J. Bouchary

Sur les cercles bitangents à la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 464-471

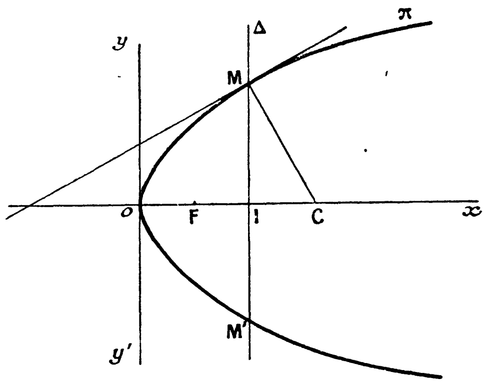
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__464_1>

[$L^1$10d]

SUR LES CERCLES BITANGENTS A LA PARABOLE;

Par M. J. BOUCHARY,
Élève à l'École Colbert.

Soient une parabole π, F son foyer, O le sommet, yOy' la tangente au sommet, Ox l'axe et p le paramètre et M, M' deux points symétriques par rapport à l'axe; les normales en M et M' concourent par raison de symétrie en un point C de l'axe; le cercle de centre C et de rayon CM aura, en M et M', mêmes tangentes que la parabole. On dit qu'il est bitangent à la parabole, MM' est la corde de contact.



Recherche de la position du centre. — Soient

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole rapportée à sa tangente au sommet et à l'axe, puis

$$(2) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$$

l'équation du cercle rapporté aux mêmes axes. Formons l'équation aux ordonnées des points de rencontre. De (1) on tire

$$x = \frac{y^2}{2p},$$

puis portons dans (2), il vient

$$\left(\frac{y^2}{2p} - a\right)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$$

ou

$$\frac{y^4}{4p^2} + a^2 - \frac{ay^2}{p} + y^2 + b^2 - 2by - R^2 = 0$$

ou encore

$$(3)\quad y^4 + 4y^2(p^2 - ap) - 8ybp^2 + 4p^2(a^2 + b^2 - R^2) = 0.$$

Cette équation n'a pas de terme en y^3, la somme des racines est donc nulle, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Quand un cercle rencontre une parabole en quatre points, la somme algébrique des perpendiculaires abaissées de ces quatre points sur l'axe de la parabole est nulle.*

Il résulte de ce théorème que, lorsque le cercle sera bitangent à la parabole, les ordonnées des points de contact seront égales, mais de signe contraire.

L'équation (3) se présentera sous la forme

$$0 = (y - y_1)^2(y_1 + y)^2,$$
$$(y^2 + 2yy_1 + y_1^2)(y^2 + 2yy_1 + y_1^2) = 0,$$
$$(4)\qquad y^4 - 2y^2y_1^2 + y_1^4 = 0.$$

L'équation n'a pas de termes en y et, si nous identifions les deux équations, il faut que $b = 0$, puis

$$(\alpha)\qquad y_1^2 = 2p(a - p),$$

l'ordonnée du point de contact est donc

$$(5)\qquad y_1 = \pm\sqrt{2p(a - p)};$$

identifions les termes constants des deux équations

$$(\beta)\quad y_1^4 = 4p^2(a^2 - R^2) \qquad \text{ou} \qquad y_1^2 = 2p\sqrt{a^2 - R^2};$$

égalons (α) et (β), il vient

$$(a - p)^2 = a^2 - R^2,$$
$$(6)\qquad R^2 = 2ap - p^2 \qquad \text{ou} \qquad R = \sqrt{p(2a - p)};$$

donc, pour que les cercles existent, il faut

$$(2a-p)>0 \qquad \text{ou} \qquad a \geqq \frac{p}{2};$$

si $a=\frac{p}{2}$ le rayon est nul, l'égalité (6) définit une famille de cercles comprenant un cercle de rayon nul, qui est le foyer; le rayon croît constamment quand a croît, c'est-à-dire quand C s'éloigne de F dans le sens positif de l'axe. Calculons l'abscisse du point de contact, écrivons que ce point est sur la parabole, on a :

$$2px = 2p(a-p),$$
$$x = a-p;$$

c'est l'abscisse du point I d'intersection de MM' avec l'axe; or l'abscisse de C est $x=a$; faisons la différence $IC=p$, d'où le théorème suivant :

Théorème. — *L'abscisse du centre et l'abscisse du point de contact ont une différence constante et égale au paramètre de la parabole.*

On a vu précédemment que b était nul, et que

$$R^2 = 2ap - p^2;$$

l'équation du cercle bitangent est donc

$$(x-a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0;$$

il n'y a qu'un seul paramètre variable, a.

On peut former rapidement cette équation d'après l'égalité $f + P^2 = 0$ qui est l'équation des coniques bitangentes à la conique $f=0$; P étant l'équation de la corde de contact, il vient

$$y^2 - 2px + (x-x_0)^2 = 0;$$

x_0 abscisse de M ou

$$y^2 - 2px + x^2 + a^2 + p^2 - 2ap - 2xa + 2px = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 + p^2 - 2ap = 0$$

ou enfin

$$(x - a)^2 + y^2 + p^2 - 2ap = 0. \tag{7}$$

On tire le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les cercles bitangents à la parabole ont leur centre sur l'axe des x; la corde de contact est perpendiculaire à l'axe de la parabole; il n'existe qu'un seul cercle de centre donné, bitangent à la parabole.*

Calculons FC et FM.

On a

$$\mathrm{FC} = \mathrm{OC} - \mathrm{OF} = a - \frac{p}{2},$$

puis

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FM}}^2 &= \overline{\mathrm{FI}}^2 + \overline{\mathrm{IM}}^2 \\ &= \left(a - p - \frac{p}{2}\right)^2 + 2p(a-p) \\ &= a^2 + \frac{9p^2}{4} - 3ap + 2ap - 2p^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{p^2}{4} - ap\right),\end{aligned}$$

$$\overline{\mathrm{FM}}^2 = \left(a - \frac{p}{2}\right)^2;$$

donc

$$\mathrm{FM} = \mathrm{FC}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème. — *La corde de contact est l'axe radical du cercle bitangent et du cercle ayant pour centre le point* F *et pour rayon* FC.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'axe radical de deux cercles bitangents est équidistant des cordes de contact.*

L'équation d'un cercle bitangent à la parabole est

$$(x-a)^2+y^2+p^2-2ap=0,$$

a désignant l'abscisse du centre; considérons un autre cercle bitangent, son équation est

$$(x-a')^2+y^2+p^2-2a'p=0;$$

l'équation de l'axe radical de ces cercles est

$$a^2-a'^2-2x(a-a')-2p(a-a')=0,$$

en divisant par $a-a'$ qui est essentiellement différent de o,

$$a+a'-2x-2p=0,$$

$$x=\frac{a+a'}{2}-p;$$

l'équation des cordes de contact est

$$x=a-p, \qquad x=a'-p;$$

l'équation de la parallèle équidistante est

$$x=\frac{a+a'}{2}-p;$$

les deux droites coïncident bien; le théorème est démontré.

On peut transformer le théorème comme il suit :

THÉORÈME. — *Étant donnés trois cercles bitangents à la parabole, les abscisses des centres étant* a, a' *et* a'' *(avec* $a>a'>a''$*), la condition nécessaire et suffisante pour que la corde de contact du second soit axe radical des deux autres est que* $a+a''=2a'$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La puissance d'un point $x_0 y_0$ de la parabole par rapport à un cercle bitangent est égale au carré de la distance du point considéré à la corde de contact.*

En effet, soit

$$(x-a)^2+y^2+p^2-2ap=0$$

l'équation du cercle bitangent; la puissance du point $(x_0 y_0)$ est

$$(x_0-a)^2+y_0^2+p^2-2ap=d^2,$$

et la distance de ce point à la corde de contact est

$$l^2=(x_0-a+p)^2 \quad \text{ou} \quad l^2=(x_0-a)^2+p^2+2p(x_0-a);$$

or

$$2px_0=y_0^2, \qquad l^2=(x_0-a)^2+y_0^2+p^2-2ap;$$

donc $d^2=l^2$; le théorème est démontré.

THÉORÈME. — *La somme des longueurs des tangentes issues d'un point de la parabole $(x_0 y_0)$ à deux cercles bitangents à la parabole est égale à la distance des cordes de contact.*

Nous n'avons qu'à appliquer deux fois le théorème précédent.

On démontrerait sans plus de difficulté les théorèmes suivants :

I. THÉORÈME. — *Étant donnés deux cercles bitangents à une parabole, on mène la tangente commune intérieure rencontrant la parabole en* M *et* P : 1° *Le cercle décrit sur* MP *est tangent aux cordes de contact des cercles bitangents;* 2° *Son centre est équidistant des points de contact des cercles et de la tangente commune.*

II. Théorème. — 1° *La distance des centres des cercles bitangents est égale à* MP; 2° *Le premier cercle bitangent est orthogonal aux cercles de centres* M *et* P *et ayant pour rayons les distances de* M *et* P *à la corde de contact.*