NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F. BALITRAND

Construction du rayon de courbure de la polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 461-465

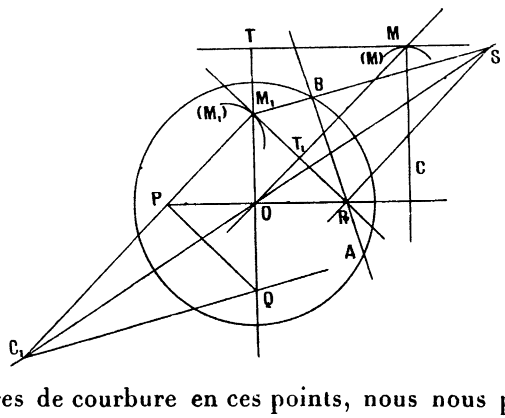
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__461_1>

[$O^1 2e$]

CONSTRUCTION DU RAYON DE COURBURE DE LA POLAIRE RÉCIPROQUE D'UNE COURBE PAR RAPPORT A UN CERCLE;

PAR M. F. BALITRAND.

Considérons une courbe (M) et sa polaire réciproque (M_1) par rapport à un cercle de centre O. M et M_1 étant deux points correspondants et C et C_1 les



centres de courbure en ces points, nous nous proposons, connaissant C, de donner une détermination géométrique de C_1.

Nous prendrons pour axes deux diamètres rectangulaires du cercle O et nous ferons usage de coordonnées tangentielles; c'est-à-dire que (M) sera définie comme l'enveloppe de la droite

$$ux + vy - 1 = 0;$$

u et v étant fonctions d'un paramètre.

Les coordonnées x, y du point de contact M de la droite avec son enveloppe seront données par les deux équations

$$ux + vy - 1 = 0,$$
$$x\,du + y\,dv = 0;$$

d'où l'on tire [1]

$$x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \qquad y = \frac{-du}{u\,dv - v\,du};$$

et par différentiation

$$dx = \frac{v(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}, \qquad dy = \frac{-u(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'élément d'arc de (M) a pour expression

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'angle de contingence ε se calcule aisément et l'on

---

(1) On peut remarquer que ces formules fournissent une interprétation géométrique simple du rapport des différentielles du et dv. On a, en effet,

$$\frac{du}{dv} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tang}\theta,$$

θ désignant l'angle du rayon vecteur OM. A ce point de vue il y a une parfaite réciprocité entre x, y; u et v; car on a

$$\frac{du}{dv} = -\frac{y}{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v}.$$

trouve

$$\varepsilon = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2};$$

d'où pour le rayon de courbure ρ la valeur suivante :

$$\rho = \frac{(dv\,d^2u - du\,d^2v)(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

D'autre part, les coordonnées x_1, y_1 du pôle M_1 de la tangente en M à (M), par rapport au cercle directeur, sont

$$x_1 = a^2 u, \qquad y_1 = a^2 v;$$

a désignant le rayon du cercle directeur. Il en résulte pour le rayon de courbure de (M_1) en M_1 la formule

$$\rho_1 = a^2 \frac{(du^2 + dv^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,d^2v - dv\,d^2u}.$$

Appelons V l'angle sous lequel la courbe (M) est coupée par le rayon vecteur OM [ou bien la courbe (M_1) par le rayon vecteur OM_1]; on trouve sans difficulté

$$\sin^2 V = \frac{(u\,dv - v\,du)^2}{(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)};$$

d'où

$$\rho\rho_1 \sin^3 V = a^2.$$

Telle est la formule cherchée ([1]). Elle conduit à plusieurs constructions géométriques de C_1 connaissant C.

Soient MT la tangente en M à (M) et M_1T_1 la tan-

([1]) Cette Note nous a été inspirée par un article de M. Chemin sur le même sujet (*Nouvelles Annales*, 1867, p. 49). La formule

$$\rho\rho_1 \sin^3 V = a^2$$

est de M. Chemin qui l'établit par une méthode différente et n'en déduit pas de construction géométrique pour C_1.

gente à (M_1) en M_1. Les droites OM et OM_1 sont respectivement perpendiculaires sur M_1T_1 et MT.

1° *Par le centre* O *du cercle directeur on élève à* OM_1 *une perpendiculaire qui coupe en* P *la normale à* (M_1) *en* M_1; *la perpendiculaire élevée en* P *à cette normale rencontre* OM_1 *en* Q; *la perpendiculaire abaissée de* Q *sur la polaire* AB *de* C, *par rapport au cercle directeur, passe en* C_1.

En effet les deux triangles OMC, C_1M_1Q sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles. Donc

$$MC \times M_1C_1 = OM \times M_1Q.$$

Mais

$$M_1Q = \frac{OM_1}{\sin^2 V}.$$

T et T_1 étant les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes en M et M_1, on a aussi

$$OM_1 = \frac{OT_1}{\sin V} = \frac{a^2}{OM \sin V};$$

d'où

$$M_1O = \frac{a^2}{OM \sin^3 V};$$

par suite

$$MC \times M_1C_1 = \frac{a^2}{\sin^3 V}$$

et M_1C_1 est bien égal à ρ_1.

Par une transformation convenable, on peut déduire de ce qui précède la nouvelle construction suivante :

2° *Soit* R *le point où la polaire de* C *rencontre* M_1T_1; *élevons en ce point à* M_1T_1 *une perpendiculaire qui coupe en* S *la perpendiculaire abaissée de* M_1 *sur la polaire de* C; SO *passe en* C_1.

Le point R est le pôle de MC et le point M_1 est le pôle de MT; donc OM_1 et OR sont rectangulaires et par suite OR est le prolongement de OP.

On voit facilement que les deux triangles C_1PQ, M_1RS sont homothétiques par rapport au point O; d'où il résulte que SO passe bien en C_1.