C. Clapier

Sur la détermination des surfaces minima

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 169-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__169_0>

[$O^1 6h$]

SUR LA DÉTERMINATION DES SURFACES MINIMA;

PAR M. C. CLAPIER.

D'après les formules de Monge, une surface minima peut être déterminée comme lieu des milieux des cordes qui s'appuient sur deux lignes de longueur nulle. Celles-ci doivent satisfaire à la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

que l'on peut écrire

$$(dx + i\,dz)(dx - i\,dz) = -dy^2.$$

Nous pouvons poser

$$\frac{dx + i\,dz}{-dy} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{dx - i\,dz}{dy} = \cot\frac{\varphi}{2},$$

d'où l'on déduit, en introduisant une fonction arbitraire qui caractérise la ligne isotrope,

$$\frac{dx}{1 - \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{dy}{2\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} = \frac{dz}{i\left(1 + \operatorname{tang}^2\frac{\varphi}{2}\right)} = \mathcal{F}(\varphi)\,d\varphi$$

et, par suite, avec une nouvelle fonction de φ,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\,\mathcal{F}(\varphi)\,d\varphi,\\ dy &= \sin\varphi\,\mathcal{F}(\varphi)\,d\varphi,\\ dz &= i\,\mathcal{F}(\varphi)\,d\varphi. \end{aligned}\right.$$

On aurait une deuxième ligne isotrope, en posant

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \cos\Psi\,\mathcal{F}_1(\Psi)\,d\Psi,\\ dy &= \sin\Psi\,\mathcal{F}_1(\Psi)\,d\Psi,\\ dz &= -i\,\mathcal{F}_1(\Psi)\,d\Psi. \end{aligned}\right.$$

Soient M_a et M_b deux points quelconques pris respectivement sur ces deux lignes isotropes, la surface minima (M) est déterminée par

$$(3) \quad x = \frac{x_a + x_b}{2}, \qquad y = \frac{y_a + y_b}{2}, \qquad z = \frac{z_a + z_b}{2},$$

formules qui contiennent deux fonctions arbitraires $\mathfrak{F}(\varphi)$ et $\mathfrak{F}_1(\Psi)$.

On aura des points réels, en prenant ces deux fonctions imaginaires conjuguées, ainsi que les paramètres φ et Ψ.

Les quadratures peuvent s'effectuer, dans le cas où chacune des fonctions est la somme de la dérivée première et de la dérivée troisième d'une autre fonction

$$\mathfrak{F}(\varphi) = F'(\varphi) + F'''(\varphi), \qquad \mathfrak{F}_1(\psi) = f'(\psi) + f'''(\psi);$$

on obtient alors, sous forme explicite,

$$(A) \qquad \begin{cases} x_a = F' \sin\varphi + F'' \cos\varphi, \\ y_a = -F' \cos\varphi + F'' \sin\varphi, \\ z_a = i(F + F''); \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} x_b = f' \sin\psi + f'' \cos\psi, \\ y_b = -f' \cos\psi + f'' \sin\psi, \\ z_b = -i(f + f''). \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les égalités (3), on a les formules trouvées par Ribaucour, en considérant une surface minima comme la surface moyenne d'une congruence isotrope. Nous donnerons une démonstration géométrique de ces formules et la signification géométrique de l'angle φ.

Nous avons, pour l'élément linéaire de la surface minima (3),

$$ds^2 = \frac{(dx_a + dx_b)^2}{4} + \frac{(dy_a + dy_b)^2}{4} + \frac{(dz_a + dz_b)^2}{4},$$

$$ds^2 = \frac{1}{2}(dx_a\, dx_b + dy_a\, dy_b + dz_\alpha\, dz_b),$$

et les formules (1) et (2) nous donnent

$$ds^2 = \frac{1 + \cos(\varphi - \Psi)}{2} \mathfrak{F}(\varphi)\, \mathfrak{F}_1(\Psi)\, d\gamma\, d\Psi;$$

nous avons, avec les lignes isotropes (A) et (B),

$$(4) \qquad ds^2 = (F' + F''')(f' + f''') \cos^2 \frac{\varphi - \Psi}{2} d\varphi\, d\Psi.$$

Cherchons la représentation sphérique de la surface (M). Il est évident que par le point M passe deux lignes de longueur nulle dont les tangentes sont parallèles aux tangentes aux points M_a et M_b des lignes isotropes (A) et (B). De sorte que les cosinus directeurs (c, c', c'') de la normale doivent vérifier les conditions

$$c \cos\varphi + c' \sin\varphi + ic'' = 0,$$
$$c \cos\Psi + c' \sin\Psi - ic'' = 0.$$

On en déduit

$$\frac{c}{-\sin\frac{\varphi + \Psi}{2}} = \frac{c'}{\cos\frac{\varphi + \Psi}{2}} = \frac{c''}{i \sin\frac{\varphi - \Psi}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\varphi - \Psi}{2}}$$

et, pour l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$(5) \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi - \Psi}{2}} d\varphi\, d\Psi.$$

Remarque. — Plaçons-nous dans le cas des surfaces réelles. Les fonctions F et f étant imaginaires conjuguées, nous poserons

$$\varphi = \alpha + i\beta, \qquad \Psi = \alpha - i\beta.$$

Déterminons un point de la sphère-unité par sa longitude v et sa colatitude u,

$$c = \sin u \cos v = \frac{-\sin\alpha}{\cos i\beta},$$

$$c' = \sin u \sin v = \frac{\cos\alpha}{\cos i\beta},$$

$$c'' = \cos u = i \operatorname{tang} i\beta.$$

On en déduit

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + v, \qquad -\beta = \log\cot\frac{u}{2}, \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{\cos^2 i\beta}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Ce sont les formules qui permettent de faire une projection géographique de la sphère par le système de Mercator.

A toute représentation géographique de la sphère correspond un système de formules qui définissent les surfaces minima.

Ainsi la représentation par projection stéréographique nous donne la formule bien connue de Weierstrass.

Le problème de la détermination des surfaces minima est lié à celui des Cartes géographiques, c'est-à-dire à celui de la détermination des systèmes isothermes de la sphère.

Si dans les formules de Ribaucour, appliquées aux surfaces minima réelles, on change F en iF et f en $-if$, on obtient une surface minima (M′) conjuguée de (M).

Lignes de courbure. — Les formules (4) et (5) nous permettent d'obtenir le rayon de courbure principal R. Nous avons

$$ds^2 = R^2 d\sigma^2, \qquad R^2 = (F' + F''')(f' + f''')\cos^4\frac{\varphi - \psi}{2}.$$

De plus on a, pour deux directions conjuguées,

$$dx\,\delta c + dy\,\delta c' + dz\,\delta c'' = 0,$$

ou bien, d'après les formules (1) et (2),

$$\begin{gathered}(\cos\varphi\,\delta c + \sin\varphi\,\delta c' + i\,\delta c'')\,\mathfrak{F}\,d\varphi \\ + (\cos\Psi\,\delta c + \sin\Psi\,\delta c' - i\,\delta c'')\,\mathfrak{F}_1\,d\Psi = 0.\end{gathered}$$

En différentiant les relations qui expriment que la normale est perpendiculaire aux deux lignes isotropes qui passent en M,

$$\begin{aligned}\cos\varphi\;\delta c + \sin\varphi\;\delta c' + i\,\delta c'' &= (c\sin\varphi - c'\cos\varphi)\,\delta\varphi,\\ \cos\Psi\,\delta c + \sin\Psi\,dc' - i\,\delta c'' &= (c\sin\Psi - c'\cos\Psi)\,\delta\Psi.\end{aligned}$$

Et comme on a aussi

$$c(\sin\varphi - \sin\Psi) = c'(\cos\varphi - \cos\Phi),$$

on a, pour l'équation de directions conjuguées,

$$(6)\qquad (F' + F''')\,d\varphi\,\delta\varphi + (f' + f''')\,d\Psi\,\delta\Psi = 0.$$

Il en résulte pour celle des lignes asymptotiques

$$\sqrt{F' + F''}\,d\varphi \pm i\sqrt{f' + f'''}\,d\Psi = 0;$$

et pour l'équation différentielle des lignes de courbure,

$$(7)\qquad \sqrt{F' + F'''}\,d\varphi \pm \sqrt{f' + f'''}\,d\Psi = 0.$$

Ces lignes seront algébriques, si $\int d\varphi\,\sqrt{F' + F'''}$ est une expression algébrique.

Démonstration géométrique. — Une ligne isotrope (A) peut être considérée comme l'arête de rebroussement d'une développable isotrope. Celle-ci jouit des propriétés suivantes :

1° Ses plans tangents sont parallèles à leur perpendiculaire; 2° ses génératrices rectilignes, lignes de longueur nulle, sont normales à la surface. Il en résulte que toute ligne tracée sur la surface est ligne de courbure, admettant pour développée l'arête de rebroussement.

Désignons par (A_1) la trace de développable sur le plan des xy et par (a) la développée de cette courbe. La normale à la surface en un point A_1 de cette courbe plane, envisagée comme ligne de courbure, n'est autre que la génératrice $\overline{A_1 A}$; elle a une enveloppe qui n'est autre que l'arête de rebroussement; le point de contact A doit être situé sur la droite polaire menée par le point a, perpendiculaire au plan des xy.

Il en résulte que la développée (a) de la trace (A_1) de la développable est la projection de l'arête de rebroussement (A) sur le plan des xy. Si l'on prend une deuxième arête rebroussement (B), on voit que le milieu M de $\overline{AB}$ se projette au milieu de $\overline{ab}$.

Si les tangentes aux points correspondants des traces (A_1) et (B_1), sur le plan des $x\varphi$, ont pour équation

$$x\cos\varphi + \varphi\sin\varphi = F(\varphi),$$
$$x\cos\Psi + \varphi\sin\Psi = f(\Psi).$$

On en déduit les deux premières formules de Ribaucour.

La droite $\overline{A_1 A}$ est une droite isotrope qui va passer par un point I du cercle imaginaire de l'infini; elle se projette suivant $A_1 a$. De même $\overline{B_1 B}$ est une droite isotrope qui va passer par un point J du cercle imaginaire; et nous avons

$$\overline{Aa} = z_a = \quad i R_a, \qquad \overline{A_1 a} = R_a,$$
$$\overline{Bb} = z_b = -i R_b, \qquad \overline{B_1 b} = R_b;$$

R_a et R_b sont les rayons de courbure de (A_1) et (B_1).

On a donc par le point M, milieu de AB,

$$z = \frac{z_a + z_b}{2} = i\frac{R_a - R_b}{2},$$

et comme

$$R_a = F + F'', \qquad R_b = f + f'',$$

nous retrouvons la troisième formule de Ribaucour. L'angle φ est l'angle de la normale $\overline{A_1 a}$ avec l'axe des x; c'est aussi l'angle de la normale à la développée avec l'axe des φ.

Si l'on suppose les arêtes de rebroussement (A) et (B) confondues, on a une développable double à laquelle correspond une surface minima qui admet la développée double (a) comme ligne géodésique.

S étant l'axe de cette géodésique, son rayon de courbure $R_1 = \frac{ds}{d\varphi}$, et comme (A) est une développable de (a), $ds = d\mathrm{R}a$; donc

$$R_1 = \frac{dR_a}{d\varphi} = F' + F'''.$$

De sorte que l'on a, pour la surface minima correspondante,

$$x = \frac{x_\varphi + x_{\varphi_1}}{2}, \qquad y = \frac{y_\varphi + y_{\varphi_1}}{2}, \qquad z = i\frac{S_a - S_b}{2},$$

φ et φ_1 étant les paramètres de deux points de la géodésique.

D'après la formule (4), l'élément linéaire

$$dS^2 = R_1^2 \cos^2\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\, d\varphi\, d\varphi_1$$

et la formule (7) nous donne pour l'équation des lignes de courbure

$$\sqrt{R_1}\,d\varphi \pm \sqrt{R_1}\,d\varphi_1 = 0.$$

Exemple. — Déterminons la surface minima qui admet comme géodésique la première podaire négative d'une parabole. Nous avons, en désignant par ρ le rayon vecteur de la parabole et φ l'angle polaire,

$$\rho = \frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}, \qquad R_1 = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{\frac{3}{2}a}{\cos^4\frac{\varphi}{2}},$$

$$\int \sqrt{R_1}\,d\varphi = a_1 \int \frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = a_1 \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}.$$

Les lignes de courbure et les lignes asymptotiques sont algébriques.

La surface est elle-même algébrique. Ses lignes de courbure étant déterminées par la relation

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \pm \operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = \text{const.},$$

celle-ci s'écrit avec les paramètres des formules de Weierstrass :

$$u \pm u_1 = \text{const.} \qquad (u = \alpha - i\beta,\ u_1 = \alpha + i\beta).$$

La surface envisagée n'est autre que la surface d'Enneper; elle correspond à

$$\left\{\begin{aligned} x &= \alpha + \alpha\beta^2 - \frac{\alpha^3}{3}, \\ z &= \beta + \alpha^2\beta - \frac{\beta^3}{3}, \\ y &= \alpha^2 - \beta^2. \end{aligned}\right. \quad (^1)$$

---

(1) *Voir* ma Thèse : *Sur les surfaces minima ou elassoïdes* (Gauthier-Villars, 1919).