

J. SER

Groupes de points sur l'hyperbole équilatère

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19 (1919), p. 220-228

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__220_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[L'11 a]

GROUPES DE POINTS SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE (1);

PAR M. J. SER.

Tout en gardant les notations de M. Appell, je supprimerai les indices pour les sommets A, B, C, D du premier quadrilatère Q en désignant par A₁, B₁, C₁, D₁ les sommets du quadrilatère Q₁ formé des orthocentres des quatre triangles de Q, et par A_n, B_n, C_n, D_n les sommets du quadrilatère Q_n obtenu en répétant n fois la même opération.

Je désignerai par x_n, y_n, les coordonnées d'un sommet de Q_n en mettant, s'il y a lieu, l'un des indices a_n, b_n, c_n, d_n, pour le sommet correspondant.

I. A. Définissons un point auxiliaire μ par ses coordonnées

$$(1) \quad \xi = x_a x_b x_c x_d, \quad \tau_1 = y_a y_b y_c y_d.$$

En vertu de la relation rappelée par M. Appell,

$$(2) \quad x_a x_b x_c x_d = -1,$$

nous avons l'égalité fondamentale

$$x_1 \xi = -x,$$

et par suite

$$\Pi x_1 \xi = \Pi(-x),$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 = \xi^{(3)}$$

(1) Exercice proposé par M. P. Appell (*N. A.*, 1918, p. 41).

et d'une manière générale

$$(3) \quad \xi_n = \xi^{(-3)^n}.$$

Étudions au moyen de ces formules la variation du point μ_n , et comme conséquence celle des points A_n , B_n , C_n , D_n . Il y a deux cas à distinguer.

1° Les sommets de Q situés sur une même branche de l'hyperbole sont en nombre pair, le quadrilatère Q est convexe.

ξ et η sont positifs et ξ_1 et η_1 le sont aussi; les points μ_n sont donc sur la branche positive.

Si nous supposons à l'origine $\xi > 1$ le point μ est au-dessous de la bissectrice $x = y$; mais comme ξ_1 est alors < 1 , le point μ_1 est au-dessus. Les points μ_n sont alors alternativement des deux côtés de la bissectrice; ils s'éloignent de plus en plus à l'infini dans la direction de Ox pour les indices pairs, dans celle de Oy pour les indices impairs. Nous avons, en effet,

$$\lim \xi_{2n} = \infty, \quad \lim \xi_{2n+1} = 0.$$

C'est l'inverse si $\xi < 1$.

Voyons comment se comporte un sommet A . Nous avons successivement

$$x_1 \xi = -x, \quad x_2 \xi_1 = -x_1, \quad \dots$$

$$x_n \xi_{n-1} \xi_{n-2} \dots \xi = (-1)^n x,$$

et par suite

$$(4) \quad x_n = (-1)^n x \xi^{-1+(-3)+\dots+(-3)^{n-1}} = (-1)^n x \xi^{\frac{(-3)^n - 1}{4}}.$$

Donc x_n change de signe suivant la parité de n . Les sommets A_n vont d'une branche d'hyperbole à l'autre. En outre, au bout d'un certain nombre d'opérations, x_n est plus grand ou plus petit que 1, suivant le signe de l'exposant de ξ dans la formule (4). Par suite, il passe tantôt au-dessus tantôt au-dessous de la bissec-

trice en s'éloignant à l'infini dans la direction des asymptotes.

2° Si les points situés sur une même branche sont en nombre impair, un des sommets de Q étant alors intérieur au triangle formé par les trois autres, les résultats sont analogues, mais μ_n reste toujours sur la branche négative, et les sommets de même lettre Λ_n restent toujours sur la branche d'hyperbole où ils se trouvaient au début.

On peut étudier la variation du quadrilatère d'une autre manière. Les formules (4) peuvent s'écrire

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{x_{a_n}}{x_a} = \frac{x_{b_n}}{x_b} = \dots = \lambda, \quad \frac{y_{a_n}}{y_a} = \frac{y_{b_n}}{y_b} = \dots = \mu.$$

Elles nous montrent immédiatement que l'on peut passer du quadrilatère Q au quadrilatère Q_n au moyen d'une projection cylindrique dont il est facile de déterminer les conditions.

Supposons d'abord λ et μ positifs. Comme $\lambda\mu = 1$, on peut considérer λ par exemple comme le cosinus d'un angle réel, φ . Par l'axe Ox du plan de Q faisons passer un plan P' faisant avec celui-ci l'angle φ et projetons le quadrilatère Q orthogonalement en Q'. Nous aurons pour les coordonnées d'un point de Q'

$$x' = \lambda x, \quad y' = y.$$

Coupons maintenant le cylindre projetant Q' par un plan passant par Oy', projection de Oy sur P' et faisant avec P' le même angle φ . Soit x_n, y_n les coordonnées d'un point de P'_n , nous aurons

$$x_n = x' = \lambda x, \quad y_n = \frac{1}{\lambda} y' = \mu y.$$

L'ensemble de ces deux formules est bien équivalent aux formules (4 bis).

La construction est analogue, si c'est μ qui est < 1 . Mais si λ est négatif, il y a une modification importante à faire. Après avoir construit le quadrilatère Q_n en partant de la valeur $-\lambda$ au lieu de λ , il faudra prendre le symétrique de celui-ci par rapport à l'origine pour avoir le quadrilatère répondant à la question.

Ce mode de construction nous donne des renseignements importants sur la continuité de la déformation du quadrilatère, mais il y a surtout lieu de signaler la propriété suivante :

La surface du quadrilatère Q ou celle d'un des triangles tel que $A B C$ reste constante, quel que soit n .

Nous avons, en effet, entre les surfaces E , E' et E_n de trois éléments se correspondant dans les plans P , P' et P_n les relations

$$E' = \lambda E, \quad E_n = \mu E' = E.$$

B. Pour qu'un sommet A_n puisse à un moment donné coïncider avec un sommet de même lettre A , il faudra que nous ayons

$$x_n = (-1)^n x \xi^{\frac{(-3)^n - 1}{4}} = x,$$

et dans ce cas tous les sommets du quadrilatère Q_n coïncideront avec les sommets de même lettre de Q .

En posant $\xi = eS$, la condition devient

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{(-3)^n - 1}{4} S \equiv \pi i & \text{pour } n \text{ impair,} \\ \frac{(-3)^n - 1}{4} S \equiv 2\pi i & \text{pour } n \text{ pair,} \end{cases}$$

le signe \equiv indiquant l'égalité à un multiple de $2\pi i$ près

Pour $n = 0$, on voit directement que $\xi = -1$, et la formule (1) montre alors que chacun des quatre sommets de Q est l'orthocentre des trois autres.

Ce cas exclus, à chaque valeur de n correspond un certain nombre de valeurs de S qui sont toutes des *imaginaires pures*. Les quadrilatères correspondants Q sont composés de points imaginaires non conjugués deux à deux. Toutefois, deux de ces points peuvent être réels, mais ils sont alors symétriques par rapport à la bissectrice.

C. D'autre part, rien ne s'oppose à ce qu'un sommet B_n d'un quadrilatère réel Q_n puisse coïncider avec un sommet de lettre différente A. Il suffit que les coordonnées initiales satisfassent à la condition

$$(6) \quad x_{b_n} = x_a = (-1)^n x_b [x_a x_b x_c x_d]^{\frac{(-3)^n - 1}{4}}.$$

Pour qu'un second sommet C_n coïncide en même temps avec un autre sommet de Q, B par exemple, il faut une seconde condition, celle-là indépendante de n et facile à exprimer; on la déduit des formules

$$\frac{x_{a_n}}{x_a} = \frac{x_{b_n}}{x_b} = \dots = \frac{x_a}{x_b} = \frac{x_b}{x_c}.$$

Et, en posant

$$x_a = e^\alpha, \quad x_b = e^\beta, \quad \dots,$$

il vient

$$\alpha - \beta \equiv \beta - \gamma.$$

En particulier, pour que B_n coïncidant avec A, A_n coïncide avec B, il faut $x_b^2 = x_a^2$. Les points A et B doivent être symétriques.

Il peut arriver enfin qu'un troisième sommet D_n puisse en outre coïncider avec C. Il y aura alors en plus

de la condition les égalités

$$\alpha - \beta \equiv \beta - \gamma \equiv \gamma - \delta.$$

Mais, pour qu'il y ait simultanément coïncidence des quatre sommets (les lettres correspondantes étant différentes), il faudrait les conditions

$$\alpha - \beta \equiv \beta - \gamma \equiv \gamma - \delta \equiv \delta - \alpha,$$

dont on déduit immédiatement que la valeur commune à tous les termes devrait être $\frac{\pi i}{2}$; les quadrilatères correspondants ne seraient pas réels.

II. On peut se rendre compte des résultats qui précèdent par la transformation suivante, laquelle, si elle a l'inconvénient de faire correspondre des points imaginaires à des points réels, conduit à une conclusion extrêmement simple.

A tout point M (x, y) du plan P de l'hyperbole, faisons correspondre un point M' (x', y') d'un plan P' par les formules

$$(7) \quad \begin{cases} x' = \frac{x + \gamma}{2} & x = x' + iy', \\ y' = \frac{x - \gamma}{2i} & y = x' - iy'. \end{cases}$$

A l'hyperbole correspond donc un cercle de rayon I.

Remarquons maintenant que, si nous considérons trois points du plan de l'hyperbole, A, B, C, à la droite menée par A perpendiculairement à BC et qui a pour équation

$$(x - x_a)(x_b - x_c) + (y - y_a)(y_b - y_c) = 0,$$

correspond dans le plan du cercle, la droite

$$(8) \quad (x' - x'_a)(x'_b - x'_c) - (y' - y'_a)(y'_b - y'_c) = 0.$$

Elle passe par A' et sa direction est perpendiculaire à la symétrique de B'C' par rapport à O'x'. Si la droite

B'C' fait un angle u' avec $O'x'$, cette droite (8) fait avec cet axe un angle $\frac{\pi}{2} - u'$.

A l'orthocentre du triangle ABC correspond donc un point commun aux trois droites telles que (8). Si les trois points A' B' C' se trouvent sur le cercle, le point en question s'y trouve naturellement aussi, comme on le vérifierait d'ailleurs sans difficulté. Il en résulte que pour déterminer ce point il suffit dans ce cas, de prendre l'intersection du cercle avec une des droites (8).

Soit maintenant Q' le quadrilatère qui correspond au quadrilatère Q de l'hyperbole. Considérons les deux points B'₁ et A'₁ qui correspondent dans le plan P' aux orthocentres des triangles ACD et BCD. Nous les obtiendrons en menant par les points A' et B' respectivement des droites, *parallèles* entre elles puisqu'elles ont comme direction commune celle de la droite perpendiculaire à la symétrique de C'D' par rapport à O'x' et en prenant le second point d'intersection avec le cercle.

Nous remarquons immédiatement que la corde A'₁B'₁ est égale à la corde A'B'; comme il en est de même des cinq autres cordes analogues, nous en déduisons ce résultat remarquable que le quadrilatère Q'₁ est *superposable* à Q. On l'obtient en faisant tourner ce dernier d'un angle θ que nous allons calculer.

Soit u' l'angle de A'B' avec O'x', v' celui de C'D'. L'angle θ est celui de la droite A'₁B'₁ avec A'B' égal à deux fois l'angle A'₁B'A'. Nous avons donc

$$\text{angle de A'B' avec O'x'} = u' + h\pi,$$

$$\text{angle de A}'_1\text{B}'_1 \text{ avec O'x'} = \frac{\pi}{2} - v' + l\pi,$$

$$\text{angle de A}'_1\text{B}'_1 \text{ avec A'B'} = \frac{\pi}{2} - (u' + v') + (l - h)\pi = \frac{\theta}{2},$$

$$\theta = \pi - 2(u' + v') \equiv \pi - S'.$$

Cet angle S' est la somme, comme on le vérifierait facilement, des angles $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$ que font les droites OA' , OB' , OC' , OD' avec $O'x'$. Il a aussi l'interprétation géométrique suivante : Si l'on considère les trois systèmes de droites passant par les quatre points A' , B' , C' , D' , ils ont leurs systèmes de bissectrices parallèles. Soit ω' l'angle que fait l'une d'elles avec $O'x'$, nous avons

$$S' \equiv 2(\alpha' + \epsilon') = 4\omega',$$

le signe \equiv indiquant l'égalité à un multiple de 2π près.

Si maintenant α'_1 désigne l'angle $A'_1 O' x'$, nous avons

$$\alpha'_1 = \alpha' - \theta$$

et par suite

$$\Sigma \alpha'_1 = S'_1 = \Sigma \alpha' - 4\theta = S' = S' + 4(\pi - S').$$

ce qui nous conduit à la relation

$$S'_1 + 3S' = 0,$$

identique à la relation donnée par M. Appell à la page 12 (*loc. cit.*) et équivalente à la relation (3).

On en déduit

$$\alpha'_1 = \alpha' - \pi - S', \quad \dots \quad \alpha'_n = \alpha'_{n-1} + \pi - S'_{n-1}$$

et finalement

$$\alpha'_n = \alpha' + n\pi + S' \frac{(-3)^n - 1}{4}.$$

Pour que les points A'_n et A' coïncident, il faut que les angles correspondants ne diffèrent que de 2π , ce qui nous conduit à une formule identique à la formule (5).

Les raisons de ces équivalences sont évidentes; les formules fondamentales (7) montrent, en effet, que

$$\alpha = i\alpha', \quad \beta = i\beta', \quad \dots \quad S = iS',$$

On interprète donc immédiatement les conditions supplémentaires indépendantes de n trouvées pour que deux ou plusieurs sommets de lettre différente coïncident. Par exemple, l'égalité

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma \quad \text{ou} \quad \alpha' - \beta' = \beta' - \gamma'$$

signifie que les deux côtés AB et BC du quadrilatère Q sont égaux.

III. Je terminerai par une remarque; nous avons examiné la suite des quadrilatères Q_1 et Q'_1 déduits de Q et Q' ; on aurait pu se proposer le problème inverse et étudier les quadrilatères dont Q et Q' peuvent être considérés comme déduits.

Le problème se trouve résolu par les formules trouvées, puisqu'elles s'appliquent sans aucun doute aux valeurs négatives de n .

Il y a lieu, toutefois, de remarquer que, tandis qu'il n'y a qu'un seul quadrilatère Q_1 déduit de Q, il y a trois quadrilatères Q_{-1} . En outre, si Q est réel, un seul des quadrilatères Q_1 est réel, c'est celui qui correspond à la racine réelle de ξ .

Quant aux quadrilatères Q'_{-1} , ils se construiront au moyen de la trisection de l'angle S' ; ils seront réels en même temps que Q' . Mais nous avons déjà fait remarquer qu'il n'y a pas correspondance entre les éléments réels des deux plans P et P'.