

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 19 (1919), p. 145-158

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1919\\_4\\_19\\_\\_145\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__145_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

---

1710.

(1896, p. 56; 1917, p. 244.)

*Une série de bougies, de compositions et de hauteurs différentes, sont posées verticalement sur une table et allumées au même instant. Démontrer : 1° que généralement le centre de gravité du système formé par les bougies décrit une série d'arcs d'hyperboles successives; 2° qu'à un instant quelconque l'hyperbole correspondante a une asymptote verticale qui passe par le centre de gravité primitif des parties consumées des bougies qui brûlent encore à l'instant considéré.* WALTON.

SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient  $\alpha_i, \beta_i, O$  les coordonnées des points  $P_i$  où sont posées

---

(1) *Mathematical Problems*, 1919 (23), p. 332, 2<sup>e</sup> édition (1878).

les bougies  $B_i$  de longueurs  $l_i$ ,  $\mu_i$  les masses par unité de longueur des bougies; pendant le temps  $t$  la longueur de la bougie  $B_i$  est réduite de  $\lambda_i t$ ,  $\lambda_i$  étant un coefficient dépendant de la composition de la bougie  $B_i$ , supposée homogène. Les centres de gravité des bougies ont pour coordonnées

$$\alpha_i, \beta_i, \frac{1}{2}(l_i - \lambda_i t)$$

et sont affectés de masses  $\lambda_i(l_i - \lambda_i t)$ . Les coordonnées du centre de gravité  $G$  du système formé par les bougies sont donc

$$x = \frac{\sum \alpha_i l_i \mu_i - t \sum \alpha_i \lambda_i \mu_i}{\sum l_i \mu_i - t \sum \lambda_i \mu_i}, \quad y = \frac{\sum \beta_i l_i \mu_i - t \sum \beta_i \lambda_i \mu_i}{\sum l_i \mu_i - t \sum \lambda_i \mu_i},$$

$$z = \frac{t^2 \sum \mu_i \lambda_i^2 - 2t \sum l_i \lambda_i \mu_i + \sum \mu_i l_i^2}{2(\sum l_i \mu_i - t \sum \lambda_i \mu_i)};$$

les signes sommatoires s'étendent à toutes les bougies qui brûlent encore à l'instant  $t$ , et les sommes qu'ils représentent changent quand  $t$  prend une des valeurs  $l_i : \lambda_i$ . Les équations paramétriques qui précèdent montrent que le lieu de  $G$  se compose de coniques. Considérons celle relative à un intervalle compris entre deux valeurs consécutives de  $l_i : \lambda_i$ . Quand le paramètre est infini,  $z$  est infini et les expressions de  $x$  et  $y$  s'écrivent.

$$\frac{\sum \alpha_i \lambda_i \mu_i}{\sum \lambda_i \mu_i}, \quad \frac{\sum \beta_i \lambda_i \mu_i}{\sum \lambda_i \mu_i};$$

ce sont les coordonnées de la projection, sur le plan  $xy$ , du centre de gravité primitif  $\gamma$  des parties consumées des bougies qui brûlent encore pendant l'intervalle considéré, puisque le centre de gravité primitif de la partie consumée de  $B_i$  était affecté de la masse  $\mu_i \lambda_i t$ . Par conséquent, pour les valeurs de  $t$  comprises entre deux valeurs consécutives de  $l_i : \lambda_i$ ,  $G$  décrit une hyperbole dont une asymptote est la verticale menée par le point  $\gamma$  correspondant.

**Autres solutions**, de MM. H. BROCARD, P. CARISSAN et P. FAUCHEUX. — M. Brocard fait très justement remarquer qu'ici le zéro caractérise une discontinuité, et non une transition; et que c'est probablement ce fait qui a retardé si longtemps la solution.

## 1721.

(1896, p. 152; 1917, p. 244.)

Déterminer un polynome entier du degré  $n$ ,  $f'_n(x)$ , tel que le résidu de la fonction

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{m-1}}{1-x^m} \quad (m \text{ nombre entier positif})$$

relatif au point  $x = 0$  soit égal à zéro quand  $m$  et  $n$  sont différents, et à l'unité quand  $m = n$ . J. FRANEL.

## SOLUTION

Par M. L. VARCHON.

I. Développons, autour du point  $x = 0$ , la fonction  $\frac{x^{m-1}}{1-x^m}$ .

On a

$$(1-x^m)^{-1} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \dots + x^{(k-1)m} + \dots$$

et

$$\frac{x^{m-1}}{1-x^m} = x^{m-1} + x^{2m-1} + x^{3m-1} + \dots + x^{km-1} + \dots,$$

ces développements sont valables dans le cercle de rayon 1, autour du point  $x = 0$ . On a, d'autre part,

$$f'_n\left(\frac{1}{x}\right) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \dots + \frac{A_n}{x^n}.$$

Le terme de moindre degré dans le développement de  $f'_n\left(\frac{1}{x}\right) \frac{x^{m-1}}{1-x^m}$  est  $A_n x^{m-n-1}$ . Pour que le point  $x = 0$  soit un pôle, il faut que le degré de ce terme soit au plus égal à  $-1$ . On doit donc avoir

$$m - n - 1 \leq -1 \quad \text{ou} \quad m \leq n.$$

Si nous faisons  $m = n$ , le développement de la partie infinie se réduit à  $\frac{A_n}{x}$ ; donc  $A_n = 1$ .

Pour déterminer les autres coefficients, nous donnerons à  $m$  successivement les valeurs  $n-1, n-2, \dots, 1$ . En écri-

vant chaque fois que le coefficient de  $\frac{1}{x}$  dans le développement est nul, nous aurons  $n - 1$  équations de la forme

$$(1) \quad A_m + A_{2m} + A_{3m} + \dots = 0,$$

qui nous permettront de déterminer les  $n - 1$  coefficients  $A_{n-1}, A_{n-2}, A_{n-3}, \dots, A_1$ ; car, chaque équation du système renfermant une nouvelle inconnue qui n'entre dans aucune des précédentes, le déterminant se réduit à son terme principal qui, dans ce cas, est l'unité.

Nous avons ainsi un système d'équations linéaires qui dans chaque cas particulier nous permettra de calculer les coefficients du polynome  $f'_n(x)$ .

Nous allons maintenant aborder la résolution du système des équations (1) dans le cas le plus général.

II. Considérons d'abord les valeurs de  $m$  qui ne divisent pas  $n$ ; les équations correspondantes ne renfermeront pas  $A_n$  ni aucun des coefficients dont l'indice soit diviseur de  $n$ . Si  $N$  est le nombre des diviseurs de  $n$ , nous aurons ainsi un système de  $n - N$  équations linéaires et homogènes, distinctes puisqu'elles font partie du système considéré au paragraphe I, pour déterminer les  $n - N$  coefficients correspondants; donc ces  $n - N$  coefficients sont nuls.

III. Il nous reste à déterminer les coefficients  $A_m$  dont l'indice  $m$  est diviseur de  $n$ . Considérons d'abord les valeurs de  $m$  telles que  $\frac{n}{m} = \alpha$  soit un nombre premier. Désignons par  $D_\alpha$  une telle valeur; on a  $\frac{n}{\alpha} = D_\alpha$ , et l'équation (1) devient

$$A_{D_\alpha} + A_{2D_\alpha} + A_{3D_\alpha} + \dots + A_{(\alpha-1)D_\alpha} + A_n = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte des résultats du paragraphe II,

$$A_{D_\alpha} + A_n = 0,$$

d'où

$$A_{D_\alpha} = -1 = (-1)^\alpha.$$

Faisons maintenant  $m = D_{\alpha\beta}$ , en désignant par  $D_{\alpha\beta}$  le quotient de  $n$  par le produit de ses deux diviseurs premiers  $\alpha$  et  $\beta$ .  $D_{\alpha\beta}$  est le plus grand commun diviseur des nombres  $D_\alpha$

et  $D_\beta$ ; en tenant compte des résultats du paragraphe II, l'équation (1) peut alors s'écrire

$$A_{D_{\sigma^2}} + A_{D_\alpha} A_{D_\beta} A_n = 0,$$

d'où

$$A_{D_{\alpha^2}} = 1 = (-1)^2.$$

Appelons, pour plus de simplicité, « diviseur principal d'ordre  $k$  », le quotient de  $n$  par le produit de  $k$  facteurs premiers différents. Nous venons de voir que les coefficients dont l'indice est diviseur principal du premier ordre sont égaux à  $(-1)^1$ , que ceux dont l'indice est diviseur principal du deuxième ordre sont égaux à  $(-1)^2$ ; la loi est générale et les coefficients dont l'indice est diviseur principal d'ordre  $k$  sont égaux à  $(-1)^k$ ; pour le montrer, il suffit d'établir que si la loi est vraie pour  $k = p - 1$ , elle est vraie pour  $k = p$ .

Soit donc

$$D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = \frac{n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$$

un diviseur principal d'ordre  $p$ ; il est facile de voir que  $D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$  est diviseur d'autant de diviseurs principaux d'ordre  $q$ , qu'il y a de combinaisons  $q$  à  $q$  des  $p$  lettres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , soit  $C_p^q$ .

En faisant  $m = D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$  dans l'équation (1), et en remplaçant les coefficients connus par leurs valeurs on obtient

$$(2) \quad A_{D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}} + C_p^{p-1} (-1)^{p-1} + C_p^{p-2} (-1)^{p-2} + \dots \\ + C_p^q (-1)^q + \dots + C_p^2 (-1)^2 + C_p^1 (-1) = 0.$$

Or on a

$$(-1)^p + C_p^{p-1} (-1)^{p-1} + C_p^{p-2} (-1)^{p-2} + \dots \\ + C_p^q (-1)^q + \dots + C_p^2 (-1)^2 + C_p^1 (-1) = [(-1) + 1]^p = 0,$$

d'où

$$A_{D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}} = (-1)^p.$$

IV. Il nous reste à considérer le cas des diviseurs de  $n$  qui ne sont pas des diviseurs principaux; soit  $d$  un tel diviseur. Considérons le quotient  $\frac{n}{d}$  et soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  tous ses diviseurs premiers distincts.  $d$  divise alors le diviseur prin-

cipal d'ordre  $p$ ,  $D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ , et c'est le seul diviseur principal d'ordre  $p$  qu'il divise.

Supposons d'abord que le quotient de  $D_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$  par  $d$  soit un nombre premier  $\alpha_1$  par exemple. En faisant  $m = d$  dans l'équation (1), on aura au premier membre : le coefficient  $A_d$ , puis des coefficients dont l'indice est le produit de  $d$  par un multiple de  $\alpha_1$  et dont la somme est nulle en vertu de l'équation (2); puis des coefficients dont l'indice est le produit de  $d$  par les diviseurs du produit  $\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_p$ , ce qui revient au même, le quotient par  $\alpha_1$  d'un diviseur principal d'ordre inférieur à  $p$ ; enfin nous aurons d'autres coefficients qui seront tous nuls en vertu du paragraphe II.

Nous sommes donc amenés à considérer le cas où  $d = d_\lambda$  ne divise que des diviseurs principaux d'ordre inférieur à  $p$  et finalement le cas où il ne divise qu'un diviseur principal du premier ordre,  $D_\alpha$  par exemple.

On a alors

$$d_\lambda = \frac{D_\alpha}{\alpha^\lambda}.$$

Si nous faisons successivement  $\lambda = 1, 2, 3 \dots$  et que nous portions les valeurs obtenues dans l'équation (1), nous aurons, en tenant compte des résultats connus :

$$\begin{aligned} A_{d_1} + A_{D_\alpha} + A_n &= 0, & \text{d'où} & \quad A_{d_1} = 0; \\ A_{d_2} + A_{d_1} + A_{D_\alpha} + A_n &= 0, & \text{»} & \quad A_{d_2} = 0; \\ A_{d_3} + A_{d_2} + A_{d_1} + A_{D_\alpha} + A_n &= 0, & \text{»} & \quad A_{d_3} = 0, \end{aligned}$$

et d'une façon générale  $A_{d_\lambda} = 0$ .

Admettons maintenant que le coefficient  $A_m$  soit nul pour toute valeur de  $m$ , non diviseur principal, mais qui divise un diviseur principal d'ordre  $(p - 1)$  au plus. Le coefficient  $A_d$ , considéré plus haut, où  $d$  est le quotient d'un diviseur principal d'ordre  $p$ , par un nombre premier, est évidemment nul.

De même si nous considérons le diviseur  $d'$  quotient d'un diviseur principal d'ordre  $p$  par le produit de deux nombres premiers, différents ou non, et si nous faisons  $m = d'$  dans l'équation (1), nous aurons au premier membre: le terme  $A_{d'}$ , puis des coefficients dont l'indice est le diviseur principal considéré ou ses multiples et dont la somme est nulle; enfin des termes qui sont tous nuls, soit parce que l'indice est le quo-

tient d'un diviseur principal d'ordre  $p$  par un nombre premier, ou que cet indice ne divise que des diviseurs principaux d'ordre inférieur à  $p$ , soit parce que ce sont des termes considérés au paragraphe II. Donc

$$A_{d'} = 0.$$

On voit alors facilement comment on peut démontrer de proche en proche que tout coefficient dont l'indice est un diviseur non principal de  $n$  est nul.

En résumé le polynôme  $f'_n(x)$  sera déterminé de la façon suivante : tout coefficient dont l'indice est égal au quotient de  $n$  par le produit de  $p$  de ses facteurs premiers, ces facteurs premiers étant tous différents, est égal à  $(-1)^p$ ; tous les autres coefficients sont nuls, à l'exception de  $A_0$  qui est arbitraire.

En particulier, si  $n$  est premier, on ne peut avoir que  $p = 0$  ou  $p = 1$ , ce qui donne, pour  $p = 0$ ,

$$A_n = 1,$$

pour  $p = 1$ ,

$$A_1 = -1$$

et

$$f'_n(x) = x^n - x + A_0.$$

Autre solution par M. L. POLI.

#### 2244.

(1915, p. 143.)

*Étant donné un parallélépipède à base carrée et le cylindre circulaire droit qui lui est circonscrit, on considère le solide que l'on obtient en unissant la base inférieure de l'un à la base supérieure de l'autre au moyen de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur le contour de chacune de ces bases et dont le prolongement rencontre l'axe commun des deux solides donnés. Évaluer le volume du solide ainsi engendré en fonction du côté  $c$  de la base du parallélépipède et de sa hauteur  $h$ . On calculera le coefficient numérique qui entre dans cette expres-*





plan H'. On a immédiatement

$$\frac{bm}{ba} = \frac{b'm'}{b'a'} = \frac{\beta'\mu'}{\beta'a'},$$

ou, si l'on pose  $Om = \rho$ ,

$$\frac{\rho - \frac{c}{2 \cos \omega}}{\frac{c}{\sqrt{2}} - \frac{c}{2 \cos \omega}} = \frac{z}{h},$$

c'est-à-dire

$$\rho = \frac{c}{2h} \left( \frac{h-z}{\cos \omega} + z\sqrt{2} \right),$$

équation de la forme  $\rho = \frac{A}{\cos \omega} + B$  qui, en coordonnées polaires définit une *conchoïde de Nicomède* (conformément à l'énoncé de la question **2243**, résolue, 1916, p 441). On en déduit, pour l'aire du secteur de la courbe compris entre  $Oz$  et  $Oa$ ,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\omega} \rho^2 d\omega = \frac{c^2}{8h^2} \left[ (h-z)^2 \operatorname{tang} \omega + 2\sqrt{2}z(h-z) \ln \times \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) + 2z^2\omega \right],$$

$\ln$  désignant un *logarithme népérien*.

Faisant  $\omega = \frac{\pi}{4}$  et multipliant par 8, on a pour l'aire totale S de la section du solide par le plan H',

$$S = \frac{c^2}{h^2} \left[ \left( 1 - 2\sqrt{2}\lambda + \frac{\pi}{2} \right) z^2 + 2(\sqrt{2}\lambda - 1)hz + h^2 \right],$$

où l'on a posé

$$\lambda = \ln \operatorname{tang} \frac{3\pi}{8} = 0,88136.$$

Il vient ensuite, pour le volume demandé,

$$V = \int_0^h S dz = \frac{c^2 h}{3} \left( 1 + \sqrt{2}\lambda + \frac{\pi}{2} \right),$$

ou, en remplaçant  $\lambda$  et  $\pi$  par leurs valeurs,

$$V = 1,2724 c^2 h.$$

La demi-somme des volumes du parallélépipède et du cylindre est

$$V' = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) c^2 h = 1,2854 c^2 h.$$

En prenant la valeur  $V'$  au lieu de  $V$  on commettrait donc, par excès, une erreur relative de

$$\frac{1,2854 - 1,2724}{1,2724} = 0,013.$$

### 2306 et 2307.

(1917, p. 79.)

2306. Soient OA et OB deux tangentes rectangulaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements ( $H_3$ ). Une conique quelconque qui touche OA et OB a, avec ( $H_3$ ), quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour foyer le symétrique de O par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à ( $H_3$ ) issue de O.

F. BALITRAND.

2307. On considère une conique quelconque tangente en un point O à une hypocycloïde à trois rebroussements ( $H_3$ ). Elle a, avec ( $H_3$ ), quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour foyer le symétrique de O par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à ( $H_3$ ) issue de O.

F. BALITRAND.

#### SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Ces questions sont des cas particuliers de la proposition suivante :

Soient OA et OB deux tangentes quelconques d'une hypocycloïde à trois rebroussements ( $H_3$ ). Une conique quelconque qui touche OA et OB a, avec ( $H_3$ ), quatre autres tangentes communes. La parabole qui les touche a pour

foyer le symétrique de O par rapport au centre de la conique et son axe est parallèle à la tangente à  $(H_3)$  issue de O.

En effet soient OA et OB les axes,

$$(H_3) \equiv w(u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) + uv(\alpha u + \beta v),$$

la conique considérée sera

$$(\Gamma) \equiv uv + w(Au + Bv + Cw) = 0.$$

Les tangentes communes à  $(H_3)$  et  $(\Gamma)$  autres que OB, OA, touchent la parabole

$$(\pi) \equiv (u^2 + v^2 - 2uv \cos \theta) - (\alpha u + \beta v)(Au + Bv + Cw) = 0.$$

$(\pi)$  a pour foyer le point

$$Au + Bv + Cw = 0;$$

le point à l'infini sur son axe est

$$\alpha u + \beta v = 0;$$

$(c)$  a pour centre le point

$$Au + Bv + 2Cw = 0,$$

et le point à l'infini sur la troisième tangente à  $(H_3)$  issue de O est

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

La proposition est démontrée.

Autres solutions, de MM. M.-F. EGAN et J. LEMAIRE.

### 2308.

(1917, p. 79.)

Soient M un point d'une hypocycloïde à trois rebroussements  $H_3$  et O le centre de son cercle tritangent. On mène à la courbe la tangente MT issue de M et l'on joint MO. Démontrer que les angles  $\theta$  et  $\omega$ , que font avec la tangente en M les droites MT et MO, sont liés par la relation

$$\text{tang } \theta = 3 \text{ tang } \omega.$$

F. BALITRAND.

## SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

Un cercle (C) de rayon  $a$  roule dans un cercle (D) de centre O et de rayon  $3a$ . Soient B le point de contact des deux cercles, A le point de (C) opposé à B, M le point correspondant de  $(H_3)$ . AM est la tangente à  $(H_3)$  en M. Abaissons la perpendiculaire OR sur AM.

On démontre sans peine que la tangente à  $(H_3)$  issue de M est parallèle à OAB, donc  $\theta = \text{OAR}$ .

D'autre part, les triangles OAR, BAM sont semblables, donc

$$\text{AM} = 2\text{AR}, \quad \text{RM} = 3\text{AR},$$

d'où

$$\text{tang } \theta = \text{OR} : \text{AR} = 3 \text{OR} : \text{RM} = 3 \text{ tang } \omega.$$

C. Q. F. D.

Autres solutions, de MM. R. BOUVAIST, R. GOORMAGHTIGH, J. LEMAIRE et M. FAUCHEUX.

## 2309.

( 1917, p. 80.)

*D'un point P on mène à une hypocycloïde à trois rebroussements les trois tangentes dont les points de contact sont A, B, C. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle PAB, par exemple, admet pour tangente en P la conjuguée harmonique de PC par rapport à PA et PB.*

F. BALITRAND.

## SOLUTION

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Les tangentes PA, PB, PC sont les hauteurs d'un triangle  $\alpha\beta\gamma$  qui a l'hypocycloïde donnée pour hypocycloïde de Steiner, et les longueurs PA, PB, PC sont respectivement égales aux hauteurs de ce triangle. On déduit de là, en considérant une inversion de centre P, qu'une parallèle à la tangente en P au cercle PAB détermine sur PA et PB des segments PA', PB' proportionnels à  $\beta\gamma$  et  $\alpha\gamma$ , donc inversement proportionnels aux sinus des angles de PC avec PA et PB. Par conséquent, le milieu de A'B' appartient à PC; il en résulte que la tan-

gente en P au cercle PAB est la conjuguée harmonique de PC par rapport à PA et PB.

Autres solutions, de MM. R. BOUVAIST, M.-F. EGAN et J. LEMAIRE.

**2310.**

(1917, p. 80)

*On considère une tangente fixe d'une hypocycloïde à trois rebroussements ( $H_3$ ). Démontrer que les couples de tangentes rectangulaires à l'hypocycloïde déterminent sur cette tangente fixe des segments qui ont tous même point milieu.*

F. BALITRAND.

## SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Pour la démonstration demandée, il y aura avantage à se reporter tout d'abord à la solution de la question 2311, dont l'énoncé 2310 devient manifestement un corollaire.

En effet, adoptant les notations de la réponse 2311, soient OEA une tangente fixe à ( $H_3$ ); PIC, PJD deux autres tangentes rectangulaires rencontrant OEA en C' et D'. OA étant une corde de l'hyperbole équilatère de centre P et d'asymptotes PC, PD, on sait que le milieu E de OA est aussi le milieu de C'D'.

Si deux autres tangentes rectangulaires partent d'un autre point P' du cercle (K), les deux nouveaux points C'', D'' déterminés sur OA auront encore leur milieu en E.

Plus simplement, mais toujours d'après la description des hyperboles du n° 2311, toutes ces courbes admettront pour cordes communes OA, OB, AB, dont les milieux I, J, L sont aussi les milieux des segments de ces cordes compris entre les asymptotes de toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle OAB.

Autres solutions, de MM. R. BOUVAIST, M.-F. EGAN, R. GOORMAGHTIGH et J. LEMAIRE.

**2311.**

(1917, p. 80)

*Soient OA et OP, PC et PD deux couples de tangentes rectangulaires d'une hypocycloïde à trois rebroussements ( $H_3$ ); A et B, C et D étant les points de contact de ces tan-*

*gentes : démontrer qu'il existe une hyperbole équilatère circonscrite au triangle OAB et ayant pour asymptotes les droites PC et PD.*

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette proposition paraît pouvoir être formulée d'une autre manière.

Soient (K) un cercle donné (1), qui sera tritangent à  $(H_3)$ ; MY la tangente en M à ce cercle; O un point du même cercle; ME l'arc moitié de MO et pris de l'autre côté du diamètre MX du cercle et de  $(H_3)$ .

On sait que la corde OE est tangente à  $(H_3)$  en un point A symétrique de O par rapport à E.

Soit EKF le diamètre mené par E. La corde OF sera tangente à  $(H_3)$  au point B symétrique de O par rapport à F. AB est, par construction, parallèle à EF et double de EF.

Soient P un autre point pris sur le cercle (K) et MJ l'arc moitié de MP. La corde PI sera tangente à  $(H_3)$  au point C symétrique de P par rapport à I, et la corde PJ perpendiculaire à PI sera tangente à  $(H_3)$  au point D symétrique de P par rapport à J.

Il reste à construire l'hyperbole équilatère de centre P, d'asymptotes PC, PD et circonscrite au triangle OAB rectangle en O.

Cette construction est possible, car le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle OAB est le cercle d'Euler, ici le cercle EMOF qui passe au point P.

Autres solutions (comme à 2310).

---