Nouvelles annales de mathématiques

A. Myller

Surfaces parallèles aux surfaces cyclides

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 18 (1918), p. 95-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1918_4_18__95_1>

[$M^2 2 i \beta$]

SURFACES PARALLÈLES AUX SURFACES CYCLIDES;

PAR M. A. MYLLER.

Les courbes ou les surfaces parallèles à une courbe ou à une surface quelconque donnée ont fait l'objet de quelques recherches générales ([2]). On a étudié aussi des cas spéciaux : les courbes parallèles aux coniques ([3]), à quelques quartiques particulières ([4]) ou à d'autres courbes spéciales ([5]).

Dans ce qui suit il s'agira des surfaces parallèles aux surfaces cyclides ([6]), c'est-à-dire aux surfaces du quatrième ordre, qui ont le cercle imaginaire de l'infini pour ligne double. Les résultats se rapportent aussi aux courbes parallèles aux quartiques bicirculaires,

---

(1) *Cf.* LORIA-SCHÜTTE, *Speziëlle ebene Kurven*, t. II, p. 296.

(2) CAYLEY, *Quart. Journ. Math.*, t. XI, 1871.

(3) CATALAN, *Nouv. Ann. Math.*, t. III, 1844; CAYLEY, *Ann. di Matem.*, t. XIII, 1860; Gomes TEIXEIRA, *Mém. cour. par l'Ac. de Belgique*, t. LVIII, 1898.

(4) LOSEHAND, *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907.

(5) G. LORIA, *Math. Ann.*, t. LXIV, 1907.

(6) DARBOUX, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, Paris, 1873.

quartiques qui correspondent dans la Géométrie plane aux cyclides.

On définit les surfaces parallèles de la façon suivante : Étant donnée une surface F si l'on prend sur la normale dans un point quelconque M, d'un côté et de l'autre de la surface, deux points M' et M'' tels que

$$MM' = MM'' = \text{const.}$$

et si l'on fait varier M sur la surface, on obtient comme lieu des points M' et M'' une surface parallèle à F.

La cyclide peut être définie comme l'enveloppe d'une série de sphères S (génératrices) qui coupent à angles droits une sphère fixe Σ (directrice) et dont les centres décrivent une quadrique fixe Q (déférente).

Considérons une série de sphères S' concentriques avec les sphères S et telles que le rayon R' de chaque sphère S' diffère du rayon R de la sphère concentrique S d'une quantité fixe δ

$$R' = R \pm \delta.$$

Les sphères S' auront comme enveloppe une surface P à deux nappes, correspondant chacune aux valeurs $+\delta$ et $-\delta$, qui sera parallèle à la cyclide donnée. Pour le démontrer il suffit de montrer que, si M est le point de contact de la cyclide avec la sphère génératrice S, le point M' d'intersection du rayon de la sphère S passant par M avec la sphère concentrique S' sera aussi le point de contact de la sphère S' avec son enveloppe la surface parallèle.

Prenons le centre O de la sphère S pour origine des coordonnées et le plan tangent en O à la déférente pour plan xOy.

Soit

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

l'équation de la sphère S. Une sphère génératrice infiniment voisine avec le centre dans xOy aura pour équation

$$(x-d\alpha)^2+(y-d\beta)^2+z^2-\left(R+\frac{\partial R}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial R}{\partial\beta}d\beta\right)^2=0$$

ou, en gardant seulement les infiniment petits du premier ordre,

$$x^2+y^2+z^2-2d\alpha x-2d\beta y-R^2-2R\frac{\partial R}{\partial\alpha}d\alpha-2R\frac{\partial R}{\partial\beta}d\beta=0.$$

L'intersection de cette sphère avec la précédente se trouve dans le plan

$$\left(x+R\frac{\partial R}{\partial\alpha}\right)d\alpha+\left(y+R\frac{\partial R}{\partial\beta}\right)d\beta=0$$

et par conséquent le point de contact M de S avec l'enveloppe se trouve sur la droite

$$x=-R\frac{\partial R}{\partial\alpha},$$
$$y=-R\frac{\partial R}{\partial\beta}.$$

Prenons aussi la sphère S'

$$x^2+y^2+z^2-(R\pm\delta)^2=0$$

et la sphère voisine

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-2d\alpha x-2d\beta y\\&\quad-(R\pm\delta)^2-2(R\pm\delta)\frac{\partial R}{\partial\alpha}-2(R\pm\delta)\frac{\partial R}{\partial\beta}=0.\end{aligned}$$

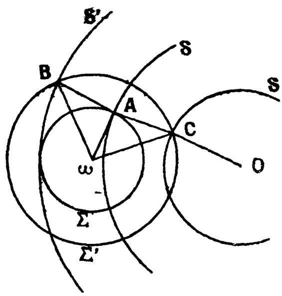
Le point de contact M' de S' avec son enveloppe se trouve sur la droite

$$x = -(R \pm \delta)\frac{\partial R}{\partial \alpha},$$

$$y = -(R \pm \delta)\frac{\partial R}{\partial \beta}.$$

Par conséquent M′ se trouve sur la droite OM.

Nous allons prouver maintenant que les sphères S′ coupent à un angle fixe θ une sphère fixe Σ' concentrique avec Σ. Soient O le centre d'une sphère généra-



trice S de rayon R et ω le centre de la sphère directrice Σ de rayon ρ. Soient OA un rayon de S tangent en A à Σ et ωA le rayon de Σ qui doit être perpendiculaire à OA. Prenons sur OA deux points B et C d'un côte et de l'autre du point A et à la distance δ de ce point. Considérons les sphères S′ ayant le centre O et passant par B et C. Leurs rayons seront égaux à $R + \delta$ et $R - \delta$. La sphère Σ' ayant le centre ω et passant par B et C a un rayon de longueur constante ρ' quelle que soit la sphère génératrice. On a

$$\rho'^2 = \rho^2 + \delta^2.$$

Si nous désignons par θ l'angle ωBA ou ωCA, on obtient du triangle ωBA ou ωCA

$$\tang\theta = \frac{\rho}{\delta}; \tag{1}$$

or, θ étant l'angle sous lequel les sphères S' coupent la sphère fixe Σ', le théorème est démontré.

En nous servant du théorème connu qu'une cyclide peut être considérée de cinq manières différentes comme l'enveloppe d'une série de sphères qui coupent à angles droits une sphère fixe, on peut dire aussi, d'après ce dernier résultat, qu'une surface parallèle à une cyclide peut être considérée de cinq manières différentes comme l'enveloppe d'une série de sphères qui coupent à angle constant une sphère fixe et dont les centres décrivent une quadrique fixe.

Cherchons si parmi les surfaces parallèles à une cyclide donnée il y en a une dont les sphères génératrices coupent la directrice sous un angle nul; alors ces sphères génératrices sont tangentes à une sphère fixe. La formule (1) nous montre que cela est possible seulement si $\rho = 0$, c'est-à-dire si la cyclide est telle qu'une de ses sphères directrices se réduit à un point O. Dans ce cas toutes les surfaces parallèles jouissent de cette propriété. Soit Q la déférente correspondant à ce point O. La cyclide sera l'enveloppe des sphères ayant leurs centres sur Q et passant par O. Elle sera donc le lieu des points symétriques du point O par rapport aux plans tangents à Q. Il est facile de voir que ce lieu est la podaire d'une quadrique homothétique à Q, deux fois plus grande, le centre d'homothétie étant en O.

Cherchons aussi si parmi les surfaces parallèles à une cyclide il y en a qui sont aussi des cyclides. Si une telle surface existe elle sera l'enveloppe d'une série de sphères génératrices qui coupent en même temps une sphère à angle constant et une autre à angle droit. En effet, elle possède comme surface parallèle une série de sphères génératrices qui coupent une sphère fixe à angle constant, mais la surface étant aussi cyclide cette série doit être une des cinq séries des sphères de la cyclide qui coupent une sphère fixe à angle droit.

Le problème revient donc à chercher l'enveloppe des sphères qui coupent deux sphères données respectivement à angle droit et à angle constant.

Montrons d'abord que toutes les sphères S qui coupent à angles donnés α et β respectivement deux sphères données, coupent à angle constant une sphère quelconque fixe passant par l'intersection des deux sphères données.

Soient

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-R^2=0, \\ (x-a)^2+y^2+z^2-r^2=0 \end{cases}$$

les équations des deux sphères données. La sphère

$$(3)\qquad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-\rho^2=0$$

les coupe aux angles α et β si l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2+\rho^2-2R\rho\cos\alpha, \\ (\xi-a)^2+\eta^2+\zeta^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos\beta. \end{cases}$$

Une sphère passant par l'intersection des sphères (2) a pour équation

$$(5)\qquad \left(x-\frac{a}{1+\lambda}\right)^2+y^2+z^2-\left[\frac{r^2+\lambda R^2}{1+\lambda}-\frac{\lambda a^2}{(1+\lambda)^2}\right]=0.$$

En calculant l'angle θ que fait la sphère (3) avec la sphère (5) on obtient, en tenant compte des conditions (4),

$$(6)\qquad \cos\theta=\frac{\lambda R\cos\alpha+r\cos\beta}{\sqrt{(1+\lambda)(r^2+\lambda R^2)-\lambda a^2}}.$$

Cette formule étant indépendante de ξ, η, ζ et ρ démontre le théorème.

L'équation (6) donne, à un θ donné, deux valeurs pour λ. Par conséquent il y a deux sphères passant par l'intersection des sphères (2) qui coupent les sphères S sous un angle donné. Si pourtant θ est droit, l'équation (6) donne une seule valeur pour λ, et par conséquent il existe seulement une sphère Σ passant par l'intersection des sphères données qui coupe orthogonalement les sphères S. On obtient l'équation de cette sphère Σ en remplaçant dans (5) λ par

$$-\frac{r\cos\beta}{R\cos\alpha}.$$

En particulier il existe deux sphères qui coupent les sphères S à l'angle zéro. Ces deux sphères K forment donc l'enveloppe des sphères S. En éliminant ρ entre les deux équations (4), on obtient l'équation du lieu des centres des sphères S qui est une quadrique de révolution R déférente de la cyclide qui se réduit aux deux sphères K. On peut alors constater facilement que la quadrique R est tangente à la sphère Σ le long du cercle qui est l'intersection des sphères (2).

En revenant à la question posée, on voit que la cyclide dont la surface parallèle est aussi cyclide se réduit à deux sphères et dans ce cas toutes les surfaces parallèles sont cyclides.

Ce résultat se rapporte aux cyclides générées par ∞^2 sphères S qui leur sont doublement tangentes, c'est-à-dire à celles dont la déférente est une véritable quadrique. Il existe pourtant des cyclides pour lesquelles la quadrique déférente se réduit à une conique. Si ces cyclides ont aussi la propriété que leurs surfaces parallèles soient aussi cyclides, leurs sphères génératrices doivent aussi couper deux sphères fixes respectivement à angle droit et constant et par conséquent la conique déférente ne peut être qu'une section plane de la quadrique R. Cette conique déférente est tangente à la sphère directrice Σ car R est tangente. La cyclide est donc une *cyclide de Dupin*.

Inversement la cyclide de Dupin pouvant être définie comme l'enveloppe des sphères données Σ_1, Σ_2, Σ_3, deux quelconques de ces trois sphères jouent le rôle des sphères (2) et par conséquent les sphères génératrices de la cyclide de Dupin sont des sphères S du problème précédent.

On peut déduire de cela une propriété des cyclides de Dupin. Prenons deux sphères Σ'_1 et Σ'_2 passant par l'intersection de Σ_1 et Σ_2, qui coupent les sphères génératrices de la cyclide aux angles α et β. Nous savons que cela est possible. De même par l'intersection des sphères Σ'_2 et Σ_3 nous prenons une sphère Σ'_3 qui coupe les génératrices à l'angle γ. Observons que ce procédé n'est applicable que si un des angles α, β, γ au moins n'est droit.

Par conséquent la cyclide de Dupin peut être considérée comme l'enveloppe des sphères qui coupent trois sphères données respectivement aux angles α, β, γ dont un au moins n'est droit.