NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. APPELL

Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche (Extrait d'une lettre à M. Laisant)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 401-402

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__401_0>

[M¹3g] [M³2]

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE PLANE OU GAUCHE

(Extrait d'une lettre à M. Laisant);

PAR M. P. APPELL.

... Dans une leçon sur les foyers des coniques faite à l'École de Sèvres, une élève de troisième année, Mlle Sebald, a proposé d'appeler *foyer* d'une courbe algébrique un point F, tel que la distance d'un point quelconque M de la courbe à ce point F soit exprimable par une *fonction rationnelle* des coordonnées de M. Cette définition a été discutée par l'ensemble des élèves de mathématiques de troisième année. Elle est apparue comme féconde et comme pouvant donner lieu à d'intéressantes applications : elle s'étend aux lignes dans l'espace et aux surfaces. Citons notamment :

1° L'application aux ovales de Descartes (foyers dans le plan et dans l'espace; relations métriques correspondantes);

2° L'application aux courbes unicursales planes ou gauches;

3° L'application à certaines courbes, planes ou gauches, définies par des relations algébriques entre les distances d'un quelconque de leurs points à des points fixes;

Etc.

Mais avant de rédiger ces applications, nous voudrions savoir si l'idée est nouvelle. Un de vos lecteurs nous renseignera certainement.

Pour les courbes planes, la définition des foyers, d'après Plücker, est bien connue [1]; un point F est *foyer pluckérien* quand, parmi les tangentes menées de ce point à la courbe, il en est deux qui ont pour coefficients angulaires $\pm i$ (axes rectangulaires). Si maintenant (α, β) est un *foyer rationnel*, on a, pour tous les points (x, y) de la courbe,

$$(\mathrm{C}) \qquad [(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]\, Q^2(x,y) = P^2(x,y),$$

P et Q désignant deux polynomes en x et y. Le point (α, β) est donc un *foyer pluckérien*, mais c'est un *foyer pluckérien* spécial, car les deux tangentes

$$y-\beta = \pm i(x-\alpha)$$

issues de ce point sont *multiples*.

Ainsi tout foyer rationnel d'une courbe plane est un foyer pluckérien, mais la réciproque n'est évidemment pas exacte. Les courbes qui admettent des foyers rationnels sont des courbes spéciales.

Ajoutons que les points de rencontre des courbes

$$P(x,y)=0, \qquad Q(x,y)=0$$

sont des points singuliers pour la courbe (C).

---

(1) Niewenglowski, *Géométrie analytique*, t. I, p. 448.