Anciennes questions non résolues

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 17 (1917), p. 154-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1917_4_17__154_1>

ANCIENNES QUESTIONS NON RÉSOLUES.

730 (**1865**, 142). — Supposons que s_0, s_1, ... représentent les sommes des puissances zéro, première, etc., des racines de l'équation

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 n^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a_3 x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Si

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} > 0,$$

alors

$$(n-3)a_0^2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)-6(n-2)(a_1^2-a_0a_3)^2>0,$$

et toutes les racines de la dérivée de l'ordre $n-4$ de cette équation sont imaginaires. MICHAEL ROBERTS.

731 (**1865**, 143). — Démontrer qu'en éliminant f entre les équations

$$\begin{aligned}&4(ac-4bd+3c^2)(bf-4ce+3d^2)\\&\qquad-(af-3be+2cd)^2=0,\\&3[a^2(e^2-df)+3ab(cf-de)+4ac(d^2-ce)\\&\qquad+2b^2(d^2-bf)+5b^2ce+3c^4-8bc^2d]\\&\qquad-(ae-4bd+3c^2)^2=0,\end{aligned}$$

on est conduit à l'un ou l'autre des résultats

$$\begin{aligned}&(ae-4bd+3c^2)^3-27(ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3)^2=0,\\&a^2(ae-4bd+3c^2)-3(b^2-ac)^2=0.\end{aligned}$$

MICHAEL ROBERTS.

732 (**1865**, 143). — En posant

$$\begin{aligned}H&=a_1^2-a_0a_2,\\I&=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,\\J&=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3,\\K&=4(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)(a_1a_5-4a_2a_4+3a_3^2)\\&\quad-(a_0a_5-3a_1a_4+2a_2a_3)^2,\\L&=a_0^3(a_4^2-a_3a_5)+3a_0a_1(a_2a_5-a_3a_4)\\&\quad+4a_0a_2(a_3^2-a_2a_4)+2a_1^2(a_3^2-a_1a_5)\\&\quad+5a_1^2a_2a_4+3a_2^4-8a_1a_2^2a_3,\end{aligned}$$

démontrer la relation suivante :

$$\begin{aligned}a_0^2L^2=4H[H(I^3-9J^2-2IL-HK)+a_0J(3L-I^2)]\\+a_0^2K(HI+a_0J)+a_0^2I(12J^2+2IL-I^3).\end{aligned}$$

MICHAEL ROBERTS.

774 (**1866**, 384). — Démontrer que si X_n^m désigne le nombre

de manières de décomposer un polygone convexe de m côtés en n parties, au moyen de $n-1$ diagonales qui ne se coupent pas dans l'intérieur du polygone, on a

$$\begin{aligned} X_n^m = \frac{1}{n} \times & \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1, 2, \ldots, (n-1)} \\ & \times \frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-n-1)}{1, 2, \ldots, n-1}. \end{aligned}$$

PROUHET.

791 (**1867**, 48). — Si $E(q)$ désigne la partie entière du nombre q; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, ...; $S_{j,n}$ la somme des produits j à j des n nombres 1, 2, 3, ..., n; $F_\omega(x)$ un polynome de degré ω et à coefficients entiers, on aura

$$S_{j,n} = \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-j+1)}{p_1^{\varphi_1} p_2^{\varphi_2} p_3^{\varphi_3}\ldots} F_{j-1}(n),$$

l'exposant φ d'un nombre quelconque p étant donné par la formule

$$\varphi = \sum_{\mu=\infty}^{\mu=0} E \frac{j}{(p-1)p^\mu}.$$

SYLVESTER.

805 (**1867**, 188). — On donne deux surfaces (S), (S'), la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point A de (S) et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à (S'). Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque (S') tend vers (S), de façon que le point où (S') est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point A à (S) décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini?

O. BONNET.

812 (**1867**, 288). — Si par $3n-1$ points *consécutifs* sur une courbe du troisième degré on fait passer une courbe quelconque du $n^{\text{ième}}$ degré, les coordonnées de l'intersection des deux courbes seront des fonctions du degré $(3n-1)^2$ des coordonnées du point de contact. SYLVESTER.

815 (**1867**, 288). — Pour qu'une surface du second ordre soit transformée homologiquement en une sphère, il faut et il suffit : 1° que le plan d'homologie soit parallèle à l'un des plans cycliques de la surface (PONCELET, *Propriétés projectives*); 2° que le centre d'homologie soit un quelconque des points de la *conique focale* située dans le plan principal auquel le plan d'homologie est perpendiculaire.

L. PAINVIN.

852 (**1868**, 138). — Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre racines d'une équation du quatrième degré forment un quadrilatère inscriptible. Trouver la surface et le rayon de ce quadrilatère. DARBOUX.

858 (**1868**, 190) (1). — D'un point M dans le plan d'une conique, on mène à celle-ci les deux tangentes MA et MB, puis par M on mène une droite MC.

Aux points A et B on construit les coniques ayant quatre points confondus avec la proposée et tangentes à MC.

Démontrer que : 1° ces coniques touchent MC au même point C; 2° que si l'on faisait tourner l'une d'elles de manière à la rabattre autour de MC du côté de la première, les coniques ainsi obtenues auraient en ce point un contact du troisième ordre, c'est-à-dire qu'elles auraient en C quatre points communs confondus.

859 (**1868**, 190). — Démontrer la même proposition pour les courbes du troisième degré, lorsque M est sur la polaire d'un point d'inflexion. A. RIBAUCOUR.

861 (**1868**, 190). — Soient (C) un cercle de centre O; OX un diamètre quelconque. On prend sur OX une longueur OM sur laquelle, comme diamètre, on décrit un autre cercle (D). D'un point quelconque A de (C) on mène la droite AO qui rencontre le cercle (D) en un point B. Avec AB comme rayon on

---

(1) La question 858 a été résolu (**1869**, 460).
On n'en reproduit l'énoncé que pour rendre compréhensible celui de la question 859, restée sans solutions jusqu'à présent.

décrit un cercle, dont le centre est en A; on effectue la même construction en chacun des points de (C).

Les cercles ainsi obtenus ont une enveloppe. Déterminer les sommets de cette courbe.

Trouver la nature du lieu de ces sommets, lorsque M se déplace sur le diamètre OX. A. RIBAUCOUR.

880 (**1868**, 239). — P étant le produit des entiers inférieurs et premiers à un nombre N, la différence $P - 1$ est divisible par N lorsque N n'est ni premier, ni le double d'un nombre premier, ni une puissance d'un nombre premier impair, ni le double d'une telle puissance. LIONNET.

888 (**1868**, 335). — Démontrer, sans admettre aucun *postulatum*, que l'angle du quadrilatère ayant pour sommets les milieux des distances du centre d'un quadrilatère régulier à ses quatre côtés excède les $\frac{9}{10}$ d'un angle droit.

LIONNET.

895 *bis* (**1868**, 557). — Si deux triangles sont homologiques, montrer qu'on peut faire passer par leurs six sommets une cubique telle que les tangentes aux trois sommets de chacun des triangles aillent concourir respectivement en un point situé sur la courbe. SYLVESTER.

947 (**1869**, 277). — Étant donnée la série

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots,$$

convergente pour une valeur finie quelconque réelle ou imaginaire de z, on pose l'équation

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots = A,$$

A étant un nombre donné. Démontrer que la différence entre deux racines quelconques z_1 et z_2 de cette équation est supérieure à une quantité fixe qui dépend de A et des coefficients C_0, C_1, C_2, ... F. PICCIOLI.

967 (**1869**, 561). — THÉORÈME. — *a étant un nombre en-*

tier positif quelconque, si l'on désigne par S_n *la somme des résultats que fournit l'expression*

$$[t_1(a-1)][t_2(a-1)-1][t_3(a-1)-2]\ldots[t_n(a-1)-(n-1)],$$

lorsqu'on y remplace $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ *par tous les nombres entiers depuis* 1 *jusqu'à* p, *avec cette restriction qu'on ait toujours*

$$t_{k+1} \geqq t_k \qquad \text{et} \qquad t_k(a-1) > k-1,$$

alors on a l'identité suivante

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{p+1} &+ \frac{S_2}{(p+1)(p+2)} \\ &+ \frac{S_3}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots \\ &\quad + \frac{S(a-1)p}{(p+1)(p+2)\ldots(ap)} = \left(\frac{2^a-1}{a}\right)^p - 1.\end{aligned}$$

Désiré André.

999 (**1870**, 430). — S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_m x^{n-m+1} + \ldots + A_n x + A_{n+1} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A_m = \frac{a^m - b^m}{a-b},$$

on a, depuis $m=1$ jusqu'à $m=n$ inclusivement,

$$S_m = a^m + b^m.$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles. S. Realis.

1000 (**1870**, 430). — S_m désignant la somme des puissances semblables des racines de l'équation

$$\begin{aligned}x^n + ax^{n-1} &+ \frac{a(a+1)}{2}x^{n-3} \\ &+ \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3}x^{n-3} + \ldots \\ &+ \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)}{2.3.4\ldots n} = 0,\end{aligned}$$

on a

$$S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = \ldots = S_2 = S_1 = -a,$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{2.3.4\ldots n} - a.$$

On déduit de là que, a étant positif, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles, ce qui s'accorde avec l'énoncé de la question 776 (**1866**, 432).

Note. — Pour l'équation

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \ldots + \frac{x^{n-p}}{p!} + \ldots + \frac{x}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = 0,$$

on a évidemment

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 0,$$

et l'on reconnaît de même que l'équation ne peut avoir deux racines réelles, ce qui s'accorde avec la question 775 (**1866**, 432).

S. Realis.

1007 (**1870**, 479). — Par chaque point d'une surface du second degré on peut faire passer deux cônes de révolution circonscrits à la surface. Ces cônes se coupent suivant deux coniques dont les tangentes au point considéré de la surface sont aussi tangentes aux sections circulaires de la surface qui passent par ce point. Les lignes de courbure qui passent par le même point sont les bissectrices des angles formés par les deux tangentes.

Emile Weyr.

1008 (**1870**, 480). — Tout cube parfait différent de zéro, augmenté de 1, 2 ou 8 unités d'un ordre quelconque, n'est pas un cube parfait.

Moret-Blanc.

1015 (**1871**, 96). — Construire une surface gauche ayant pour ligne de structure une courbe donnée, et pour cône directeur un cône de révolution, également donné.

Démontrer que si l'ouverture du cône varie, le paramètre de distribution de chaque génératrice reste constant et égal à ce qu'il est lorsque le cône directeur se réduit à un plan.

G. Fouret.