

PAUL BOULANGER

**Condition de convergence de trois
droites de Simson**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 22-24

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__22_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K2a]

**CONDITION DE CONVERGENCE DE TROIS DROITES
DE SIMSON ;**

PAR M. PAUL BOULANGER.

La condition pour que les droites de Simson correspondant à trois points M, N, P du cercle circonscrit à un triangle ABC soient concourantes peut être obtenue d'une manière élémentaire.

Désignons par a, m, n, p les angles des rayons OA, OM, ON, OP avec le diamètre Ox du cercle circonscrit, qui est parallèle au côté BC du triangle.

La droite de Simson relative au point M peut être construite ainsi : on prend le symétrique M' de M par rapport à Ox, et l'on mène la parallèle à la droite AM' par le milieu du segment qui va de l'orthocentre H du triangle au point M. D'après cela, la figure formée par les trois droites telles que la droite M μ parallèle à AM', construites pour les trois points M, N, P, est homothétique, par rapport au centre H, de la figure formée par les droites de Simson des points M, N, P.

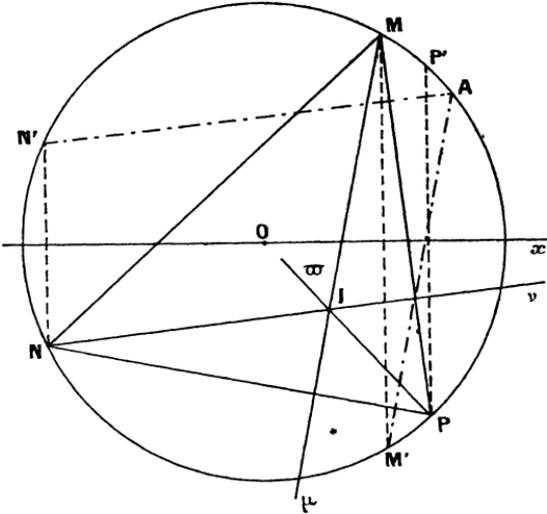
La convergence des deux systèmes de droites aura lieu simultanément.

Or pour les droites M μ , N ν , P π , rattachées au triangle MNP, la convergence s'exprime par la relation

$$\frac{\sin NP\pi}{\sin MP\pi} \frac{\sin PN\nu}{\sin MN\nu} \frac{\sin NM\mu}{\sin PM\mu} = 1.$$

L'angle PN ν , par exemple, formé par NP avec N ν ,

ou avec la parallèle $N'A$, a pour mesure $\frac{1}{2}$ (arc $AP - \text{arc } NN'$), soit $\frac{4\pi + \alpha - p - 2n}{2}$. La condition



précédente s'écrit donc, au groupement près des facteurs,

$$\text{II} \quad \frac{\sin \frac{p + 2n - \alpha}{2}}{\sin \frac{n + 2p - \alpha}{2}} = 1,$$

et elle peut se mettre sous une forme très simple. Posons :

$$m + n + p - \alpha = 2s;$$

nous aurons

$$\text{III} \quad \frac{\sin \left(s + \frac{n - m}{2} \right)}{\sin \left(s + \frac{m - n}{2} \right)} = 1.$$

Soient :

$$n - p = 2\alpha, \quad p - m = 2\beta, \quad m - n = 2\gamma.$$

La relation établie s'écrit encore

$$\prod \sin (s - \alpha) = \prod \sin (s + \alpha)$$

ou, en développant,

$$\sin^2 s \cos s \sum \cot \beta \cot \gamma + \cos^3 s = 0.$$

Comme $\alpha + \beta + \gamma = 0$, on a $\sum \cot \beta \cot \gamma = 1$, et la relation se réduit à

$$\cos s = 0,$$

ou, k étant un entier quelconque,

$$m + n + p - a = 2(k + 1) \pi.$$

C'est cette condition nécessaire et suffisante qu'on se proposait d'indiquer.

Les applications de la formule établie peuvent être nombreuses et sont faciles. Par exemple, considérons le triangle formé par les droites de Simson perpendiculaires aux droites concourantes fournies par les points M, N, P . On sait que ces nouvelles droites correspondent aux points M_1, N_1, P_1 , diamétralement opposés aux points M, N, P ; pour eux, les angles de définition sont :

$$m_1 = m + \pi, \quad n_1 = n + \pi, \quad p_1 = p - \pi.$$

Il s'ensuit que l'on a

$$m_1 + n_1 + p_1 - a = (2k_1 + 1) \pi$$

et que les droites de Simson des points M_1, N_1, P_1 concourent.

Par conséquent, *les droites de Simson des points M, N, P sont les hauteurs du triangle formé par les droites de Simson perpendiculaires à celles-là.* C'est un théorème signalé par M. Vautrin dans le *Journal de Vuibert* (1918, question 8764).