NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 16 (1916), p. 469-478
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__469_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

546.

(1860, p. 404.)

Étant donnée une conique A, *trouver les transformations qui la changent en une conique* B, *de telle sorte que les normales à la conique* A *restent par la transformation normales à la conique* B. *Même question pour les surfaces.*

LAGUERRE.

SOLUTION

Par UN ABONNÉ.

Les coniques A et B étant quelconques, les transformations dont il s'agit sont homographiques. A un point M de la première correspond un point m de la seconde et au couple de droites, formé par la tangente et la normale en M, qui sont rectangulaires et par suite conjuguées par rapport aux droites isotropes issues de M, correspond le couple formé par la tangente et la normale en m, également conjuguées par rapport aux droites isotropes issues de m.

La transformation doit donc conserver les points cycliques et par suite un cercle doit se transformer en un autre cercle. On sait qu'il n'y a que l'inversion, la similitude et la symétrie qui jouissent de cette propriété. L'inversion ne répond pas à la question et il ne reste par suite que la similitude et la symétrie.

La question pour les surfaces se résout de même.

1479.

(1883, p. 480.)

g étant une racine primitive de p^ν, la fonction

$$x + x^{g^2} + x^{g^4} + \ldots + x^{g^{p^{\nu-1}(p-1)-2}},$$

où tous les exposants de g sont des nombres pairs, est divisible par

$$\frac{x^{p^\nu} - 1}{x^{p^{\nu-1}} - 1};$$

p est supposé un nombre premier autre que 2, et ν plus grand que 1. PELLET.

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

g étant un entier positif racine primitive de p^ν, le reste de la division du polynome

$$x + x^{g^2} + x^{g^4} + \ldots + x^{g^{p^{\nu-1}(p-1)-2}}$$

par $x^{p^\nu} - 1$ est

$$(1) \qquad x + x^{a_1} + \ldots + x^{a_{N-1}},$$

a_i étant le reste de la division de g^{2i} par p^ν; N est égal au nombre des résidus quadratiques, module p^ν, $\dfrac{p^{\nu-1}(p-1)}{2}$.

Il s'agit de démontrer que le polynome (1) est divisible par

$$(2) \qquad \frac{x^{p^\nu} - 1}{x^{p^{\nu-1}} - 1} = 1 + x^{p^{\nu-1}} + x^{2p^{\nu-1}} + \ldots + x^{(p-1)p^{\nu-1}}.$$

Si un nombre est résidu quadratique mod p, il est aussi résidu quadratique mod p^ν. Donc, à un des nombres a_i inférieur à $p^{\nu-1}$, on peut faire correspondre dans la suite des exposants du polynome (1) les nombres

$$a_i + p^{\nu-1},\quad a_i + 2p^{\nu-1},\quad \ldots,\quad a_i + (p-1)p^{\nu-1}.$$

La somme des p termes correspondants est égale au produit de x^{a_i} par le polynome (2).

Le nombre des exposants a_i étant égal à $\frac{p^{\nu-2}(p-1)}{2}$, on épuise ainsi tous les termes du polynome (1).

ν doit être au moins égal à 2, et $p > 2$.

1505 [1].

Note

Par M. J. Lemaire.

La seconde partie de cette question, qui revient à chercher l'enveloppe des axes des paraboles inscrites à un triangle, peut être traitée géométriquement comme il suit :

Soient ABC le triangle donné, M un point du cercle circonscrit, $M\alpha$ la corde perpendiculaire à BC; la droite MP de l'énoncé est la perpendiculaire menée de M à $A\alpha$: appelons-la Δ; elle est parallèle à la droite de Simpson D relative au point M' diamétralement opposé à M, laquelle passe au milieu de la droite HM' qui joint M' à l'orthocentre H du triangle.

Menons par M' la parallèle Δ' à Δ : quand M décrit le cercle O, D enveloppe l'hypocycloïde de Steiner (S) du triangle, Δ' enveloppe une hypocycloïde homothétique, le centre d'homothétie étant H et le rapport 2; Δ enveloppe la symétrique de celle-ci par rapport à O, c'est-à-dire l'hypocycloïde homothétique de la première dans le rapport -2, le centre d'homothétie étant le point qui partage HO dans ce rapport, ou le centre de gravité.

Cette enveloppe est, comme on le voit, l'hypocycloïde de Steiner, c'est-à-dire l'enveloppe des droites de Simpson, du triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC menées par les sommets opposés.

---

[1] *Voir* 1915, p. 469; 1916, p. 42; le lecteur est prié de faire la figure. Rappelons que, page 42, il faut *lire* **1505** *au lieu* de **1545**.

On peut l'obtenir aussi de la manière suivante : traçons la corde AD, du cercle circonscrit à ABC, parallèle à BC, et soit K le point de l'arc AD situé au tiers de cet arc à partir de A; menons la corde KL perpendiculaire à AD, et la tangente en K au cercle circonscrit qui coupe Δ en N et AD en Q; les angles Q et $\widehat{ALK}$, ayant même mesure, sont égaux, de sorte que AL est perpendiculaire sur NQ, et que les angles N et $\widehat{LA\alpha}$ sont égaux; il en résulte que ces angles doivent avoir même mesure d'arc, et comme les arcs $L\alpha$ et KM sont égaux, on en conclut que l'arc KM_1 est double de l'arc KM, en appelant M_1 le second point commun à Δ et au cercle circonscrit au triangle; puisque ces arcs sont de sens contraires, la droite Δ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements tritangente à ce cercle, K étant l'un des points de contact.

1585.

(1888, p. 448.)

Soit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ *une série divergente dont les termes tendent, en décroissant, vers zéro. Démontrer que si la série*

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est convergente, la moyenne arithmétique des n premiers nombres ε *ne peut avoir d'autre limite que zéro, lorsque n croît à l'infini.*

E. Cesàro.

Solution
Par un Abonné.

Supposons que l'on ait

$$\lim \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n}{n} = \lambda,$$

λ étant une quantité finie, quand n croît indéfiniment. Je dis que la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est divergente.

On sait en effet (E. Cesàro, *Corso di Analisi algebrica*,

p. 103) que dans les conditions de l'énoncé 1585, on a

$$\lim \frac{\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n}{u_1 + u_2 + \ldots + u_n} = \lim \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_n}{n} = \lambda.$$

Par suite la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 + \ldots$$

est bien divergente.

1588.

(1888, p. 448.)

Si, d'un point quelconque du plan d'une ellipse quelconque, on abaisse les quatre normales à l'ellipse; si N_1 N_2, N_3, N_4 *sont les distances du point aux pieds des normales, et* ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 *les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation*

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - N_1} + \frac{\rho_2}{\rho_2 - N_2} + \frac{\rho_3}{\rho_3 - N_3} + \frac{\rho_4}{\rho_4 - N_4} = 2.$$

E. Barisien.

SOLUTION

Par un Abonné.

La question n° 1588 mériterait une solution particulière, mais puisque aucune n'en a encore été donnée, nous indiquerons qu'elle n'est qu'un cas particulier du théorème général suivant dû à M. G. Humbert (*Nouvelles Annales*, 1887, p. 543) :

Soit C *une courbe algébrique; par un point* M *de son plan menons-lui des normales; soient* P *le pied de l'une d'elles,* R *le centre de courbure en* P. *On a, quand* M *varie,*

$$\sum \frac{\text{MP}}{\text{MR}} = \text{const.},$$

la somme étant étendue à toutes les normales issues de M.

Autre solution par l'Auteur.

1677 (1)

NOTE

Par M. M.-F. Egan.

Cette question admet une solution très simple, et qui ajoute quelques éléments à l'énoncé. Soit une conique (C) tangente aux droites a, b, c, d. Désignons par A, B, C, α, β, γ les points bc, ca, ab, ad, bd, cd, et par P, Q, R les points de contact de a, b, c avec la conique. Soient M le second point de rencontre de AP avec (C), m la tangente à (C) en M, et μ le point d'intersection de m et d. Je dis d'abord que μ *reste fixe lorsque la conique* (C) *varie*.

En effet, le rapport anharmonique $(\alpha\beta\mu\gamma)$ des points où la tangente d rencontre les quatre tangentes a, b, m, c est égal au rapport anharmonique de leurs points de contact P, Q, M, R. Or, P et M sont harmoniquement conjugués par rapport à Q et R, comme on l'aperçoit en considérant l'involution déterminée sur la conique (C) par les cordes menées par A. μ est donc conjugué harmonique de α par rapport à β et γ.

Ensuite, les droites AP et μM se correspondent univoquement, puisque l'une ou l'autre suffit à déterminer la conique (C). Le point d'intersection M de ces droites décrit donc une conique (S) passant par A et μ. En considérant les coniques-limites Bβ, Cγ, on voit que (S) passe aussi par B et C.

(S) est tangente à d en μ. En effet, si le point M vient se poser sur d, on trouve sans peine que $(\alpha\beta M\gamma)$ est harmonique, donc M se confond avec μ.

En projetant à l'infini l'une ou l'autre des droites a, c, d, on obtient des théorèmes sur les paraboles inscrites à un triangle.

1704 *bis*

(1895, p. 39*; 1916, pp. 184, 322.)

Démontrer que, si un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, le centre du cercle circonscrit à ce triangle décrit une conique. Exa-

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 1915, p. 567.

miner en particulier les cas où cette conique est un cercle ou un système de deux droites. M. Weill.

Nouvelle Solution
Par M. G. Fontene.

1. En résolvant la question 1832, je montrerai avec le moins de calcul possible que le lieu cherché est une conique. J'imiterai ici, en améliorant le point de départ, le calcul qui se trouve dans le *Cours de Géométrie analytique* de MM. Imbert et Weill pour la recherche du lieu du point de concours des hauteurs du triangle de l'énoncé.

La conique à laquelle les triangles sont inscrits étant supposée être une ellipse, représentée par les formules

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2bt}{1+t^2},$$

une équation de la forme

$$\lambda\varphi(b) + \psi(t) = 0,$$

où φ et ψ sont deux polynomes du troisième degré, définit un triangle mobile ABC inscrit à l'ellipse et circonscrit à une conique fixe, puisque, si l'on se donne une racine t', λ est déterminé et l'on obtient pour t deux autres valeurs t'', t'''. Les sept paramètres apparents de cette relation se réduiront à quatre, comme il convient, eu égard à la possibilité de donner à trois de ces paramètres des valeurs fixées d'avance, au moyen de la substitution

$$\lambda = \frac{m\sigma + n}{p\sigma + q}.$$

En particulier, et c'est en cela que consiste la simplification apportée ici à la méthode des auteurs, on peut prendre

$$[(A\lambda + B)t - (C\lambda + D)](t^2+1) + \lambda t - 1 = 0;$$

on aura alors $t = \pm i$ pour $\lambda = \mp i$, de sorte que, pour $\lambda = \mp i$, l'un des trois sommets du triangle ABC sera rejeté à l'infini, le cercle circonscrit (O) aura son centre à l'infini; les formules qui donneront les coordonnées du point O auront donc $(\lambda^2 + 1)$ comme dénominateur.

Les coordonnées du point O ont pour expressions, en fonction de t dans trois sommets,

$$x = \frac{c^2}{a}\,\frac{(1-t't'')(1-t't''')(1-t''t''')}{(1+t'^2)(1+t''^2)(1+t'''^2)},$$

$$y = \frac{-c^2}{b}\,\frac{\Sigma t'\Sigma t't''-t't''t'''}{(1+t'^2)\ldots};$$

ces formules m'ont été indiquées par M. Weill.

L'équation en t étant

$$(A\lambda+B)t^3-(C\lambda+D)t^2+[(A\lambda+B)+\lambda]t - [(C\lambda+D)+1] = 0,$$

un calcul facile donne

$$x = -\frac{c^2}{a}\,\frac{A\lambda^2+(B+C)\lambda+D+1}{\lambda^2+1},$$

$$y = -\frac{c^2}{b}\,\frac{C\lambda^2+(D-A)\lambda-B}{\lambda^2+1};$$

le lieu du point O est une conique.

2. J'arrive à la seconde partie de la question. Une conique étant représentée parametriquement, si l'on en cherche un point double, on doit avoir, en désignant par α et β deux valeurs de λ,

$$x = \frac{a\alpha^2+b\alpha+c}{A\alpha^2+B\alpha+C} = \frac{a(\alpha+\beta)+b}{A(\alpha+\beta)+B} = \frac{b\alpha\beta+c(\alpha+\beta)}{B\alpha\beta+C(\alpha+\beta)},$$

$$y = \frac{a'\alpha^2+\ldots}{A\alpha^2+\ldots} = \frac{a'(\alpha+\beta)+b'}{A(\alpha+\beta)+B} = \frac{b'\alpha\beta+\ldots}{B\alpha\beta+\ldots},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{vmatrix} \alpha\beta & -(\alpha+\beta) & 1 \\ C & B & A \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha\beta & -(\alpha+\beta) & 1 \\ C & B & A \\ c' & b' & a' \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on suppose

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \neq 0,$$

ces équations donnent

$$\frac{\alpha\beta}{C} = \frac{\alpha+\beta}{-B} = \frac{1}{A},$$

de sorte que α et β sont les racines de l'équation

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0;$$

mais alors il faudrait que les trois équations

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + b\lambda + c &= 0, \\ a'\lambda^2 + b'\lambda + c' &= 0, \\ A\lambda^2 + B\lambda + C &= 0 \end{aligned}$$

eussent une racine commune, ce qui est impossible d'après l'hypothèse faite.

Il faut donc supposer

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux relations entre $\alpha\beta$ et $\alpha+\beta$ sont identiques; tous les points de la conique sont des points doubles. A la vérité, on pourrait supposer que deux des trois polynomes $a\lambda^2+\ldots$, $a'\lambda^2+\ldots$, $A\lambda^2+\ldots$ ont une racine commune, qui serait alors également racine du troisième; nous écarterons cette hypothèse inutile, pour retenir seulement la condition ci-dessus; dans ces conditions, *la conique est une droite double*, les deux valeurs α et β du périmètre λ qui donnent un même point étant liées par la relation écrite plus haut; on peut écrire

$$x = \frac{a\theta + b}{A\theta + B}, \qquad y = \frac{a'\theta + b'}{A\theta + B},$$

θ représentant $\alpha + \beta$.

Pour la question posée on peut dire : *Si un couple de triangles* ABC *fournit deux cercles circonscrits concentriques, tous les triangles* ABC *peuvent être groupés par couples jouissant de la même propriété; le lieu du point* O *est alors une droite* (*fig.* 1). La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(B+C)^2 + (D-A)(D-A+1) = 0;$$

on a alors

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{D-A}{-(B+C)} = \frac{B+C}{D-A+1},$$

et le lieu du point O est la droite

$$\frac{\dfrac{ax}{c^2}+A}{\dfrac{by}{c^2}+C} = \frac{B+C}{D-A}.$$

3. Le lieu du point O sera un cercle si, pour $\lambda = \pm i$, on a $\frac{y}{x} = \pm \varepsilon i$. En supposant $a^2 \neq b^2$, ce qui se comprend, on trouve les conditions

$$B+C=0, \qquad \frac{D-A+1}{D-A} = \frac{\varepsilon a}{b};$$

mais il faudrait les interpréter.