BERTRAND GAMBIER

Sur l'identité de Bezout

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 284-297
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__284_1>

[A1b]

SUR L'IDENTITÉ DE BEZOUT;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. On sait qu'à deux polynomes entiers en x, A et B, premiers entre eux, des degrés respectifs m et p, on peut adjoindre deux nouveaux polynomes, et deux seulement, U_1 de degré $p-1$ au plus, V_1 de

(1) M. PETROVITCH : *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXVI, 1908, p. 141-150.

degré $m-1$ au plus, tels que l'on ait

$$(1) \qquad AU_1 + BV_1 \equiv 1.$$

Les polynomes les plus généraux U et V satisfaisant à l'identité

$$(2) \qquad AU + BV \equiv 1,$$

dite *identité de Bezout*, ont pour expression générale

$$(3) \qquad \begin{cases} U \equiv U_1 + Bf(x), \\ V \equiv V_1 - Af(x), \end{cases}$$

où f est un polynome arbitraire.

On peut établir ce résultat en prenant pour inconnues les $m+p$ coefficients de U_1 et V_1, qui satisfont à $m+p$ équations linéaires non homogènes, admettant pour déterminant le résultant de A et B supposé non nul; si donc A et B sont donnés explicitement, l'identité (2) est complètement résolue.

Augmentons l'indétermination en donnant non plus A et B, mais simplement les degrés m et p. Nous considérons, en nous en tenant à la méthode précédente, comme paramètres arbitraires les $m+1$ coefficients a de A, les $p+1$ coefficients b de B; les coefficients de U_1 et V_1 s'expriment par des fractions rationnelles des a et b, admettant comme dénominateur le résultant de A et B. On peut adresser à ce procédé plusieurs critiques : d'abord, une fois m et p fixés, il faut, pour calculer U_1 et V_1, résoudre un système de $m+p$ équations, linéaires, il est vrai; on sait que l'expression du résultant est assez compliquée, même pour des valeurs petites des entiers m et p. Deuxièmement, U_1 et V_1 sont de degré égal exactement à $p-1-h$ et $m-1-h$ respectivement où h est un entier indéterminé, positif ou nul : si les a et b sont choisis arbitrairement, h est nul; si l'on annule les termes en x^{p-1}, x^{p-2}, ..., x^{p-h} dans U_1, on obtient h équations de condition entre les $m+p+2$ paramètres a et b, mais la méthode ne donne pas le moyen d'exprimer les coefficients de A, B, U_1, V_1 au moyen du nombre minimum $m+p+2-h$ d'arbitraires. La méthode que je vais proposer évite ces objections et donne l'expression explicite des coefficients de A, B, U_1, V_1 au moyen du nombre minimum d'arbitraires; le résultat est même remarquable de simplicité : tous les coefficients sont des polynomes entiers par rapport aux arbitraires.

2. Je pose donc le problème sous la forme suivante :

Trouver quatre polynomes entiers en x satisfaisant à l'identité

$$AD - BC \equiv 1. \tag{4}$$

La suite justifiera ce changement de notations.

Je rappellerai, en hommage à la mémoire de M. Darboux, que c'est lui qui me suggéra, à la fin de novembre 1916, l'idée fort simple, dont j'ai tiré parti depuis, pour arriver à la solution exposée ici. Remarquons que AD — BC n'est autre chose que le déterminant $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$; connaissant deux solutions (ABCD), (A'B'C'D') de l'identité (4), multiplions les déterminants correspondants; nous avons une troisième solution où les degrés sont plus élevés que dans les deux solutions primitives.

Or, par des calculs presque négligeables, on obtient aisément des solutions en polynomes du premier degré ou constantes; des multiplications, des élévations aux puissances successives donneront donc des solutions de degré de plus en plus élevé. Quelque temps après, pendant une journée calme sur le front de la Somme, en janvier 1917, j'apercevais le véritable parti à tirer de la remarque de M. Darboux, qui inséra mon résultat aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 22 janvier 1917.

3. Je précise cette notion de *composition* de solutions; (ABCD) et (A'B'C'D') étant la première et la deuxième solution, je multiplie les déterminants correspondants par la règle précise

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AA'+CC' & BA'+DC' \\ AB'+CD' & BB'+DD' \end{vmatrix}$$

et j'écrirai schématiquement

$$(6)\qquad (ABCD)(A'B'C'D') = (AA'+CC',\ BA'+DC',\ AB'+CD',\ BB'+DD').$$

J'appelle la solution mise en évidence au second membre de (6) produit de la solution (ABCD) par la solution (A'B'C'D'). Cette multiplication n'est pas commutative; si l'on échange les deux facteurs, au second membre le premier et le quatrième terme restent ce qu'ils sont, mais le second et le troisième se permutent. Étant donné un nombre quelconque de facteurs avec leur ordre, je multiplie le premier par le second, ce produit par le troisième, et ainsi de suite jusqu'à épuisement. On ne peut ni changer l'ordre ni remplacer plusieurs facteurs, consécutifs ou non, par leur produit effectué.

Je désigne par a, b, c, d les degrés respectifs de A, B, C, D. On a $a+d=b+c$ ou encore $c-a=d-b$. Deux hypothèses s'offrent à nous : $c\geqq a$ ou $c\leqq a$. Adoptons la première pour fixer les idées; on a alors $d\geqq b$. C divisé par A donne δ pour quotient, C_1 pour reste, D divisé par B donne δ' pour quotient, D_1 pour reste et j'écris

$$(7) \qquad \begin{cases} C \equiv A\delta + C_1, \\ D \equiv B\delta' + D_1, \end{cases}$$

$$(8) \qquad AD_1 - BC_1 + AB(\delta' - \delta) \equiv 1.$$

Je suppose que a et b soient d'abord, ou tous deux, ou un seul, de degré effectivement supérieur à zéro : alors, si δ' et δ ne sont pas identiques, $AB(\delta' - \delta)$ est au moins de degré $a + b$, tandis que $AD_1 - BC_1$ est au plus de degré $a + b - 1$: $a + b$ n'étant pas nul, il ne pourrait y avoir identité entre les deux membres de (8), donc

$$\delta' \equiv \delta, \qquad AD_1 - BC_1 \equiv 1.$$

Je peux donc écrire simplement

$$(9) \qquad \begin{cases} C \equiv A\delta + C_1, & AD - BC \equiv AD_1 - BC_1 \equiv 1; \\ D \equiv B\delta + D_1, & (ABCD) \equiv (ABC_1D_1)(1\delta 01). \end{cases}$$

J'ai donc ramené, d'une façon unique, pourvu que A et B ne soient pas numériques tous les deux, la solution (ABCD), où le couple (AB) est de degré inférieur au couple (CD), à la solution (ABC_1D_1) que j'appellerai la *solution consécutive*, formée avec le même couple (AB) et un nouveau couple (C_1D_1), de degré inférieur cette fois au couple (AB) : il a suffi pour cela d'une division opérée sur C et A et d'une division opérée sur D et B.

Le résultat est légèrement modifié si $a = b = 0$; la division donnerait en effet

$$\delta = \frac{C}{A}, \qquad \delta' = \frac{D}{B}, \qquad C_1 = 0, \qquad D_1 = 0$$

et

$$AB\left(\frac{D}{B} - \frac{C}{A}\right) \equiv 1.$$

Pour faire rentrer ce cas dans le précédent, je conviens d'écrire soit

$$(10)\quad \begin{cases} C \equiv A\dfrac{C}{A} + 0, & (ABCD) \equiv \left(AB01\,\dfrac{1}{A}\right)\left(1\,\dfrac{C}{A}\,01\right), \\ D \equiv B\dfrac{C}{A} + \dfrac{1}{A}, & C_1 = 0\ D_1 = \dfrac{1}{A}, \quad AD_1 - BC_1 \equiv 1; \end{cases}$$

soit

$$(11)\quad \begin{cases} C \equiv A\dfrac{D}{B} - \dfrac{1}{B}, & (ABCD) \equiv \left(AB\,\dfrac{-1}{B}\,0\right)\left(1\,\dfrac{D}{B}\,01\right), \\ D \equiv B\dfrac{D}{B} + 0, & C_1 = -\dfrac{1}{B}, \quad D_1 = 0, \quad AD_1 - BC_1 \equiv 1, \end{cases}$$

et dans ce cas la solution consécutive peut prendre deux formes et deux seulement.

4. La question est donc dès maintenant virtuellement résolue.

En effet, ou bien l'un des quatre polynomes est numérique : A, par exemple; alors on a la réduction

$$\left(\lambda,\ F(x),\ 0,\ \frac{1}{\lambda}\right)(1,\ f(x),\ 0,\ 1),$$

où λ est une constante arbitraire non nulle, F et f étant deux polynomes arbitraires.

Ou bien aucun des polynomes n'est numérique; dans ce cas, (AB) étant le couple de degré inférieur, j'ai écrit

$$(9')\qquad (ABCD) \equiv (ABC_1D_1)\ (1\delta 01),$$

et pour la même raison la division de A par C_1 et B par D_1 donne

$$(12)\quad \begin{cases} A \equiv C_1\varepsilon + A_1, & AD_1 - BC_1 \equiv A_1D_1 - B_1C_1 \equiv 1, \\ B \equiv D_1\varepsilon + B_1, & (ABC_1D_1) \equiv (A_1B_1C_1D_1)(10\varepsilon 1), \end{cases}$$

dans la formule (9') je peux donc modifier le second membre par la tête et écrire

$$(13)\qquad (ABCD) \equiv (A_1 B_1 C_1 D_1)(1\,0\,\varepsilon\,1)(1\,\delta\,0\,1).$$

Le raisonnement se poursuit donc indéfiniment : par une marche en escalier, le premier ou le second couple sont, alternativement, remplacés par un couple plus simple, l'autre étant conservé. Les opérations à faire sont précisément celles que l'on rencontre dans la théorie du plus grand commun diviseur appliquée à C et A d'une part, D et B de l'autre : les quotients successifs sont les mêmes dans les deux opérations menées parallèlement et l'opération se termine dès que, dans l'une des suites de diviseurs, on obtient un diviseur numérique non nul, chose qui arrive nécessairement puisque A et C d'une part, B et D de l'autre, sont deux polynomes premiers entre eux.

5. Je vais donc écrire sur deux lignes parallèles les diviseurs ou restes successifs de l'opération effectuée sur C, A et sur D, B, et sur une troisième les quotients

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{cccccccccc} C & A & C_1 & A_1 & \ldots & C_{i-1} & A_{i-1} & C_i & A_i & \ldots. \\ D & B & D_1 & B_1 & \ldots & D_{i-1} & B_{i-1} & D_i & B_i & \ldots, \\ & \delta & \varepsilon & \delta_1 & \ldots & \varepsilon_{i-2} & \delta_{i-1} & \varepsilon_{i-1} & \delta_i & \ldots. \end{array}\right.$$

J'écris les identités analogues à (9) et (12) :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} A_{i-1} \equiv C_i\varepsilon_{i-1} + A_i, & A_{i-1}D_i - B_{i-1}C_i \equiv A_iD_i - B_iC_i \equiv 1, \\ B_{i-1} \equiv D_i\varepsilon_{i-1} + B_i, & (A_{i-1}\,B_{i-1}\,C_i\,D_i) \equiv (A_iB_iC_iD_i)(1\,0\,\varepsilon_{i-1}\,1), \\ C_i \equiv A_i\delta_i + C_{i+1}. & A_iD_i - B_iC_i \equiv A_iD_{i+1} - B_iC_{i+1} \equiv 1, \\ D_i \equiv B_i\delta_i + D_{i+1}, & (A_iB_iC_iD_i) \equiv (A_iB_iC_{i+1}D_{i+1})(1\,\delta_i\,0\,1). \end{array}\right.$$

De sorte que les identités (9') ou (13) modifiées de proche en proche toujours par la tête donnent évidemment

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} (ABCD) \equiv (A_iB_iC_iD_i)\,(1\,0\,\varepsilon_{i-1}\,1)\,(1\,\delta_{i-1}\,0\,1)\,\ldots(1\,\delta\,0\,1) \\ \qquad \equiv (A_iB_iC_{i+1}D_{i+1})\,(1\,\delta_i\,0\,1)\,(1\,0\,\varepsilon_{i-1}\,1)\ldots(1\,0\,\varepsilon\,1)\,(1\,\delta\,0\,1). \end{array}\right.$$

Il suffit maintenant d'une discussion sans difficulté pour apercevoir les diverses formes de réduction complète. J'avais eu à opter entre $c \geqq a$ et $a \geqq c$; j'ai adopté $c \geqq a$. En appelant a_i le degré de A_i, b_i, c_i, d_i ceux de B_i, C_i, D_i, on a manifestement

$$a_{i-1} - b_{i-1} = c_i - d_i = a_i - b_i = \ldots;$$

la valeur commune est donc $a - b$ ou $c - d$; j'ai donc à opter encore entre $c - d \geqq 0$ ou $c - d \leqq 0$. Adoptons la première hypothèse : chaque polynome de la première ligne (14) a donc un degré surpassant du nombre constant $(c - d)$ le degré du polynome écrit en-dessous. C'est donc la seconde ligne qui s'arrête la première sur un polynome réduit à une constante numérique non nulle, et j'ai alors encore à opter entre le cas où ce polynome est un D ou un B. J'ai donc au total huit cas à considérer. Adoptons d'abord le cas où D_n est numérique : alors ce que j'ai fait remarquer au n° 3 sur la solution $(A_{n-1}\, B_{n-1}\, C_n\, D_n)$ montre que je peux continuer la division pour A_{n-1}, C_n de façon à terminer la première ligne par le reste numérique $\frac{1}{D_n}$ et la seconde ligne par zéro. J'ai donc, en représentant par λ le nombre $\frac{1}{D_n}$,

$$A_n = \lambda, \qquad B_n = 0, \qquad D_n = \frac{1}{\lambda},$$

Je remplace C_n par le symbole $F(x)$ et j'écris, en appliquant la première formule (16), où $i = n$,

$$(17) \quad (ABCD) = \left(\lambda, 0, F(x), \frac{1}{\lambda}\right) \times (1\,0\,\varepsilon_{n-1}\,1)(1\,\delta_{n-1}\,0\,1)\ldots(1\,0\,\varepsilon\,1)(1\,\delta\,0\,1).$$

Si, au contraire, j'adopte (avec $a \leqq c$, $d \leqq c$) le cas où le polynome numérique non nul de la seconde ligne (14) est un B à savoir B_n, je continue à diviser C_n par A_n et j'obtiens un reste numérique non nul en première ligne; toujours d'après le n° 3, je termine la première ligne par ce reste,

$$C_{n+1} = \frac{-1}{B_n} = \frac{-1}{\lambda},$$

tandis que la deuxième se termine par $D_{n+1} = 0$; j'applique la seconde formule (16) en y faisant $i = n$ et remplaçant A_n par $F(x)$,

$$(18) \qquad (ABCD) = \left(F, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, 0\right) \times (1\delta_n 01)(10\varepsilon_{n-1}1)\ldots(10\varepsilon 1)(1\delta 01).$$

Dans les deux formules (17) ou (18), F est un polynome de degré $c - d$. Si $c > d$, la réduction est possible d'une seule façon; si $c = d$, F est une constante non nulle; on a vu alors que la réduction est possible de deux façons, mais que le changement ne porte que sur les deux premières parenthèses.

Si, conservant l'hypothèse $c \geqq a$, j'adopte $d \geqq c$, c'est la première ligne qui se termine, un rang avant la seconde, par un polynome égal à une constante numérique non nulle; mais, comme précédemment, on pousse l'opération du plus grand commun diviseur jusqu'à sa fin pour la seconde ligne, et l'on a l'une des deux réductions

$$(19) \qquad (ABCD) = \left(0, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, F(x)\right) \times (10\varepsilon_{n-1}1)(1\delta_{n-1}01)\ldots(10\varepsilon 1)(1\delta 01),$$

$$(20) \qquad (ABCD) = \left(\lambda, F(x), 0, \frac{1}{\lambda}\right) \times (1\delta_n 01)(10\varepsilon_{n-1}1)\ldots(10\varepsilon 1)(1\delta 01),$$

suivant que c'est C_n ou A_n qui est la constante numérique non nulle.

Pour achever, il faut donc passer à l'hypothèse $a \geqq c$. Pour pouvoir utiliser ce qui précède, j'écris

$$(21)\quad \begin{cases} A = C\varepsilon' + A' \\ B = D\varepsilon' + B' \end{cases} \qquad (ABCD) = (A'B'CD)(1\,0\,\varepsilon'\,1).$$

Mais alors $(A'B'CD)$ se décompose par l'une des formules (17), (18), (19), (20); pour obtenir (ABCD), il suffira donc d'écrire $(1\,0\,\varepsilon'\,1)$ à la suite de chacun des seconds membres.

6. Je modifie légèrement les notations et j'énonce le résultat suivant : la solution la plus générale de l'identité $AD - BC \equiv 1$ peut être décomposée en l'un des produits suivants :

$$(22)\quad \begin{cases} \left[0, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, F(x)\right][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_2(x), 1]\ldots, \\ \left[\lambda, 0, F(x), \frac{1}{\lambda}\right][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_2(x), 1]\ldots, \\ \left[\lambda, F(x), 0, \frac{1}{\lambda}\right][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_2(x), 0, 1]\ldots, \\ \left[F(x), \lambda, \frac{-1}{\lambda}, 0\right][1, f_1(x), 0, 1][1, 0, \varphi_1(x), 1][1, f_2(x), 0, 1]\ldots. \end{cases}$$

A partir de la seconde, les parenthèses sont alternativement du type $(1, 0, \varphi, 1)$ ou $(1, f, 0, 1)$. Le nombre des parenthèses est fini, bien entendu ; en tenant compte de la parité, les formes (22) sont au nombre de 8, conformement à la discussion.

D'après ce qui a éte dit, le polynome (F) est de degré égal à $|c - d|$, nombre positif ou nul ; si F est numérique, cette valeur numérique n'est pas nulle.

De même, la dernière parenthèse renferme un polynome f ou φ de degré égal à $|c-a|$, nombre positif ou nul; si ce polynome est numérique, cette valeur numérique n'est pas nulle.

Quant aux autres polynomes f et φ ils sont arbitraires, mais de degré au moins égal à l'unité.

Réciproquement, toute expression de la forme (22) étant manifestement composée de facteurs tous solutions de $AD - BC \equiv 1$ donne une solution de cette identité. Si les F, f et φ satisfont aux restrictions qui viennent d'être énoncées, les paramètres arbitraires indépendants sont mis en évidence : ce sont les coefficients de F et des polynomes f, φ.

Les résultats annoncés à la fin du n° **1** sont donc bien justifiés.

Je remarque que si $c > a$ sans égalité, la dernière parenthèse est du type $(1, f, 0, 1)$ et le degré, non nul, du polynome f donne la valeur de $c - a$. La décomposition n'est possible que d'une façon si $c \neq d$; si $c = d$, il y a deux décompositions ne différant que par l'ensemble des deux premières parenthèses. Dans la seconde ou quatrième forme (22), le degré de F donne la valeur commune de $c - d$ ou $a - b$; dans la première et deuxième forme, ce degré donne $d - c$ ou $b - a$.

Si $c < a$ sans égalité, la dernière parenthèse est du type $(1, 0, \varphi, 1)$, le degré de φ donne $a - c$. Ce qui vient d'être dit pour $c \gtrless d$ et F subsiste.

Enfin, si $c = a$, comme les opérations du plus grand commun diviseur pour C et A peuvent se faire soit en divisant C par A, soit en divisant A par C, il y a au début deux routes à choisir, de sorte que si $c = a$ et $c \neq d$, il y a deux réductions possibles, et que, si $c = a = d = b$, il y a au total quatre réductions possibles.

7. J'achève par quelques remarques bien simples : en se plaçant au point de vue de M. Darboux, les solutions particulières de $AD - BC \equiv 1$ sont évidentes quand un des polynomes A, B, C, D est nul; le premier facteur, dans les formules (22), en donne l'expression. On pouvait donc dire qu'il suffisait de multiplier un nombre arbitraire de telles solutions ; les formules (22) ne comprennent, en effet, que des facteurs de ce type, mais avec certaines réserves évidentes.

D'autre part, si, dans les formules (22), on suppose que F ainsi que les φ ou les f sont des polynomes entiers à plusieurs variables, on obtient des solutions de l'identite de Bezout en polynomes à plusieurs variables. Ce cas mériterait d'ailleurs une étude spéciale.

Je traite comme application le problème posé au n° 1 : trouver quatre polynomes A, B, U, V tels que l'on ait $AU + BV \equiv 1$, sachant que le polynome inconnu A est de degré m, et le polynome inconnu B de degré p. J'ai dit qu'il suffit de trouver les solutions de $AU_1 + BV_1 \equiv 1$, où U_1 est de degré inférieur à B et V_1 de degré inférieur à A; en échangeant au besoin A avec B et U_1 avec V_1, on peut supposer le degré de A supérieur à celui de B; je pose $U_1 \equiv D$, $V_1 \equiv -C$ et, d'après ce qui a été dit plus haut, j'aurai soit

$$(23)\quad (ABCD) \equiv \left[F, \lambda, \frac{-1}{\lambda}, 0\right] \times [1, f_1(x), 0, 1]\,[1, 0, \varphi_1(x), 1] \ldots [1, 0, \varphi_n(x), 1],$$

soit

$$(24)\quad (ABCD) \equiv \left[\lambda, 0, F, \frac{1}{\lambda}\right] \times [1, 0, \varphi_1(x), 1]\,[1, f_1(x), 0, 1] \ldots [1, 0, \varphi_n(x), 1].$$

J'appelle h_i le degré de $f_i(x)$, k_i celui de $\varphi_i(x)$.

On trouve aisément dans le premier cas

$$(25)\qquad h_1+k_1+h_2+k_2+\ldots+h_n+k_n=p,$$

et dans le second

$$(26)\qquad k_1+h_1+k_2+h_2+\ldots+k_{n-1}+h_{n-1}+k_n=p.$$

Quant au degré de F, il est égal à $m-p$. Donc, pour obtenir la forme (23), il suffit de trouver $2n$ entiers positifs non nuls dont la somme vaut p; pour obtenir la forme (24), il suffit de trouver $2n-1$ entiers positifs non nuls dont la somme vaut p. (Remarquons qu'ici, avec l'hypothèse précise adoptée, D ou U_1 est de degré inférieur à celui de B et non égal, le degré de φ_n n'est donc pas nul.) Il suffira donc de cataloguer les solutions des équations (25) ou (26). Une telle solution adoptée, quel est le nombre des arbitraires? Les arbitraires sont λ, et les coefficients de F des f et des φ. On trouve donc pour (23) le total

$$1+(m-p+1)+(h_1+1)+(k_1+1)+\ldots+(h_n+1)+(k_n+1)$$

ou

$$m+2+2n,$$

et pour (24) le total

$$1+(m-p+1)+(k_1+1)+(h_1+1)+\ldots+(k_n+1)$$

ou

$$m+2+(2n-1).$$

Comme l'on a $2n\leqq p$ pour (23) et $(2n-1)\leqq p$ pour (24), le nombre d'arbitraires est au plus égal à $m+p+2$, et il ne devient égal à cette limite supérieure que si tous les h et k sont égaux à 1, et alors, si p est pair, on obtient nécessairement la forme (23) avec $n=\frac{p}{2}$, et si p est impair on a la forme (24) avec $n=\frac{p+1}{2}$.

Pour avoir le nombre minimum d'arbitraires, il faut au contraire prendre évidemment la forme (24) avec $n=1$, φ_1 étant de degré p, de sorte que

$$A \equiv \lambda + F\varphi_1, \qquad B \equiv \frac{\varphi_1}{\lambda}, \qquad C \equiv -V_1 \equiv F, \qquad D \equiv \frac{1}{\lambda},$$

on a une solution avec $m+3$ arbitraires.

Si l'on remarque que, avec la forme (23), on peut écrire, en vertu de (25),

$$2n = p-(h_1-1)-(k_1-1)-\ldots-(h_n-1)-(k_n-1),$$

et que, avec la forme (23), on peut écrire de même

$$2n-1 = p-(k_1-1)-(h_1-1)-\ldots-(h_{n-1}-1)-(k_n-1),$$

on voit que, dans tous les cas, la différence entre le nombre d'arbitraires maximum $m+p+2$ et le nombre d'arbitraires effectivement en jeu s'obtient en retranchant une unité du degré de chaque polynome f ou φ et faisant la somme de ces différences. Ce résultat précise et complète celui que j'avais indiqué à la fin du n° 1.