

R. GOORMAGHTIGH

**Sur une classe de courbes planes
remarquables**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 19
(1919), p. 93-111

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1919_4_19_93_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1919, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[N° 1 f]

SUR UNE CLASSE DE COURBES PLANES REMARQUABLES;

PAR M. R. GOORMAGHTIGH.

Les courbes Γ dont l'équation intrinsèque a la forme

$$(1) \quad s = \nu \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{-2\lambda\nu} - 1}},$$

s et ρ désignant l'arc et le rayon de courbure, comprennent comme cas particuliers plusieurs familles de courbes remarquables. Lorsque

$$\lambda = \mp 1, \quad \nu = \pm \frac{n+1}{n-1},$$

l'équation (1) représente une *courbe de Ribaucour* d'indice n . La courbe Γ est une *spirale sinusoïde* d'indice n si l'on a

$$\lambda = \mp \frac{n}{n+1}, \quad \nu = \pm \frac{n+1}{n-1}.$$

Quand $\lambda\nu = 1$, on déduit de (1) une équation de la forme

$$\nu^2 \rho^2 + s^2 = k^2,$$

et les courbes Γ sont donc alors les *cycloïdales*.

Pour $\lambda\nu = \frac{1}{2}$, l'équation (1) représente une *développante à point triple d'une cycloïdale*. Si $\nu = 1$, la courbe Γ est l'*antiradiante d'une spirale sinusoïde* d'indice λ ; sa courbe de Mannheim est alors une

courbe de Ribaucour d'indice $2\lambda - 1$. Enfin, si l'on a

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}, \quad \nu = \pm \frac{n+1}{n-1},$$

l'équation (1) s'écrit

$$(2) \quad s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} - 1}};$$

les courbes représentées par cette équation sont telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans un rapport constant, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune.

D'une manière générale, la développée de la courbe (1) a pour équation intrinsèque

$$(3) \quad \rho = \frac{s}{\nu} \sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^{-2\lambda\nu} - 1};$$

cette équation caractérise les courbes auxquelles M. Haton de la Goupillière a donné le nom de *courbes barocentriques* (1) et qui sont telles que l'abscisse en un point soit proportionnelle à une puissance de l'arc.

Ceci posé, nous allons démontrer plusieurs théorèmes généraux relatifs aux courbes Γ ; quelques-unes de ces propositions comprennent comme cas spéciaux un grand nombre de propriétés particulières connues des différentes familles de courbes que nous venons d'énumérer.

1. Définition géométrique des courbes Γ . — En

(1) *Recherches sur les centres de gravité (Journal de l'École Polytechnique, 1870).*

vertu d'une propriété générale des courbes de Cesàro, la perpendiculaire abaissée d'un point d'une courbe de Ribaucour sur la directrice divise le rayon de courbure correspondant de la développée dans un rapport constant. Cette propriété conduit à considérer le problème suivant :

La normale au point M d'une courbe fait avec une droite fixe un angle φ ; déterminer les courbes telles que la droite menée par M et faisant avec la normale un angle $\lambda\varphi$ divise le rayon de courbure de la développée dans un rapport constant.

Soient C et C_1 les deux premiers centres de courbure de la courbe correspondant au point M; prenons comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale au point C de la développée, la direction positive de l'axe des x ayant le sens de \overline{MC} , celle de l'axe des y ayant le sens de $\overline{CC_1}$. Désignons par ρ_1 et s_1 le rayon de courbure et l'arc de la développée, l'origine des arcs étant telle que le point M ait pour coordonnées $(-s_1, 0)$. La condition imposée se traduit par la relation

$$s_1 \operatorname{tang} \lambda\varphi = \nu \rho_1 = -\nu \frac{ds_1}{d\varphi}.$$

On en déduit en intégrant

$$\cos \lambda\varphi = b s_1^{\lambda\nu}.$$

Si l'on dérive par rapport à s_1 , en tenant encore compte de la relation $-\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\varphi}{ds_1}$, on a

$$\sin \lambda\varphi = \nu b \rho_1 s_1^{\lambda\nu-1}.$$

En éliminant φ et en posant $b = a^{-\lambda\nu}$, on trouve l'équation

$$\rho_1 = \frac{s_1}{\nu} \sqrt{\left(\frac{s_1}{a}\right)^{-2\lambda\nu} - 1},$$

identique à (3); par conséquent, *les courbes cherchées sont les courbes Γ .*

Quand on suppose $\lambda = \pm 1$, on retrouve la propriété des courbes de Ribaucour, rappelée ci-dessus.

Dans le cas particulier d'une spirale sinusoïde d'indice n , la droite menée par M et divisant le rayon de courbure de la développée dans le rapport de $-(n+1)$ à $2n$ est le rayon vecteur du point M, et la propriété générale des courbes Γ que nous venons d'obtenir donne cette propriété bien connue :

Lorsque le rayon vecteur tourne uniformément autour du pôle, la tangente tourne uniformément autour du point de contact.

La signification des paramètres λ, ν ressort des considérations qui précèdent; il est utile d'observer qu'une courbe Γ caractérisée par les paramètres λ, ν peut aussi être considérée comme correspondant aux paramètres $-\lambda, -\nu$.

2. *Causticoïdes d'indices $\pm \lambda$ des courbes Γ .* — Soit Δ la droite fixe considérée dans la définition des courbes Γ , et proposons-nous de déterminer les causticoïdes d'indices $\pm \lambda$ produites par des rayons parallèles à Δ , c'est-à-dire les enveloppes des droites qui font avec la normale MC les angles $\pm \lambda\varphi$. En vertu d'une remarque qui précède, il suffit de chercher, par exemple, l'enveloppe de la droite qui fait avec MC l'angle $\lambda\varphi$; l'autre enveloppe se déduit du résultat obtenu en considérant la courbe comme étant définie par les paramètres $-\lambda, -\nu$. La droite considérée a pour équation

$$f(x, y, s_1) \equiv y - (x + s_1) \operatorname{tang} \lambda\varphi = 0:$$

les coordonnées du point où elle touche son enveloppe s'obtiennent en résolvant le système formé par cette équation et

$$(y - \rho_1) \frac{df}{dx} - x \frac{df}{dy} + \rho_1 \frac{df}{ds} = 0;$$

on trouve

$$x = \frac{s_1 \cos^2 \lambda \varphi}{1 - \lambda} - s_1, \quad y = \frac{s_1 \sin \lambda \varphi \cos \lambda \varphi}{1 - \lambda}.$$

On déduit de là, d'après les formules de Cesàro,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s_1} &= \frac{\cos \lambda \varphi}{1 - \lambda} \left[\cos \lambda \varphi + \frac{(2\lambda - 1) s_1 \sin \lambda \varphi}{\rho_1} \right], \\ \frac{\partial y}{\partial s_1} &= \frac{\sin \lambda \varphi}{1 - \lambda} \left[\cos \lambda \varphi + \frac{(2\lambda - 1) s_1 \sin \lambda \varphi}{\rho_1} \right]. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par s' et ρ' l'arc et le rayon de courbure de la causticoïde, on a donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{ds'}{ds_1} = \frac{1}{1 - \lambda} \left[\cos \lambda \varphi + \frac{(2\lambda - 1) s_1 \sin \lambda \varphi}{\rho_1} \right] \\ &= \frac{1 + (2\lambda - 1)\nu}{1 - \lambda} b s_1^{\nu}, \\ \rho' &= \frac{\sigma \rho_1}{1 - \lambda} = \frac{1 + (2\lambda - 1)\nu}{(1 - \lambda)^2} b \rho_1 s_1^{\nu}. \end{aligned}$$

En supposant

$$(4) \quad \lambda \nu - 1 \neq 0, \quad 1 + (2\lambda - 1)\nu \neq 0,$$

et en posant

$$c = \frac{1 + (2\lambda - 1)\nu}{(1 - \lambda)(\lambda\nu - 1)} b^{\frac{1}{\nu}},$$

on trouve, pour l'équation intrinsèque de la causticoïde d'indice λ ,

$$\rho' = \frac{(\lambda\nu - 1)s'}{\nu(1 - \lambda)} \sqrt[1/\nu]{\left(\frac{s'}{c}\right)^{-\frac{2\nu}{\nu+1}} - 1};$$

cette équation représente une courbe barocentrique,

développée de la courbe Γ d'équation

$$(5) \quad s = \frac{\nu(1-\lambda)}{\lambda\nu+1} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{-\frac{2\lambda\nu}{\lambda\nu+1}} - 1}}.$$

On a donc ce théorème :

Les causticoïdes d'indices $\pm\lambda$ des courbes Γ sont des courbes barocentriques.

Par exemple, pour une courbe de Ribaucour d'indice n , on a

$$\lambda = -1, \quad \nu = \frac{n+1}{n-1},$$

et l'équation (5) s'écrit

$$s = (n+1) \int \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{\xi}{c}\right)^{n+1} - 1}}.$$

Les caustiques par réflexion des courbes de Ribaucour, pour des rayons incidents perpendiculaires à la directrice, sont les développées des courbes telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans un rapport constant, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune (1).

Si la seconde condition (4) n'est pas remplie, la courbe Γ est une spirale sinusoïde d'indice n définie par les paramètres

$$\lambda = \frac{n}{n-1}, \quad \nu = -\frac{n+1}{n-1};$$

l'une des causticoïdes se réduit au pôle, l'autre est, d'après l'équation (5), la développée d'une spirale

(1) Cette proposition ne diffère pas essentiellement d'un théorème connu dû à Césàro (Cf. § 4).

sinusoïde d'indice $\frac{n}{n+1}$. Ce résultat est identique à cette proposition connue :

La podaire d'une spirale sinusoïde d'indice n par rapport au pôle est une spirale sinusoïde d'indice $\frac{n}{n+1}$.

Quand Γ est un cercle, l'équation (5) prend la forme

$$s = \frac{1-\lambda}{\lambda} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^2 - 1}};$$

par conséquent, toutes les causticoïdes du cercle sont des cycloïdales (1).

Si Γ est une cycloïdale, on trouve comme causticoïdes des cycloïdales.

Enfin, lorsque Γ est une des courbes (2), la causticoïde d'indice $\lambda = \frac{1}{2}$ est une courbe de Ribaucour.

Dans le cas où $\lambda v = -1$, on trouve de même, comme équation des causticoïdes,

$$\rho' = \frac{bv}{v \pm 1} \sqrt{e^{\mp \frac{2\rho'}{bv}} - 1}.$$

Par exemple, quand Γ est la *syntractrice*

$$s = 2 \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 - 1}},$$

la causticoïde d'indice $-\frac{1}{2}$ pour des rayons incidents parallèles à l'axe de symétrie est une tractrice; cette

(1) LORIA-SCHÜTTE. *Spezielle ebene Kurven*, t. II, p. 311.

proposition résulte d'ailleurs immédiatement des propriétés connues de la syntrectrice.

3. *Courbes directrices des courbes Γ'* — Cherchons maintenant les développées intermédiaires d'indices $\pm \frac{1}{\nu}$ de la courbe Γ , c'est-à-dire les lieux (N) et (N') des points N et N' tels que

$$\overline{CN} : \overline{NM} = \nu, \quad \overline{CN'} : \overline{N'M} = -\nu$$

Le point N a pour coordonnées

$$\xi = -\frac{s_1}{\nu+1}, \quad \eta = 0.$$

et l'on a

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} = \frac{\nu}{\nu+1}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1} = -\frac{s_1}{(\nu+1)\rho_1} = -\frac{\nu}{\nu+1} \cot \lambda \varphi.$$

La tangente à (N) en N est donc perpendiculaire à la droite menée par M et faisant l'angle $\lambda \varphi$ avec la normale MC: quand Γ est une courbe de Ribaucour, correspondant à $\lambda = 1$, le lieu de N est donc une droite, et l'on retrouve la directrice. Par analogie avec ce cas, nous désignerons sous le nom de *courbes directrices* des courbes Γ les développées intermédiaires (N) et (N') considérées.

Si s'' et ρ'' désignent l'arc et le rayon de courbure du lieu de N, on a

$$\begin{aligned} \frac{ds''}{ds_1} &= \frac{\nu}{(\nu+1) \sin \lambda \varphi} = \frac{s_1^{-\lambda \nu}}{(\nu+1) b \rho_1}, \\ s'' &= \frac{\nu}{(\nu-1)b} \int \frac{s_1^{-\lambda \nu} ds_1}{\sqrt{\left(\frac{s_1}{a}\right)^{2\nu} - 1}}, \\ \frac{1}{\rho''} &= \frac{1-\lambda}{\rho_1} \frac{ds_1}{ds''}, \quad s_1 = [b(\nu+1)(1-\lambda)\rho'']^{\frac{1}{1-\lambda \nu}}, \end{aligned}$$

et l'on en déduit, pour l'équation cherchée,

$$s'' = \frac{\nu(1-\lambda)}{1-\lambda\nu} \int \frac{d\varphi''}{\sqrt{\left(\frac{\varphi''}{h_1}\right)^{\frac{2\lambda\nu}{1-\lambda\nu}} - 1}},$$

où l'on a posé

$$h_1 = \frac{b^{-\frac{1}{\lambda\nu}}}{(\nu+1)(1-\lambda)}.$$

L'équation de la développée intermédiaire d'indice $-\frac{1}{\nu}$ s'écrit de même

$$(6) \quad s'' = \frac{\nu(1+\lambda)}{1-\lambda\nu} \int \frac{d\varphi''}{\sqrt{\left(\frac{\varphi''}{h_2}\right)^{\frac{2\lambda\nu}{1-\lambda\nu}} - 1}}.$$

Les développées intermédiaires d'indices $\pm \frac{1}{\nu}$ des courbes Γ sont aussi des courbes Γ .

Dans le cas d'une cycloïdale, les développées intermédiaires (N) et (N') se confondent avec le cercle directeur. Les courbes directrices des développantes à points triples des cycloïdales sont des cycloïdales. L'une des courbes directrices d'une spirale sinusoïde d'indice n est une spirale sinusoïde d'indice $\frac{n}{1-n}$. L'une des courbes directrices d'une courbe de Ribaucour est la directrice rectiligne; l'équation de la seconde courbe directrice s'obtient en faisant dans (6)

$$\lambda = 1, \quad \nu = -\frac{n+1}{n-1}.$$

On trouve ainsi l'équation

$$s'' = \frac{n+1}{n} \int \frac{d\varphi''}{\sqrt{\left(\frac{\varphi''}{h_2}\right)^{\frac{n+1}{n}} - 1}},$$

analogue à (2). On a donc ce théorème :

Les lieux des conjugués harmoniques des points

où les normales des courbes de Ribaucour rencontrent la directrice rectiligne, par rapport aux extrémités des rayons de courbure correspondants, sont les courbes telles que leurs cercles osculateurs dilatés dans un rapport constant, par rapport à leurs points de contact, aient une tangente commune.

4. *Cercles osculateurs dilatés.* — Considérons le cercle de centre N et de rayon NM ; le point M' où ce cercle touche la seconde branche de son enveloppe est le symétrique de M par rapport à la tangente à (N) en N et appartient, en vertu de ce qui précède, à la droite menée par M et faisant avec MC l'angle $\lambda\varphi$. Soient T et C' les points où MM' et NM' touchent leurs enveloppes; les points C, T, C' sont collinéaires (¹). D'autre part, il est aisé de voir que la droite NM' enveloppe la causticoïde d'indice λ ; $(\lambda - 1)$ de la courbe (N) : on déduit de là, au moyen du résultat établi au paragraphe 2, que cette droite reste normale à une courbe Γ d'équation

$$(7) \quad s = \nu(2\lambda - 1) \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{g}\right)^{-2\lambda\nu} - 1}}.$$

Comme on a en outre

$$\frac{\overline{MT}}{\overline{MM'}} = \frac{\nu + 1}{2\nu(1 - \lambda)}$$

et, par suite,

$$\frac{\overline{NC'}}{\overline{NM'}} = -\frac{1}{\nu(2\lambda - 1)},$$

on voit que la seconde branche Γ' de l'enveloppe, lieu

(¹) *Nouvelles Annales*, 1915, p. 435; 1916, p. 5.

de M' , est la courbe (7) et que la courbe directrice (N) de Γ est aussi une courbe directrice de Γ' . On a un résultat analogue en considérant la courbe Γ comme étant définie par les paramètres $-\lambda$, $-\nu$, et l'on peut donc énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'on dilate les cercles osculateurs d'une courbe Γ par rapport à leurs points de contact dans le rapport constant ν : ($\nu \pm 1$), le lieu des centres et l'enveloppe des cercles obtenus sont des courbes Γ , et la corde de contact de ces cercles avec leur enveloppe reste normale à une courbe Γ .

Les trois dernières courbes Γ correspondent respectivement à ces valeurs des paramètres

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\lambda}{\lambda \mp 1}, \quad -\frac{\nu(\lambda \mp 1)}{1 - \lambda\nu}; \quad \frac{\lambda}{\nu\lambda \mp 1}, \quad \nu(\nu\lambda \mp 1); \\ \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \quad -\frac{\nu(\lambda \mp 1)}{1 + \lambda\nu}. \end{array} \right.$$

Cesàro a démontré (1) que, si l'on dilate dans le rapport $\frac{1}{2}(n+1)$ les cercles osculateurs d'une courbe (2), par rapport à leurs points de contact, les cercles obtenus sont tangents à une droite, et leurs centres appartiennent à une courbe de Ribaucour d'indice $\frac{\nu n}{n-1}$.

Cette proposition est un cas particulier du théorème que nous venons d'obtenir; il suffit de faire, dans les expressions (8),

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{n+1}{n-1},$$

et de prendre dans ces expressions les signes inférieurs

(1) *Natürliche Geometrie*, p. 65.

là où figurent les doubles signes. En outre, la dernière partie du théorème général permet d'ajouter à la proposition de Cesàro la propriété suivante :

La corde de contact du cercle dilaté avec son enveloppe reste normale à une courbe de Ribaucour d'indice $\frac{1}{2}(n-1)$.

Par exemple, si $n = \frac{1}{3}$, la courbe (2) est une *néphroïde de Proctor*; le lieu des centres des cercles osculateurs contractés dans le rapport $\frac{2}{3}$ est le *cercle directeur*, et les cercles considérés touchent un diamètre du cercle directeur; les cordes de contact de ces cercles avec leur enveloppe sont normales à une courbe de Ribaucour d'indice $-\frac{1}{3}$, elles enveloppent donc une *astroïde régulière*.

§. *Les courbes Γ comme roulettes.* — M. Braude a démontré (1) qu'on peut faire rouler, sur la développée intermédiaire d'indice μ d'une courbe (C) d'équation intrinsèque $f(s, \rho) = 0$, la radiale de la courbe

$$(9) \quad f\left[\frac{1+\mu}{\rho} s, (1-\mu)\rho\right] = 0.$$

de manière que la roulette du pôle de la radiale soit la courbe (C); on peut de même faire rouler, sur la développée intermédiaire, la courbe de Mannheim de (9) de manière que la base de cette courbe de Mannheim enveloppe la courbe (C).

Par conséquent, on peut faire rouler sur la courbe

(1) *Les coordonnées intrinsèques* [Scientia (Phys.-Math., n°34), p. 93].

directrice (N) d'une courbe Γ la radiale de la courbe

$$(10) \quad s = \int \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{z}{l}\right)^{2\lambda\nu} - 1}} \quad \left(l = \frac{\lambda\nu}{\nu - 1} \right),$$

de façon que le pôle décrive la courbe Γ , ou faire rouler sur (N) la courbe de Mannheim de (10), de façon que la base enveloppe Γ . Or la radiale de (10) est une spirale sinusoïde d'indice $\lambda\nu$, sa courbe de Mannheim est une courbe de Ribaucour d'indice $2\lambda\nu - 1$; on a donc ce théorème :

On peut faire rouler sur chacune des courbes directrices d'une courbe Γ , définie par les paramètres λ, ν , une spirale sinusoïde d'indice $\lambda\nu$ et une courbe de Ribaucour d'indice $2\lambda\nu - 1$ de manière que le lieu du pôle de la spirale sinusoïde et l'enveloppe de la directrice de la courbe de Ribaucour soient la courbe Γ .

Cette proposition généralise plusieurs propriétés connues. Si l'on suppose d'abord que Γ soit une courbe de Ribaucour et qu'on prenne comme courbe directrice sa directrice rectiligne, on retrouve ce théorème de Bonnet :

Quand une spirale sinusoïde d'indice n roule sur une droite, son pôle décrit une courbe de Ribaucour d'indice $(n - 1) : (n + 1)$.

La seconde partie du théorème général donne ensuite cette proposition :

Quand une courbe de Ribaucour d'indice n roule sur une droite, sa directrice enveloppe une courbe de Ribaucour d'indice $(n - 1) : (n + 3)$.

On obtient de même, en considérant comme courbe Γ une spirale sinusoïde, le théorème suivant :

On peut faire une courbe de Ribaucour d'indice $2n - 1$ sur une spirale sinusoïde d'indice n , de façon que la directrice de la courbe de Ribaucour enveloppe une spirale sinusoïde d'indice $n : (n + 1)$.

Si l'on suppose $\lambda\nu = 1$, on retrouve cette définition bien connue des cycloïdales :

Lorsqu'un cercle roule sur un cercle, l'enveloppe d'un diamètre du cercle mobile est une cycloïdale.

En considérant le cas où $\lambda\nu = \frac{1}{2}$, on voit qu'on peut faire rouler une cardioïde sur une cycloïdale de manière que le point de rebroussement se déplace parallèlement à une cycloïdale, ou faire rouler une cycloïde sur une cycloïdale de manière qu'une parallèle à la base enveloppe une autre cycloïdale.

6. *Courbes de Cesàro osculant les courbes Γ .* — Dans ce qui suit, nous prenons comme axes mobiles des x et des y la tangente et la normale au point variable M de la courbe Γ ; et nous désignons par ρ_2 et ρ_3 les troisième et quatrième rayons de courbure correspondant au point M de Γ . On déduit facilement de l'équation (1), par deux dérivations, la relation (1)

$$(11) \quad \frac{\lambda}{\nu} \rho^2 + (\lambda\nu - 1) \rho_1^2 + \rho \rho_2 = 0.$$

(1) Cette relation donne lieu à une construction simple du troisième centre de courbure correspondant au point M de Γ , quand on connaît C et C_1 (voir CESÀRO, *Natürliche Geometrie*, p. 77).

En dérivant encore par rapport à s , on obtient la relation

$$\frac{\nu \lambda}{\nu} \rho_1 + \rho_3 + (2\lambda\nu - 1) \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} = 0;$$

on peut en déduire une construction simple du quatrième centre de

D'autre part, d'une manière générale, si P et H désignent les invariants

$$P = (n-1)^2 \rho^2 + 2n(n+1) \rho_1^2 - (n^2-1) \rho \rho_2,$$

$$H = \frac{n(n-1)^2}{n-1} \rho^2 + (2n^2+n-1) \rho_1^2 - (n^2-1) \rho \rho_2$$

des courbes de Ribaucour et des spirales sinusoides d'indice n , le cercle directeur de la courbe de Cesàro d'indice n qui oscule une courbe en un point où les trois premiers rayons de courbure sont ρ, ρ_1, ρ_2 , a pour centre le point O de coordonnées

$$(12) \quad \xi_1 = \frac{(n^2-1)\rho^2 \rho_1}{P}, \quad \tau_1 = \frac{(n-1)^2 \rho^3}{P};$$

ce cercle a pour rayon

$$R = (n-1) \frac{\rho^2}{P} \sqrt{-(n+1)H}$$

et pour équation (1)

$$(13) \quad x^2 + y^2 - \frac{2(n-1)}{P} \rho^2 [(n+1)\rho_1 x + (n-1)\rho y] + \frac{n+1}{P} (n-1)^2 \rho^4 = 0.$$

Si l'on pose dans l'expression de P

$$n = \frac{\lambda\nu - 1}{\lambda\nu + 1},$$

on a

$$P = \frac{4}{(\lambda\nu + 1)^2} \rho^2 + \lambda\nu [(\lambda\nu - 1) \rho_1^2 + \rho \rho_2] \rho;$$

par conséquent, si la relation (11) est vérifiée, la valeur

courbure correspondant à M quand on a déterminé les trois premiers centres de courbure [voir notre Note *Sur les troisième et quatrième centres de courbure des courbes de Cesàro* (*Nouvelles Annales*, 1919).

(1) CESÀRO-KOWALEWSKI, *Natürliche Geometrie*, p. 77.

de P s'écrit

$$P = \frac{4(1-\lambda^2)}{(\lambda\nu+1)^2} \rho^2,$$

et les expressions (12) se réduisent à

$$\xi_1 = -\frac{\lambda\nu}{1-\lambda^2} \rho_1, \quad \tau_1 = \frac{\rho}{1-\lambda^2}.$$

Le pôle de la courbe de Cesàro d'indice

$$(\lambda\nu - 1) : (\lambda\nu + 1)$$

qui oscule en M la courbe Γ se projette sur les deux premiers rayons de courbure en des points qui divisent ces rayons de courbure dans des rapports constants.

On peut déduire de cette propriété une construction simple du centre de courbure du lieu des pôles des courbes de Cesàro d'indice $(\lambda\nu - 1) : (\lambda\nu + 1)$ osculant la courbe Γ . Soit, en effet, Q le point où MO rencontre CC_1 ; le lieu de Q est, d'après les expressions (12), une développée intermédiaire de la développée de Γ . La normale au lieu de Q est donc connue quand on connaît le troisième centre de courbure de Γ en M. D'autre part, la tangente en O au lieu de ce point est la droite MQ, et le point O divise le segment MQ dans un rapport constant; la construction cherchée est donc ramenée à un problème connu (1).

7. La propriété suivante est caractéristique pour les courbes Γ :

Les courbes Γ sont les courbes telles que le cercle

(1) Voir MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 20.

directeur de la courbe de Cesàro d'indice donné qui oscule la courbe en un point soit vu de ce point sous un angle constant.

Proposons-nous, en effet, de déterminer les courbes qui jouissent de cette propriété; la condition du problème s'exprime par la relation

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \alpha R^2.$$

ou

$$(n+1)^2 \rho_1^2 - (n-1)^2 \rho^2 - \alpha n(n-1)^2 \rho^2 - \alpha(n-1)(n^2+n-1)\rho_1^2 - \alpha(n+1)(n^2-1)\rho\rho_2 = 0,$$

ou encore

$$(14) \quad \frac{(n-1)(\alpha n-1)}{\alpha(n+1)^2} \rho^2 + \frac{1}{\alpha(n^2-1)} [n-1 + \alpha(2n^2+n-1)] \rho_1^2 - \rho\rho_2 = 0.$$

On reconnaît au premier membre l'invariant d'une courbe Γ . En identifiant (11) et (14), on trouve

$$\frac{n-1}{n+1} = + \frac{1}{\nu};$$

on en déduit que, dans la définition d'une courbe Γ de paramètres λ, ν , par la propriété énoncée ci-dessus, il faut considérer les courbes de Cesàro osculantes d'indice $(\nu+1):(\nu-1)$ ou d'indice $(\nu-1):(\nu+1)$. Quant à la constante α , elle a pour expression, suivant que l'on considère les premières de ces courbes de Cesàro ou les secondes,

$$\alpha = \frac{1 \mp \nu}{2\lambda\nu \pm \nu + 1}.$$

On peut démontrer de la même manière d'autres propriétés des courbes Γ ; si l'on remarque, par

exemple, que la puissance de M par rapport au cercle (13) est

$$\frac{(n+1)(n-1)^2}{p} \rho^2,$$

on obtient aisément la proposition suivante :

Le carré du rayon de courbure en un point d'une courbe Γ est proportionnel à la puissance de ce point par rapport au cercle directeur de la courbe de Cesàro d'indice $(\lambda\nu - 1) : (\lambda\nu + 1)$ qui oscule la courbe en ce point.

8. *Courbes de Ribaucour et spirales sinusoides osculant les courbes Γ .* — D'après un théorème de M. Braude (1), l'enveloppe des directrices des courbes de Ribaucour d'indice n qui osculent une courbe est la développée intermédiaire d'indice $(1-n) : (1+n)$ de cette courbe. D'autre part, nous avons montré (2) que le lieu des pôles des spirales sinusoides d'indice n qui osculent une courbe est la seconde branche de l'enveloppe des cercles obtenus en dilatant les cercles osculateurs de la courbe dans le rapport $\frac{1}{2}(n+1)$, par rapport à leurs points de contact. Les théorèmes trouvés aux paragraphes 3 et 4 peuvent donc s'énoncer ainsi :

Les enveloppes des directrices des courbes de Ribaucour d'indices $(\nu \pm 1) : (\nu \mp 1)$ qui osculent une courbe Γ , définie par les paramètres λ, ν , sont des courbes Γ de paramètres

$$-\lambda : (\lambda \mp 1), \quad -\nu(1 \mp \lambda) : (1 - \lambda\nu).$$

(1) *Les coordonnées intrinsèques*, p. 63.

(2) *Sur les spirales sinusoides osculantes* (*Nouvelles Annales*, 1919).

Les lieux des pôles des spirales sinusoides d'indices $(\nu \pm 1) : (\nu \mp 1)$ qui osculent une courbe Γ de paramètres λ, ν sont des courbes Γ de paramètres

$$-\lambda : (2\lambda \pm 1), \quad \nu : (2\nu \pm 1).$$

Ces théorèmes contiennent toutes les propositions particulières rencontrées par Cesàro dans l'étude des paraboles, hyperboles équilatères et spirales sinusoides osculantes (1).

Par exemple, si l'on considère la parabole comme courbe de Ribaucour d'indice -2 , on retrouve que les directrices des paraboles osculant une hypocycloïde à trois rebroussements sont tangentes au cercle directeur, et que les directrices des paraboles qui osculent une hyperbole équilatère enveloppent une spirale sinusoides d'indice $-\frac{2}{3}$.

Dans le cas des cycloïdales, on obtient cette proposition :

Les lieux des pôles des spirales sinusoides d'indices $\frac{n+1}{n}$ ou $\frac{n}{n+1}$ qui osculent une cycloïdale de module n sont des cycloïdales de modules $n+1$ et $-n$.

Enfin, pour les courbes remarquables (2), on a le théorème suivant :

Le lieu des pôles des spirales sinusoides d'indice n qui oscule la courbe (2) est une droite.

(1) *Natürliche Geometrie*, p. 78-80.