MALGOUZOU

Le théorème de Feuerbach dans les cubiques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 210-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__210_0>

[$M^1 5g$]

LE THÉORÈME DE FEUERBACH DANS LES CUBIQUES;

Par M. MALGOUZOU,
Enseigne de vaisseau.

Soit (U) une cubique quelconque.

Il existe trois cubiques (U_1), (U_2), (U_3) dont (U) est la hessienne. J'appellerai ces cubiques les *antihessiennes* de (U). A chaque antihessienne correspond un des trois modes de correspondance des points de (U). Dans tout ce qui suivra, je ne considérerai qu'un seul mode de correspondance, par exemple celui relatif à l'antihessienne (U_1).

Soit Δ une droite quelconque coupant (U) aux points a, b, c, et admettant pour pôles relativement à (U_1) les quatres points P, Q, R, S. Les trois centres A, B, C du quadrangle PQRS appartiennent à (U) et sont respectivement les correspondants de a, b, c.

a B et C; b C et A; c A et B sont en ligne droite.

Il existe une conique tritangente à (U) aux points A, B, C. Cette conique est la poloconique de Δ relativement à (U_1); cette conique sera dite *associée* à Δ.

Considérons la transformation quadratique (T) admettant le triangle A B C comme triangle fondamental et les points P, Q, R, S pour points doubles:

Par la transformation (T), la cubique (U) se transforme en elle-même. Deux points correspondants de (U) sont deux points conjugués de cette transformation.

Toute conique (S), circonscrite au triangle A B C, coupe la cubique (U) en trois autres points A′ B′ C′ qui sont aussi les points de contact d'une conique tritangente à (U).

Soient a', b', c' les correspondants respectifs de A′ B′ C′, ils appartiennent à une même droite Δ' transformée de (S) dans la transformation (T).

A tout système de deux droites Δ et Δ' correspond une conique (S).

Cercle d'Euler dans les cubiques. — Le lieu des points tels que leur conique polaire relativement à (U_1) soit une hyperbole équilatère est une droite.

Prenons cette droite pour droite (Δ) et la droite de l'infini pour droite (Δ'). Je dis que la conique (S) relative à ce système de deux droites est un cercle.

En effet, dans le cas considéré, le groupe de points P, Q, R, S forme un groupe orthocentrique. La transformation (T) devient une transformation isogonale. La conique (S), transformée de la droite de l'infini, est par suite le cercle circonscrit au triangle A B C.

J'appelle ce cercle *cercle d'Euler* par analogie avec le cas du triangle où la cubique (U) se réduit à trois droites. Aux points A, B, C correspondent les pieds des hauteurs; aux points A′, B′, C′, les milieux des côtés du triangle.

Cercles tritangents à une cubique. — Pour abréger, je dirai *tritangente* pour conique tritangente.

La condition pour qu'une tritangente (Γ) passe par un point donné I est que la droite Δ associée à cette tritangente reste tangente à la conique polaire de I relativement à (U_1).

En effet, la tritangente de Δ est la poloconique de Δ relativement à (U_1). Considérons deux tangentes (t) et

(t') à la tritangente (Γ) ; soient m et m' les pôles de ces droites relativement à (U_1) qui se trouvent sur Δ. Quand (t) et (t') viennent coïncider, il en est de même de m et m'. La conique polaire du point d'intersection de (t) et (t') contient m et m'. Donc la conique polaire d'un point I de (Γ) est tangente à la droite associée à (Γ) et le point de contact est un des pôles de la tangente en (I) à (Γ).

Par deux points donnés I et J passent quatre tritangentes. — Les droites associées à ces tritangentes sont les quatre tangentes communes aux coniques polaires de I et J relativement à (U_1).

Par mode de correspondance, il existe quatre cercles tritangents à une cubique.

Il suffit de prendre pour points I et J les points cycliques.

Le cercle d'Euler est tangent aux quatre cercles tritangents. — Les triangles ABC et A'B'C' envisagés plus haut étant inscrits à la conique (S) sont circonscrits à une même conique (Σ). Les droites Δ et Δ' sont également tangentes à (Σ).

Prenons pour Δ' la droite de l'infini et pour Δ une droite quelconque. Les coniques Σ sont des paraboles.

Le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle A'B'C', autrement dit le cercle d'Euler.

Considérons maintenant le cercle (s) circonscrit au triangle ABC (Δ quelconque). Il contient le foyer de la parabole (Σ).

Ce cercle coupe la cubique (U) en trois autres points A_1, B_1, C_1. Il existe une parabole (Σ_1) inscrite au triangle $A_1B_1C_1$. Les foyers des paraboles (Σ) et (Σ_1)

sont les deux intersections ψ et ψ_1 du cercle d'Euler et du cercle (s). Si (S) est un cercle tritangent à (U), les paraboles (Σ) et (Σ_1) se confondent; il en est de même de ψ et de ψ_1. Le théorème, extension de celui de Feuerbach, est donc démontré.