

EGAN

**Sur quelques courbes associées à une
classe d'hélices cylindriques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 241-248

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19_241_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[O, 2]

**SUR QUELQUES COURBES ASSOCIÉES A UNE CLASSE
D'HÉLICES CYLINDRIQUES.**

PAR M. EGAN.

I. — COURBES DE DUPORCQ. (1)

1 Les courbes (planes) de Duporcq sont caractérisées par la propriété suivante : si le point m décrit la courbe avec la vitesse constante v , le pied n sur Ox de la normale parcourt Ox avec la vitesse également constante ev . On peut évidemment supposer la constante e positive.

Considérons le vecteur $O\mu$, issu de l'origine et congruent à nm . La vitesse du point μ se compose de v perpendiculaire à $O\mu$ et de $-ev$ parallèle à Ox . C'est précisément le mouvement newtonien : μ décrit une conique d'excentricité e suivant la loi des aires autour du foyer O de la conique.

L'axe focal de la conique est Oy . Supposons, pour fixer les idées, que le sommet μ_0 , le plus proche de O , se trouve au-dessus de O , et que le vecteur $O\mu$ tourne dans le sens positif autour de O . Soient l le paramètre de la conique et $h = r^2 d\theta : dt$ la constante des aires, r et θ étant les coordonnées polaires de μ ; les composantes de la vitesse de μ sont $h : l$ perpendiculaire à $O\mu$, dans le sens positif de la rotation de $O\mu$, et $-he : l$

(1) DUPORCQ, *N.A.*, 1902, p. 181; MANNHEIM, *Ibid.*, p. 337 et 481; BALITRAND, *Ibid.*, 1914, p. 97.

dans la direction Ox . On a alors la génération suivante des courbes de Duporcq :

Si l'on donne au système newtonien (O, μ) la vitesse uniforme $he : l$ suivant l'axe non focal de l'orbite, le point m (position absolue de μ) décrira une courbe de Duporcq avec la vitesse constante $h : l$.

Remarquons une première conséquence de cette génération. Si s est l'arc de la courbe de Duporcq, on a $ds = hdt : l$, d'où l'expression du rayon de courbure, $R = ds : d\theta = r^2 : l$, trouvée par Duporcq.

2. On dispose encore de la position de l'origine O sur la droite fixe Ox . Fixons-la de façon que les points correspondants μ_0 et m_0 se confondent; alors Oy sera la normale en ce point aux deux courbes (μ) et (m) . Soient ξ, η les coordonnées cartésiennes du point μ se mouvant sur la conique fixe (μ) , et x, y celles de m . On peut écrire dès maintenant les équations des courbes de Duporcq répondant aux trois espèces de coniques (μ) . En effet, si m passe par m_0 au temps $t = 0$, on a

$$x - \xi = eht : l, \quad y = \eta, \quad s = ht : l,$$

$$ht = \int r^2 d\theta = \int \xi d\eta - \eta d\xi.$$

a. Pour $e < 1$, écrivons

$$l = b^2 : a = a(1 - e^2),$$

$$\xi = -b \sin u, \quad \eta = -ae + a \cos u,$$

u s'annulant et croissant avec t . On trouve sans peine

$$(1a) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a^2}{b} (u - e \sin u), \quad x = \frac{a^2}{b} (eu - \sin u), \\ y = a(-e + \cos u). \end{array} \right.$$

b. Pour $e > 1$, posons

$$l = b^2: a = a(e^2 - 1),$$

$$\xi = -b \operatorname{sh} u, \quad \eta = ae - a \operatorname{ch} u;$$

il vient

$$(1b) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a^2}{b} (e \operatorname{sh} u - u), \quad x = \frac{a^2}{b} (\operatorname{sh} u - eu), \\ y = a(e - \operatorname{ch} u). \end{array} \right.$$

Si μ décrit la branche supérieure de l'hyperbole (μ), on peut écrire

$$\xi = -b \operatorname{sh} u, \quad \eta = ae + a \operatorname{ch} u,$$

d'où

$$(1b') \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{a^2}{b} (e \operatorname{sh} u + u), \quad x = \frac{a^2}{b} (\operatorname{sh} u + eu), \\ y = a(e + \operatorname{ch} u). \end{array} \right.$$

c. Pour $e = 1$, écrivons

$$l = 6c, \quad \xi = -6cu, \quad \eta = 3c(1 - u^2),$$

on trouve

$$(1c) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = c(u^3 + 3u), \quad x = c(u^3 - 3u), \\ y = 3c(1 - u^2). \end{array} \right.$$

Dans toutes ces formules, u s'annule en m_0 et croît avec θ . Les courbes sont symétriques autour de l'axe des y . Sur cet axe, (1a) a un seul point double (donné par $u = e \sin u$) si e n'est pas trop petit. Cette courbe est périodique et le point double se répète sur les droites $x = 2m\pi a^2 e : b$. Le point O est entouré d'une boucle. Si e est assez petit, les boucles autour des points congruents de O s'entrecroisent. Les courbes (1b) et (1c) ont chacune un seul point double réel, situé sur Oy, (1b') n'en a aucun.

3. On trouve une seconde génération des trois pre-

mières courbes en prenant u proportionnel au temps. Si par exemple un point λ décrit l'ellipse

$$x = -\frac{a^2}{b} \sin u, \quad y = -ae + a \cos u$$

suivant la loi des aires autour du centre de l'ellipse, tandis que le système se déplace suivant Ox avec la vitesse constante $he : a$, λ décrira la courbe (1a).

II. — UNE CLASSE D'HÉLICES CYLINDRIQUES.

4. C'est à propos d'un article de M. H. Piccioli (N. A., 1902 p. 177), sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe Δ , que Duporcq a été amené à considérer les courbes précédentes.

Soient en effet M un point de l'hélice, N le pied sur Δ de la normale principale en M , α et β les angles constants que font Δ et la tangente à l'hélice avec la direction (verticale) des génératrices du cylindre. La droite MN étant horizontale, les vitesses de M et de N ont même composante verticale, soit V ; leurs composantes horizontales sont donc $V \tan \beta$ et $V \tan \alpha$, et l'on voit que la projection m de M sur un plan de section droite du cylindre décrit une courbe de Duporcq avec $e = \tan \alpha \cot \beta$. On aura donc les équations de ces hélices en posant $s = z \tan \beta + \text{const.}$ dans les quatre formules (1a)-(1c) ci-dessus.

Prenons l'origine O sur Δ et menons comme auparavant le segment $O\mu$ parallèle et égal à MN et nm ; μ décrit la conique newtonienne autour de O , et l'on voit que si l'on donne au système planétaire (O, μ) une vitesse uniforme $he : l \sin \alpha$ dans la direction Δ ($\sin \alpha, 0, \cos \alpha$), μ décrira l'hélice cylindrique d'angle β avec la vitesse constante $h : l \sin \beta$, α et β étant liés

par la relation $\cot \beta = e \cot \alpha$. Les normales principales de l'hélice rencontrent la droite Δ .

5. Voici une propriété intéressante de ces hélices : les tangentes de l'hélice appartiennent à un complexe linéaire dont l'axe est parallèle à Δ .

En effet, l'hélice est une ligne asymptotique du conoïde Σ engendré par ses normales principales; la proposition n'est donc qu'un cas particulier du théorème connu sur les asymptotiques d'un conoïde. Inversement, si une hélice appartient par ses tangentes à un complexe linéaire, les normales principales sont des droites du complexe; comme ces normales sont parallèles à un même plan, elles rencontrent un diamètre Δ du complexe. C'est pourquoi nos formules s'accordent avec celles données par M. Keraval pour les hélices d'un complexe linéaire (1).

6. On connaît trois asymptotiques de Σ , savoir l'hélice, la droite Δ , et la droite à l'infini dans un plan (xy) de section droite. Si donc NM rencontre une asymptotique donnée en M' , le théorème de Serret montre que le rapport anharmonique $(M'MN\infty)$ est constant, c'est-à-dire que $NM' = kNM$. Projetons sur le plan des xy par des droites parallèles à Δ ; les projections des asymptotiques de Σ seront des coniques homothétiques à (μ) par rapport au foyer O .

Supposons que le système newtonien (O, μ) se déplace suivant Δ avec une vitesse uniforme arbitraire; on voit, d'après ce qui précède, que la trajectoire de μ

(1) *N. A.*, 1909, p. 42. M. Keraval prend l'axe du complexe comme axe des z , et il fait remarquer que l'hélice se projette sur le plan des xy suivant une conique.

dans l'espace sera homothétique à l'une des asymptotiques de Σ .

7. Si une hélice appartient à un complexe dont l'axe (soit Ox) est perpendiculaire à l'axe hélicial Oz , la droite Δ est à l'infini et les normales principales font partie d'une congruence singulière. La section droite du cylindre n'est plus une courbe de Duporcq. Soit dans ce cas

$$C = y dz - z dy - a dx = 0$$

l'équation du complexe. L'arc s de la section droite du cylindre étant proportionnel à z , on déduit de cette équation que

$$y ds - s dy = b dx,$$

c'est-à-dire que

$$y - s \sin \Phi = b \cos \Phi,$$

Φ étant l'angle entre Ox et la tangente à la section. Une différentiation donne

$$-s \cos \Phi = -b \sin \Phi;$$

la section du cylindre est donc une chaînette, et l'hélice est donnée par

$$x = bu, \quad y = b \operatorname{ch} u, \quad z = a \operatorname{sh} u.$$

Prenons, sur la normale principale de l'hélice au point M , un point M' tel que la projection de MM' sur Oy ait une valeur fixe c , d'ailleurs quelconque. On vérifie sans peine que la courbe (M') appartient au complexe $C + 2c dz = 0$, cette courbe est donc une asymptotique de la surface Σ engendrée par les normales principales.

III. — COURBES (r) DE MANNHEIM.

8. Mannheim a étudié (*loc. cit.*) les courbes, appelées par lui courbes (r), qui engendrent une courbe de

Duporcq en roulant sur une droite fixe. Si le point m est le pôle d'une courbe (r) roulant sur Ox , le point de contact n de (r) avec Ox est en même temps le pied de la normale à la courbe (m) et le centre instantané du mouvement. Désignons par p la distance perpendiculaire (égale à $\pm y$) du pôle m à la tangente On , et par Φ l'angle que fait cette tangente avec une droite invariablement liée à la courbe mobile (r) . On a

$$d(m) = nm d\Phi,$$

d'où

$$d\Phi = \frac{d(m)}{nm} = \frac{dx}{y}.$$

On trouve ainsi, pour les quatre courbes (1 a) — (1 e)

$$u = -\Phi \sqrt{1-e^2}, \quad u = \mp \Phi \sqrt{e^2-1} \quad u = -\Phi.$$

Comme on a $p = \pm y$, il s'ensuit que les courbes (r) les plus générales sont données par les formules

$$(2 a) \quad p = a \cos(\Phi \sqrt{1-e^2}) - ae \quad (e < 1),$$

$$(2 b) \quad p = a \operatorname{ch}(\Phi \sqrt{e^2-1}) \pm ae \quad (e > 1),$$

$$(2 c) \quad p = a(1 - \varphi^2) \quad (e = 1).$$

La courbe (2 a) est la parallèle à distance ae à l'épicycloïde donnée par

$$p = a \cos(\Phi \sqrt{1-e^2}).$$

(Celle-ci bien est une épicycloïde et non une hypocycloïde, puisque $1 - e^2 < 1$).

La courbe (2 b) est la parallèle à distance $\pm ae$ à l'hypercycloïde (1) donnée par

$$p = a \operatorname{ch}(\Phi \sqrt{e^2-1}).$$

(1) Voir par exemple WIELEITNER, *Spezielle Ebene Kurven*, 1908, p. 211-219. On y trouvera une figure de l'hypercycloïde répondant à $e = \sqrt{2}$ (p. 216).

M. Balitrand a reconnu (*loc. cit.*) le caractère cycloïdal des développées des courbes (r) .

Quant à (2c), considérons un cercle de centre C et sa développante Γ ayant son rebroussement au point A de la circonférence. L'équation (2c) représente la développante de Γ ayant son point de courbure maxima au milieu de CA.

9. Deux courbes (r) nous ont échappé. En effet, l'équation de la conique (μ) peut s'écrire $r = l - ey$. Si l'on pose $y = -p$, on a l'équation $r = ep + l$, ($r = mn$), qui caractérise les courbes (r). Or, si $e \geq 1$, l peut être nul; on a alors une spirale logarithmique ou un cercle, suivant le cas. La roulette est une droite, courbe de Duporcq dégénérée.

10. Une dernière remarque. Si une épicycloïde ou une hypercycloïde (E) roule sur une droite d avec une vitesse angulaire constante, le pôle décrit une conique centrale suivant la loi des aires autour du centre de la conique. Donnons au système une vitesse de translation constante suivant d ; le nouveau mouvement équivaut au roulement d'une courbe parallèle à (E) sur une droite parallèle à d . On retrouve ainsi la seconde génération de la courbe de Duporcq associée à une conique centrale (1, 3).