R. GOORMAGHTIGH

Sur les spirales sinusoïdes osculantes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 19 (1919), p. 49-54

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19__49_1>

[M^4e]

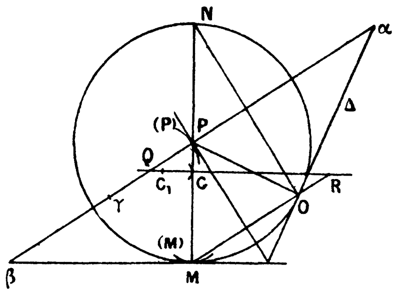
SUR LES SPIRALES SINUSOÏDES OSCULANTES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

1. Le nombre de spirales sinusoïdes d'indice donné n étant simplement infini, une telle courbe oscule une courbe donnée (M) en un point M lorsqu'elle a avec celle-ci un contact quartiponctuel en M; alors les deux premiers centres de courbure C et C_1 coïncident pour les deux courbes.

Désignons par O le pôle de la spirale sinusoïde (S) d'indice n osculant la courbe (M) en M, et soit N le point de MC déterminé par la relation $\overline{CN} = n\overline{MC}$;

d'après une propriété bien connue des spirales sinusoïdes, le point N appartient à la perpendiculaire



élevée en O sur le rayon vecteur de (S) en M. Si P est le milieu de MN, on a

$$(1) \qquad CP : PM = (1-n) : (1+n),$$

et par conséquent

$$(2) \qquad \overline{CM} : \overline{CP} = 2 : (1-n).$$

La relation (1) montre que le lieu (P) du point P est la développée intermédiaire d'indice $(1-n):(1+n)$ de la courbe donnée (M). Soit Q le point où la normale en P à la courbe (P) rencontre CC_1; on sait que, le rapport $\overline{MP} : \overline{CP}$ étant constant, le rapport des segments que Q détermine sur CC_1 est égal au rapport des segments que P détermine sur MC [1]. On a donc

$$\overline{C_1Q} : \overline{QC} = (1-n) : (1+n),$$

et par suite

$$(3) \qquad \overline{CQ} : \overline{CC_1} = \frac{1}{2}(n+1).$$

---

[1] *Voir* Mannheim, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 20.

Si R désigne le point où la parallèle à PQ menée par M à PQ rencontre CC_1, on a

$$\overline{CQ} : \overline{CR} = \overline{CP} : \overline{CM},$$

ou, en tenant compte des relations (2) et (3),

$$(4) \qquad \overline{CC_1} : \overline{CR} = (1 - n) : (1 + n).$$

On sait que le rayon vecteur d'un point d'une spirale sinusoïde d'indice n divise le rayon de courbure de la développée correspondant à ce point dans le rapport de $-(n+1)$ à $2n$; par conséquent, la droite MR est le rayon vecteur de (S) correspondant au point M, et le pôle O de (S) est le symétrique de M par rapport à la tangente en P à la courbe (P). Le cercle de centre P et de rayon PM touche donc l'une des branches de son enveloppe au point O. On a par suite le théorème suivant :

Le lieu des pôles des spirales sinusoïdes d'indice n qui osculent une courbe donnée est la seconde branche de l'enveloppe des cercles obtenus en dilatant les cercles osculateurs de cette courbe dans le rapport constant $\frac{1}{2}(n+1)$ par rapport à leurs points de contact.

La démonstration qui précède montre aussi que la tangente en P à la courbe (P) est la directrice de la courbe de Ribaucour (R) d'indice n qui oscule la courbe (M) en M. En effet, d'après la définition des courbes de Ribaucour, la relation (2) montre que P appartient à la directrice de (R); comme d'autre part la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque d'une courbe de Ribaucour sur sa directrice divise le rayon de courbure de la développée dans le rapport $-(n+1) : 2n$, on voit, d'après la relation (4), que la tangente en P à (P) est la directrice de (R). On retrouve donc ainsi ce théorème de M. Braude [1] :

L'enveloppe des directrices des courbes de Ribaucour d'indice n qui osculent une courbe est la développée intermédiaire d'indice $(1-n):(1+n)$ *de cette courbe.*

2. Cesàro a déterminé (*Natürliche Geometrie*, p. 79, 80) les courbes telles que le lieu des foyers des paraboles osculantes soit une droite, ainsi que celles pour lesquelles les centres des hyperboles équilatères osculantes appartiennent à une droite. Le théorème concernant les spirales sinusoïdes démontré ci-dessus montre que, plus généralement, les *courbes telles que les pôles des spirales sinusoïdes d'indice n qui les osculent soient en ligne droite*, sont les courbes telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans le rapport $\frac{1}{2}(n+1)$, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune Δ; ce sont donc les courbes représentées par l'équation intrinsèque

$$(5) \qquad s = \frac{n+1}{n-1}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}-1}},$$

s et ρ désignant l'arc et le rayon de courbure. Pour $n=-\frac{1}{2}$ et $n=-2$, on retrouve les résultats obtenus par Cesàro pour les paraboles et les hyperboles équilatères osculantes.

---

[1] *Voir* L. BRAUDE, *Les coordonnées intrinsèques* [*Scientia* (*Phys. Math.*, n° 34), p. 63], où cette proposition est démontrée analytiquement ; le cas particulier relatif aux paraboles osculantes ($n=-2$) est mentionné par Cesàro (*Natürliche Geometrie*, p. 78).

On peut aisément déduire des considérations qui précèdent une définition connue des courbes (5). Puisque la développée de (M) est la caustique par réflexion de la courbe (P) pour des rayons incidents OP perpendiculaires à Δ, le centre de courbure γ de (P) en P est dans ce cas le symétrique de P par rapport à Q. Si α désigne le point où PQ rencontre Δ et β le symétrique de α par rapport à P, on a

$$\overline{P\gamma} : \overline{P\alpha} = 2\overline{PQ} : \overline{\beta P} = 2\overline{PC} : \overline{MP} = 2(1-n) : (1+n).$$

La courbe (5) *est la seconde branche de l'enveloppe des cercles qui ont leurs centres sur une courbe de Ribaucour d'indice* $2n : (1-n)$, *et qui touchent la directrice de cette courbe.*

3. Considérons une cycloïdale décrite par un point M d'un cercle ω de rayon r roulant sur un cercle Ω de rayon R; soient C le centre de courbure de la courbe en M, P et P′ les points où MC rencontre Ω, le point P étant le point de contact des cercles ω et Ω. On a, en désignant le module de la cycloïdale par n,

$$MP = \frac{2n+1}{2(n+1)}MC, \qquad MP' = \frac{2n+1}{2n}\cdot MC,$$

et l'on est donc amené à considérer les spirales sinusoïdes osculantes d'indices,

$$\frac{2n+1}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1}, \qquad \frac{2n+1}{n} - 1 = \frac{n+1}{n}.$$

Le lieu des pôles des premières est le lieu du symétrique de M par rapport à la tangente en P à Ω, c'est-à-dire la cycloïdale de module $-n$ qui a les mêmes rebroussements que la cycloïdale considérée.

Le lieu des pôles des secondes spirales sinusoïdes est le lieu du symétrique de M par rapport à la tangente en P′ à Ω. Or la cycloïdale décrite par M peut encore être considérée comme une cycloïdale de module $-(n+1)$ obtenue par le roulement d'un cercle de rayon $(n+1)r$ sur Ω. Le lieu cherché est donc une cycloïdale de module $n+1$. On déduit de là ce théorème [1] :

Les lieux des pôles des spirales sinusoïdes d'indices $\frac{n}{n+1}$ *et* $\frac{n+1}{n}$ *qui osculent une cycloïdale de module* n *sont des cycloïdales de modules* $-n$ *et* $n+1$.

Par exemple, si $n = -\frac{1}{3}$, la cycloïdale est une hypocycloïde à trois rebroussements, et l'on considère les paraboles et les hyperboles équilatères osculantes; on retrouve donc ces propriétés bien connues :

Le lieu des foyers des paraboles qui osculent une hypocycloïde à trois rebroussements est une épicycloïde ayant les mêmes rebroussements.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères qui osculent une hypocycloïde à trois rebroussements est une épicycloïde étoilée ayant les mêmes rebroussements.