

J.-B. POMEY

Généralisation des quantités imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 16
(1916), p. 501-505

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1916_4_16__501_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[B12a]

GÉNÉRALISATION DES QUANTITÉS IMAGINAIRES ;

PAR M. J.-B. POMEY.

On sait que les quantités imaginaires peuvent être considérées comme les résidus des fonctions entières par rapport au module $1 + x^2$.

Soit de même la fonction

$$x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

dont les racines sont $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, de sorte que l'on a

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3) \equiv x^3 - s_1 x^2 + s_2 x - s_3,$$

identiquement. J'appellerai *quantité imaginaire* toute fonction entière de l'indéterminée x , à la condition d'admettre en même temps l'équivalence de ladite fonction avec le reste de sa division par

$$(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3).$$

De cette façon, les quantités à considérer seront des trinomes du second degré en x . La somme de

$$M_1 x^2 + N_1 x + P_1$$

et de

$$M_2 x^2 + N_2 x + P_2$$

sera évidemment

$$(M_1 + M_2)x^2 + (N_1 + N_2)x + P_1 + P_2.$$

Le produit de deux imaginaires se définira naturel-

lement par l'identité

$$\begin{aligned} Mx^2 + Nx + P &\equiv (M_1x^2 + N_1x + P_1)(M_2x^2 + N_2x + P_2) \\ &\quad - \lambda(x - \omega_1)(x - \omega_2)(x - \omega_3), \end{aligned}$$

identité au moyen de laquelle il est facile de déterminer les valeurs à donner à MN et P, sans parler de λ , qui ne nous intéresse pas.

On obtiendra ces valeurs de la façon la plus simple en faisant x égal successivement à ω_1 , à ω_2 et à ω_3 . Et l'on aura les égalités ci-après où l'on a mis f_{1,ω_1} pour $M_1\omega_1^2 + N_1\omega_1 + P$ et pris pour les quantités similaires des notations analogues,

$$(1) \quad \begin{cases} M\omega_1^2 + N\omega_1 + P = f_{1\omega_1}f_{2\omega_1}, \\ M\omega_2^2 + N\omega_2 + P = f_{1\omega_2}f_{2\omega_2}, \\ M\omega_3^2 + N\omega_3 + P = f_{1\omega_3}f_{2\omega_3}. \end{cases}$$

Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1^2 & \omega_1 & 1 \\ \omega_2^2 & \omega_2 & 1 \\ \omega_3^2 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_3).$$

On aura, par exemple,

$$M = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} f_{1\omega_1} & f_{2\omega_1} & \omega_1 & 1 \\ f_{1\omega_2} & f_{2\omega_2} & \omega_2 & 1 \\ f_{1\omega_3} & f_{2\omega_3} & \omega_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

On remarquera que ce déterminant s'annule pour $\omega_1 = \omega_2$ ou ω_3 et pour $\omega_2 = \omega_3$; il doit donc être divisible par Δ et, par suite, M est une fonction entière de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. D'ailleurs, si l'on échange ω_1 et ω_2 , par exemple, ce déterminant change de signe, et il en est de même de Δ , tout en gardant même valeur absolue. C'est donc une fonction symétrique des racines $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Par suite, M est une fonction entière symétrique de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; donc elle s'exprimera d'une

façon rationnelle et entière en fonction de s_1, s_2, s_3 . Ajoutons que si ces quantités sont des nombres entiers, il en sera de même de M , pourvu que $M_1 N_1 P_1, M_2 N_2 P_2$ soient aussi entiers.

Un raisonnement analogue s'applique à chacune des quantités N et P .

D'ailleurs, on peut vérifier par le calcul ce qui vient d'être dit : par exemple, de l'équation

$$\omega^3 = s_1 \omega^2 - s_2 \omega + s_3$$

on tire

$$\omega^4 = s_1 \omega^3 - s_2 \omega^2 + s_3 \omega ;$$

d'où

$$\omega^4 = (s_1^2 - s_2) \omega^2 + (s_3 - s_1 s_2) \omega + s_1 s_3,$$

ce qui montre que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \omega_1^4 & \omega_1 & 1 \\ \omega_2^4 & \omega_2 & 1 \\ \omega_3^4 & \omega_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (s_1^2 - s_2) \omega_1^2 + (s_3 - s_1 s_2) \omega_1 + s_1 s_3 & \omega_1 & 1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

est égal à $(s_1^2 - s_2) \Delta$.

On obtiendrait des résultats analogues pour les divers déterminants à considérer au cours du calcul du déterminant qui figure au numérateur de M .

Nous aurons donc, en multipliant les équations (1),

$$(2) \quad (M \omega_1^2 + N \omega_1 + P)(M \omega_2^2 + N \omega_2 + P)(M \omega_3^2 + N \omega_3 + P) \\ = f_{1\omega} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3} \times f_{2\omega} f_{2\omega_2} f_{2\omega_3}.$$

Si l'on appelle *module* d'une quantité imaginaire $f_{1\omega}$ la racine carrée (ou cubique si l'on veut) de $f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3}$, on pourra énoncer cette relation en disant que le module d'un produit est égal au produit des modules.

Il est facile d'exprimer le produit

$$(M \omega_1^2 + N \omega_1 + P)(M \omega_2^2 + N \omega_2 + P)(M \omega_3^2 + N \omega_3 + P),$$

en fonction de s_1, s_2, s_3 . Je l'écrirai d'abord sous la forme

$$M^3(\omega_1 - \alpha)(\omega_1 - \beta)(\omega_2 - \alpha)(\omega_2 - \beta)(\omega_3 - \alpha)(\omega_3 - \beta),$$

en posant

$$\alpha + \beta = -\frac{N}{M}, \quad \alpha\beta = \frac{P}{M},$$

ou sous la forme équivalente,

$$\begin{aligned} & M^3(\alpha^3 - s_1\alpha^2 + s_2\alpha - s_3)(\beta^3 - s_1\beta^2 + s_2\beta - s_3) \\ &= M^3(\alpha^3\beta^3 - s_1\beta^3\alpha^2 + s_2\beta^3\alpha - s_3\beta^3 \\ &\quad - s_1\alpha^3\beta^2 + s_1^2\alpha^2\beta^2 - s_1s_2\alpha\beta^2 + s_1s_3\beta^2 \\ &\quad + s_2\alpha^3\beta - s_1s_2\alpha^2\beta + s_2^2\alpha\beta - s_2s_3\beta \\ &\quad - s_3\alpha^3 + s_1s_3\alpha^2 - s_2s_3\alpha + s_3^2) \\ &= M^3\left\{\alpha^3\beta^3 - s_1\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + s_2\alpha\beta[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] \right. \\ &\quad \left. - s_3[(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)] + s_1^2\alpha^2\beta^2 - s_1s_2\alpha\beta(\alpha + \beta) \right. \\ &\quad \left. + s_1s_3[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] + s_2^2\alpha\beta - s_2s_3(\alpha + \beta) + s_3^2\right\} \\ &= M^3\left[\frac{P^3}{M^3} + s_1\frac{P^2}{M^2}\frac{N}{M} + s_2\frac{P}{M}\left(\frac{N^2}{M^2} - 2\frac{P}{M}\right) \right. \\ &\quad \left. + s_3\left(\frac{N^3}{M^3} - 3\frac{P}{M}\frac{N}{M}\right) + s_1^2\frac{P^2}{M^2} + s_1s_2\frac{P}{M}\frac{N}{M} \right. \\ &\quad \left. + s_1s_3\left(\frac{N^2}{M^2} - 2\frac{P}{M}\right) + s_2^2\frac{P}{M} + s_2s_3\frac{N}{M} + s_3^2\right] \\ &= P^3 + s_1P^2N + s_2P(N^2 - 2PM) + s_3(N^3 - 3PMN) \\ &\quad - s_1^2P^2M + s_1s_2PNM + s_1s_3(N^2 - 2PM)M \\ &\quad - s_2^2PM^2 + s_2s_3NM^2 + s_3^2M^3, \end{aligned}$$

ou, en ordonnant,

$$\begin{aligned} & s_3^2M^3 + s_3N^3 + P^3 + s_2s_3M^2N + (s_2^2 - 2s_1s_3)M^2P \\ &\quad + s_1s_3N^2M + s_2N^2P + (s_1^2 - 2s_2)P^2M + s_1P^2N \\ &\quad + (s_1s_2 - 3s_3)MNP. \end{aligned}$$

Appelons cette fonction de MNP , $\varphi(M, N, P)$. Supposons que s_1, s_2, s_3 soient des entiers. Il résulte de ce qui vient d'être exposé que si deux nombres entiers

sont de la forme

$$A_1 = \varphi(M_1 N_1 P_1),$$

$$A_2 = \varphi(M_2 N_2 P_2),$$

on aura

$$A_1 A_2 = \varphi(MNP),$$

M, N, P étant des entiers comme $M_1 N_1 P_1$ et $M_2 N_2 P_2$.

En effet, dans l'égalité (2), on aura

$$\varphi(M_1 N_1 P_1) = f_{1\omega_1} f_{1\omega_2} f_{1\omega_3},$$

$$\varphi(M_2 N_2 P_2) = f_{2\omega_1} f_{2\omega_2} f_{2\omega_3},$$

et, par suite,

$$A_1 A_2 = \varphi(MNP).$$

Un cas particulier intéressant, c'est celui dans lequel $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont les racines cubiques de l'unité; on a alors $s_1 = s_2 = 0, s_3 = 1$ et la fonction φ devient

$$\varphi = M^3 + N^3 + P^3 - 3MNP = \begin{vmatrix} M & N & P \\ P & M & N \\ N & P & M \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que les trois facteurs dont le produit constitue $\varphi(M, N, P)$ dans le cas général sont de la forme

$$\lambda^2 M + \lambda N + P.$$

Chacun de ces facteurs linéaires égalé à zéro représente une tangente à la conique

$$N^2 - 4MP = 0.$$

Ce qui caractérise φ , c'est donc que cette forme soit décomposable en trois facteurs représentant des tangentes à cette conique, les trois valeurs de λ correspondantes étant racines d'une équation

$$x^3 - s_1 x^2 - s_2 x - s_3 = 0$$

à coefficients entiers.