voit, au moyen de l'équation (4), que la courbe cherchée passe par les points A, A_1, B, B_1 et, au moyen de l'équation (5), qu'elle est une *cubique circulaire*, dont l'asymptote est parallèle à la droite AA_1.

2. En passant maintenant à la question inverse, considérons la cubique circulaire représentée par l'équation

$$(6)\qquad (x^2+y^2)y = Hx^2+Kxy+Ly^2+Mx+Ny,$$

rapportée à un système d'axes orthogonaux qui ont pour origine un point de la courbe et pour axe des abscisses une parallèle à l'asymptote réelle.

Les conditions, pour que les cubiques représentées par les équations (5) et (6) soient identiques, sont

$$\begin{gathered} b(c-1)=Hc, \qquad hb(1-c)=Mc, \\ c(a_1^2+b_1^2+bb_1-ha_1)+a(h-a_1)=Lcb_1, \\ (ch+a)b_1-b(h-a_1)=Kcb_1, \\ bc(ha_1-a_1^2-b_1^2)-ahb_1=Ncb_1. \end{gathered}$$

Nous avons donc cinq équations pour déterminer les six constantes c, a, b, a_1, b_1, h, dont une reste par conséquent arbitraire; et, comme une de ces équations peut être remplacée par celle qui exprime que (a, b) est un point de la cubique, on voit qu'on peut prendre le point (a, b) arbitrairement sur la courbe.

Les deux premières équations donnent

$$h = -\frac{M}{H}, \qquad c = \frac{b}{b - H}$$

et déterminent donc c et h.

Les deux dernières équations font voir que le point (a_1, b_1) est l'un des points d'intersection de la droite représentée par l'équation

$$(7) \qquad (ch + a - Kc)y + bx = bh$$

avec le cercle représenté par celle-ci

$$(8) \qquad bc(x^2 + y^2) + (Nc + ah)y - bchx = 0;$$

l'autre point d'intersection est le point $(h, 0)$.

Nous pouvons donc construire la cubique (6), et d'une infinité de manières, au moyen de la méthode qui résulte du théorème énoncé au numéro précédent.

Il résulte encore, de ce qu'on vient d'exposer, le théorème suivant :

Prenons sur une cubique circulaire quelconque quatre points A, A_1, B, B_1 *tels que les points* A *et* A_1 *soient placés sur une parallèle à l'asymptote réelle et le point* B_1 *coïncide avec le second point d'intersection de la droite* (7) *avec le cercle* (8). *Un cercle quelconque passant par* A_1 *et* B_1 *coupe la cubique en deux points situés sur une droite passant par* B, *et le cercle et la droite coupent la droite* AA_1 *en deux points* C_1 *et* C *tels que le rapport de* AC *à* AC_1 *est constant.*

3. Ce qu'on vient de dire aux numéros précédents

est applicable aux cubiques circulaires unicursales et non unicursales. On en peut déduire, au moyen d'un passage à la limite, d'autres théorèmes applicables seulement aux cubiques circulaires unicursales.

Supposons qu'on fasse coïncider le point A_1 avec le point A et que le point B_1 tende vers le point A, en décrivant une droite représentée par l'équation $x = ky$. On a alors, en posant $h = 0$, $a_1 = kb_1$, et ensuite $b_1 = 0$, l'équation

$$(9) \qquad c(x^2 + y^2)y = b(c-1)x^2 + (a + bk)xy + (cb - ak)y^2,$$

qui représente une cubique circulaire unicursale ayant le point double à l'origine A. Les cercles (2), qui passent par A_1 et B_1, deviennent à la limite tangentes à la droite $x = ky$ au point A.

Nous avons donc le théorème suivant :

Prenons sur un plan deux droites (D_1) *et* (D_2) *et un point* B. *Par ce dernier point menons une droite* D *de direction variable et désignons par* C *le point où elle coupe la droite* (D_1). *Ensuite marquons sur cette droite un point* C_1 *tel que le rapport de* AC *à* AC_1 *soit égal à une constante c, et décrivons une circonférence tangente à la droite* (D_2) *au point* A *et qui passe par le point* C_1. *Cette circonférence coupe la droite* (D) *en deux points qui décrivent une cubique circulaire unicursale ayant le point double à* A, *quand la direction de la droite varie. L'asymptote de cette cubique est parallèle à la droite* (D_1). *Cette cubique est représentée par l'équation* (9), *k étant la tangente trigonométrique de l'angle des droites* (D_1) *et* (D_2).

4. Réciproquement, si l'on donne la cubique repré-

sentée par l'équation

$$(x^2+y^2)y = Hx^2 + Kxy + Ly^2,$$

les conditions pour que cette cubique soit identique à celle que l'équation (9) représente sont

$$(10)\quad b(c-1) = cH, \qquad a+bk = cK, \qquad cb-ak = cL.$$

Ces équations déterminent trois des constantes a, b, c, k, l'autre restant arbitraire.

Si la constante qui reste arbitraire est k, on peut déterminer b, au moyen de l'équation

$$b = \frac{Hk^2+Kk+L}{1+k^2}$$

et ensuite c et a, au moyen des deux équations (10).

Nous avons donc le théorème suivant :

Prenons sur le plan d'une cubique circulaire unicursale deux droites (D_1) *et* (D_2) *passant par son point double* A, *et dont la première soit parallèle à l'asymptote réelle. Traçons ensuite un cercle de rayon variable tangent à la droite* (D_2) *au point* A. *Ce cercle coupe la cubique en deux points placés sur une droite qui passe par un point fixe* B. *Cette droite et le cercle coupent la droite* (D_1) *en deux points* (C) *et* (C_1) *tels que le rapport de* AC *à* AC_1 *est constant.*

Si la droite (D_2) est perpendiculaire à la droite (D_1), l'équation (9) prend la forme la plus simple, savoir :

$$c(x^2+y^2)y = b(c-1)x^2 + axy + aby^2.$$