

LEVEUGLE

**Quelques applications des formules  
vectorielles (L)**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 19  
(1919), p. 368-373

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1919\\_4\\_19\\_\\_368\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__368_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[B12d]

**QUELQUES APPLICATIONS DES FORMULES  
VECTORIELLES (L) (1);**

PAR M. LE LIEUTENANT-COLONEL LEVEUGLE.

---

8. *Lignes de courbure.* — On appelle *lignes de courbure* d'une surface les lignes tracées sur cette surface et dont la tangente est perpendiculaire à la direction qui lui est conjuguée.

---

(1) Suite à la *Note sur le déplacement infiniment petit d'un trièdre attaché à une courbe* (*N. A.*, 1919, p. 1).

On a donc en chaque point d'une ligne de courbure  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Les équations M deviennent

$$\begin{aligned} g &= \theta \sin H, \\ \varepsilon &= \theta \cos H, \\ \tau + dH &= 0. \end{aligned}$$

La troisième équation exprime que les *normales des lignes de courbure sont développables*, ainsi que je l'ai démontré dans un Mémoire non encore publié.

Les équations (L) deviennent alors

$$\begin{aligned} d\rho' &= gj + n\varepsilon, \\ dj &= -g\rho', \\ dn &= -\varepsilon\rho'. \end{aligned}$$

On ne peut manquer d'être frappé par la similitude de forme de ces équations avec celles de Frenet, surtout en les écrivant

$$\begin{aligned} dn &= -\varepsilon\rho', \\ d\rho' &= \varepsilon n + gj, \\ dj &= -g\rho'. \end{aligned}$$

Or  $n$  est tangente à l'arête de rebroussement  $\Gamma$  de la normale correspondant à la courbe  $C$ . On en déduit que, si l'on considère deux points correspondants  $P$  et  $Q$  sur  $C$  et  $\Gamma$  :

1° La *tangente* au point  $Q$  à la courbe  $\Gamma$  est normale à la surface  $S$  et son *angle de contingence* ( $\varepsilon$ ) est égal à l'angle de deux normales infiniment voisines à la surface, c'est-à-dire à l'angle de contingence de la ligne de courbure.

2° La *binormale* ( $j$ ) au point  $Q$  de la courbe  $\Gamma$  est perpendiculaire au plan de section normale passant par la tangente en  $P$  à la ligne de courbure et l'*angle*

de torsion de  $\Gamma$  est égal à l'angle de contingence géodésique de la ligne  $C$  au point correspondant.

3° La normale principale à la courbe  $\Gamma(\varphi')$  est parallèle à la tangente en  $P$  à la ligne de courbure.

Il résulte de 2° que si la ligne de courbure  $C$  est une ligne géodésique de  $S$ , la courbure géodésique de cette courbe étant nulle en chaque point, il en est de même de la torsion de  $\Gamma$ . Donc  $\Gamma$  est une courbe plane et par conséquent aussi  $C$ . Par suite :

4° Si une ligne de courbure d'une surface est en même temps ligne géodésique, cette courbe est plane.

9. *Lignes asymptotiques.* — On appelle *lignes asymptotiques* sur une surface les lignes pour lesquelles la tangente est à elle-même sa propre conjuguée. On a donc dans ce cas  $\varphi = 0$ .

Les équations (L) deviennent

$$\begin{aligned} d\varphi' &= g j, \\ dj &= -g \varphi' - n \varepsilon, \\ dn &= \varepsilon j, \end{aligned}$$

et les formules (M)

$$\begin{aligned} g &= \theta \sin H, \\ \theta \cos H &= 0, \\ -\varepsilon \cos \varphi &= \tau + dH. \end{aligned}$$

$\theta$  n'étant pas constamment nul, on a  $\cos H = 0$  ou  $H = \frac{\pi}{2}$ .

Il en résulte  $dH = 0$  et par suite  $\varepsilon = -\tau$ ,  $g = \theta$ . De sorte que les formules (L) prennent la forme

$$\begin{aligned} d\varphi' &= \theta j, \\ dj &= -\theta \varphi' + \tau n, \\ dn &= -\tau j, \end{aligned}$$

formules identiques aux formules (F) où l'on remplacerait  $\nu$  par  $j$  et  $\mu$  par  $n$ . On voit que :

*Le trièdre normal d'une ligne asymptotique est formé par la tangente à cette courbe, la perpendiculaire à la tangente menée dans le plan tangent (normale principale) et la normale à la surface (binormale de la courbe).*

Il en résulte de nombreuses conséquences :

Le plan osculateur d'une ligne asymptotique est le plan tangent à la surface.

La courbure d'une asymptotique est égale à sa courbure géodésique,

La torsion d'une asymptotique est égale à l'angle de deux normales infiniment voisines.

Supposons qu'en un point les deux lignes asymptotiques soient rectangulaires. Désignons par un accent les arêtes du trièdre normal de la deuxième courbe. On aura

$$i' = j, \quad j' = -i, \quad n' = n,$$

avec

$$\begin{aligned} di' &= j'\theta', \\ dj' &= -i'\theta' + n'\tau', \\ dn' &= -j'\tau'. \end{aligned}$$

En comparant avec les équations précédentes, on en déduit

$$\theta = \theta', \quad \tau = \tau' = 0.$$

*Donc, en un point de la surface où les courbes asymptotiques sont rectangulaires elles ont même angle de contingence et une torsion nulle.*

**10. Lignes géodésiques.** — On appelle *ligne géodésique* une ligne tracée sur une surface de manière

qu'en chaque point son plan osculateur soit normal à la surface.

On a donc pour ces lignes

$$H = 0, \quad dH = 0.$$

On en déduit (M)

$$\begin{aligned} g &= 0, \\ \theta &= \varepsilon \sin \varphi, \\ \tau &= -\varepsilon \cos \varphi \end{aligned}$$

et les équations (L) deviennent

$$\begin{aligned} d\rho' &= n\theta, \\ dn &= -\theta\rho' - j\tau, \\ dj &= n\tau. \end{aligned}$$

La première équation (M) montre que la courbure géodésique d'une ligne géodésique est nulle en chaque point.

On déduit des deux autres

$$\varepsilon = \sqrt{\theta^2 + \tau^2}.$$

Or on sait que  $\sqrt{\theta^2 + \tau^2}$  s'appelle la *courbure totale* de la courbe. On en déduit que la courbure totale de la courbe en un point est égale à l'angle de deux normales infiniment voisines à la surface.

Les équations (L) sont identiques aux formules (F), sauf que le trièdre  $\rho', n, j$  est à gauche au lieu d'être à droite. Il en résulte que la normale à la surface est normale principale de la courbe et que le plan rectifiant de la courbe (c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la normale principale et dont la caractéristique est la droite rectifiante) est le plan tangent à la surface. On en déduit que :

La direction conjuguée de la tangente à une géodésique est la rectifiante de la courbe.

( 373 )

Nous nous bornerons à ces quelques indications sommaires que nous avons d'ailleurs développées dans un Mémoire qui paraîtra peut-être prochainement.