

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.



D. 11 202

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

R. BRICARD,
Professeur au Conservatoire national
des Arts et Métiers,
Examinateur des Élèves à l'École Polytechnique.

H. VILLAT,
Professeur
à
l'Université de Strasbourg.

J. PÈRÈS,
Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, AN TOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

CINQUIÈME SÉRIE.
TOME I.
(LXXX^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

BIBLIOTHÈQUE
UNIVERSITAIRE
DE STRASBOURG

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C^{IE}, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1922

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[K' 20 c]

SUR L'ÉTUDE ALGÈBRE DES PROBLÈMES DE DIVISION DES ARCS ;

PAR M. E. VESSIOT.

1. Il existe une démonstration classique pour prouver la réalité des racines de l'équation algébrique qui donne $\text{tang} \frac{z}{n} = t$ en fonction de $\text{tang} z = k$. On peut lui donner la forme suivante :

L'équation en question résulte de l'identité

$$\frac{\left(\cos \frac{z}{n} + i \sin \frac{z}{n}\right)^n}{\left(\cos \frac{z}{n} - i \sin \frac{z}{n}\right)^n} = \frac{\cos z + i \sin z}{\cos z - i \sin z},$$

et s'écrit, par suite,

$$\left(\frac{1 + it}{1 - it}\right)^n = \frac{1 + ik}{1 - ik}.$$

Le nombre k étant réel, le module du second membre est égal à 1. Il en est de même de ses racines $n^{\text{ièmes}}$. Donc toute solution de l'équation se présente

(2)

sous la forme

$$\frac{1+it}{1-it} = c,$$

où c est une quantité complexe de module égal à 1.

On tire de là

$$t = i \frac{c-1}{c+1} = -i \frac{\frac{1}{c}-1}{\frac{1}{c}+1}.$$

Or, c ayant pour module 1, $\frac{1}{c}$ est la quantité complexe conjuguée de c . La formule précédente montre donc que la quantité complexe t est égale à sa conjuguée, c'est-à-dire qu'elle est réelle. c. Q. F. D.

2. Le mode de démonstration précédent, sous la forme que nous venons de lui donner, s'étend bien facilement aux systèmes qui donnent les valeurs de $\cos \frac{z}{n} = x$, $\sin \frac{z}{n} = y$, quand on se donne, soit $\cos z = a$, soit $\sin z = b$.

Ces systèmes, qui proviennent des identités

$$\left(\cos \frac{z}{n} + i \sin \frac{z}{n} \right)^n = \cos z + i \sin z,$$

$$\left(\cos \frac{z}{n} - i \sin \frac{z}{n} \right)^n = \cos z - i \sin z,$$

sont, respectivement,

$$(I) \quad (x + iy)^n + (x - iy)^n = 2a, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

$$(II) \quad (x + iy)^n - (x - iy)^n = 2ib, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Si l'on introduit l'inconnue auxiliaire $x + iy = z$, en tenant compte de

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy),$$

ils deviennent

$$(I') \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2a, \quad x + iy = z, \quad x - iy = \frac{1}{z},$$

$$(II') \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2ib, \quad x + iy = z, \quad x - iy = \frac{1}{z};$$

et les équations résolvantes en z des deux systèmes,

$$(1) \quad (z^n)^2 - 2a(z^n) + 1 = 0,$$

$$(2) \quad (z^n)^2 - 2ib(z^n) - 1 = 0,$$

donnent, respectivement,

$$(1') \quad z^n = a \pm i\sqrt{1-a^2},$$

$$(2') \quad z^n = ib \pm \sqrt{1-b^2}.$$

Comme, par hypothèse, a et b sont réels et de modules au plus égaux à 1, les seconds membres de ces dernières équations sont des quantités complexes de modules égaux à 1. Il en est donc de même de leurs racines $n^{\text{ièmes}}$; c'est-à-dire que les valeurs de l'inconnue auxiliaire z ont l'unité pour module.

Toute solution de l'un ou l'autre des systèmes considérés est donc de la forme

$$z = c, \quad x + iy = z, \quad x - iy = \frac{1}{z},$$

où c est une quantité complexe de module égal à 1.

On en tire

$$(3) \quad x = \frac{1}{2} \left(c + \frac{1}{c} \right), \quad y = \frac{1}{2i} \left(c - \frac{1}{c} \right).$$

Or c étant de module 1, $\frac{1}{c}$ est la quantité complexe conjuguée, et ces valeurs (3) sont réelles. On conclut, de plus, des formules (3)

$$|x| \leq \frac{1}{2} \left\{ |c| + \left| \frac{1}{c} \right| \right\} = 1, \quad |y| \leq \frac{1}{2} \left\{ |c| + \left| \frac{1}{c} \right| \right\} = 1,$$

puisque

$$|c| = \left| \frac{1}{c} \right| = 1.$$

Les systèmes considérés ne peuvent donc avoir que des solutions réelles, formées de nombres appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$. C. Q. F. D.

3. On voit, de plus, que la solution de chacun des trois problèmes considérés dépend, en définitive, de l'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ d'une quantité complexe de module égal à 1; ce qui est bien naturel, en raison des rapports étroits de ces problèmes avec la résolution des équations binomes de degré n .

Dans les deux derniers cas, la décomposition du problème qui résulte de la résolution préliminaire des équations du second degré, à coefficients réels, (1) et (2), correspond à celle qu'on effectue dans l'étude géométrique de ces problèmes, qui est classique. Il serait facile de déduire de ces équations (1) et (2) les conclusions que fournit cette étude géométrique au point de vue du nombre des solutions de chacun des deux problèmes.

[K'21b]

SUR LA TRISECTION D'UN ANGLE;

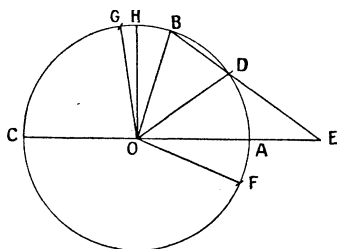
PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Au dernier Congrès des Mathématiciens tenu à Strasbourg du 22 au 30 septembre 1920, M. A. Typpa, de Belgrade, a présenté une solution graphique de la

trisection d'un angle, qu'il me paraît intéressant de rapprocher de la solution classique.

Soit AOB l'angle à partager en trois parties égales. On commence, comme pour la solution connue,

Fig. 1.



quand on veut partager en trois parties égales l'angle BOC , supplément de AOB . On trace le cercle de centre O ayant pour rayon $OA = OB = OC$ et l'on place une règle de façon qu'elle passe par le point B et rencontre le cercle qu'on vient de tracer en D et le diamètre CA en E de façon que $OD = DE$. Cela fait, de D comme centre avec OD pour rayon, on trace un cercle qui coupe le premier en G et F . On a alors

$$\widehat{AOF} = \frac{1}{3} \widehat{AOB},$$

comme nous allons le montrer.

Il y a plusieurs cas de figure, mais on peut faire une démonstration s'appliquant à tous les cas, en tenant compte du sens des angles. On sait, en premier lieu, que

$$(1) \quad (OB, OC) = 3.(OA, OD).$$

D'autre part,

$$(\text{OF}, \text{OA}) + (\text{OA}, \text{OD}) = 60^\circ$$

ou

$$(2) \quad 3(\text{OF}, \text{OA}) + 3(\text{OA}, \text{OD}) = 180^\circ;$$

en comparant les égalités (1) et (2), on trouve

$$3(\text{OF}, \text{OA}) = 180^\circ - (\text{OB}, \text{OC}) = (\text{OA}, \text{OB});$$

c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

Remarques. — Dans le triangle isocèle ODE, le côté OE doit être plus grand que OA; on en conclut $\cos \text{DOE} > \frac{1}{2}$ et par suite $(\text{OA}, \text{OD}) < 60^\circ$; il en résulte que les points F, A, D se succèdent dans le sens positif. Si l'on trace OH de façon que $(\text{OA}, \text{OH}) = 90^\circ$, l'ordre de succession des points G, H, B n'est pas fixe. Cela posé, on a

$$(\text{OF}, \text{OA}) + (\text{OA}, \text{OH}) + (\text{OH}, \text{OG}) = 120^\circ$$

et, par suite,

$$(\text{OF}, \text{OA}) + (\text{OH}, \text{OG}) = 30^\circ$$

ou

$$3(\text{OF}, \text{OA}) + 3(\text{OH}, \text{OG}) = 90^\circ,$$

c'est-à-dire

$$(\text{OA}, \text{OB}) + 3(\text{OH}, \text{OG}) = 90^\circ,$$

ou enfin

$$3(\text{OH}, \text{OG}) = 90^\circ - (\text{OA}, \text{OB}),$$

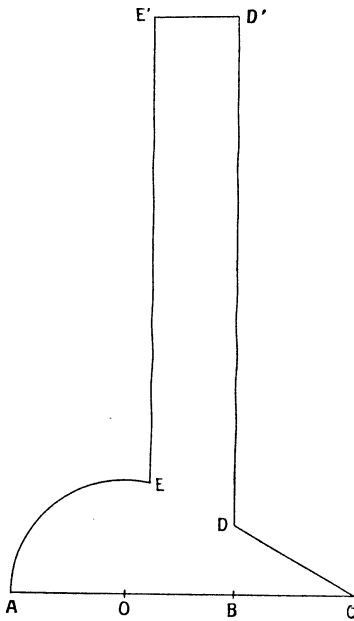
ce qui revient à dire que $\widehat{\text{GOH}}$ est le tiers de $\widehat{\text{BOH}}$.

Je profite de l'occasion pour signaler un instrument simple, imaginé et construit par M. Grivel, professeur

au Collège de Remiremont, pour partager un angle en trois parties égales.

Le petit instrument, en fer, est représenté (*fig. 2*) à peu près en grandeur naturelle. Une portion de demi-cercle de diamètre AB fait corps avec une règle DD'EE' dont le côté DD' est tangent en B au demi-cercle supposé prolongé; la pièce se continue par la ligne DC, dont

Fig. 2.



la forme n'a aucune importance; toutefois, la longueur BC est égale au rayon OB du demi-cercle.

Voici comment on opère. Soit \widehat{xy} l'angle à partager en trois parties égales. On place, par un tâtonnement aisé, la règle de M. Grivel de façon que le

Pour établir l'existence d'une fonction α de x et y , satisfaisant à l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

et tendant vers α_0 quand x, y tendent respectivement vers x_0, y_0 , on fait appel aux hypothèses suivantes : existence et continuité des dérivées premières de f dans le domaine du point x_0, y_0, α_0 , et stipulation essentielle que f'_α n'est pas nulle en ce point.

On délaisse, en général, le cas où l'on aurait

$$(1) \quad f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$$

et cela n'est pas sans préjudice pour l'exposition de la théorie des enveloppes, où l'hypothèse traduite par l'équation (1) joue un rôle fondamental.

Dans un travail récent ⁽¹⁾ j'ai donné le moyen de combler cette lacune. Je me bornerai à rappeler ici le théorème suivant, qui nous sera utile dans la suite.

Supposons que, pour les valeurs x_0, y_0, α_0 , on ait à la fois

$$f(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \quad f'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \quad f''_{\alpha^2}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0,$$

la continuité étant réalisée pour les dérivées secondes. Supposons en outre que f'_x et f'_y ne soient pas nuls tous deux pour ce système de valeurs. Cherchons une fonction α de x, y satisfaisant à l'équation

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

qui soit continue dans le domaine du point x_0, y_0 et tende vers α_0 , quand $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent vers zéro. Au point x_0, y_0 (dans le plan xOy), il passe

(1) *Revue de l'Enseignement des Sciences*, novembre 1918, F. Alcan.

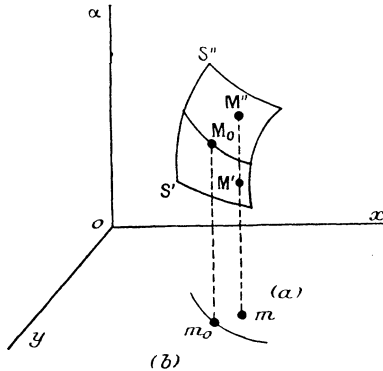
une branche de courbe et une seule satisfaisant aux équations

$$f = 0, \quad f'_\alpha = 0.$$

La portion du plan avoisinant ce point est partagée par elle en deux régions (*a*) et (*b*). Si le point x, y est dans la région (*a*), il existe deux valeurs $\alpha'(x, y)$ et $\alpha''(x, y)$, vérifiant l'équation $f = 0$ et tendant vers α_0 lorsque $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent vers zéro. Dans la région (*b*) il n'existe pas de valeur de α satisfaisant à ces conditions.

Si nous nous servons d'une représentation géométrique à trois dimensions, les hypothèses précédentes signifient que $M_0(x_0, y_0, \alpha_0)$ est situé sur le contour apparent dans l'espace, pour la direction de projectantes Ox , de la surface $f = 0$. Considérons ce contour apparent en projection sur le plan xOy : il partage la région qui avoisine m_0 en deux portions (*a*) et (*b*).

Fig. 1.



Une projectante qui traverse la portion (*a*) rencontre la surface $f = 0$ en deux points M' et M'' voisins de M_0 .

Une projetante issue de la région (*b*) ne la rencontre pas ⁽¹⁾.

On peut donc dire que le point m_0 appartient, dans ces conditions, à la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite α de x et y , définie par l'équation $f = 0$.

Dans cette étude, toutes les propositions, à l'exemple de la précédente, ont un caractère local, c'est-à-dire établissent des relations entre des éléments infiniment voisins d'éléments connus. C'est au point de vue local que nous nous placerons exclusivement dans ce qui va suivre.

2. Pour bien définir notre sujet, rappelons d'abord un fait classique. Considérons le système d'équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0.$$

Soit

$$F(x, y) = 0$$

l'équation obtenue en éliminant z entre les deux précédentes. En général, *on n'a pas le droit* de substituer au système

$$f = 0, \quad g = 0,$$

le suivant

$$F = 0, \quad g = 0.$$

Ce théorème a un sens bien précis dans le domaine des fonctions algébriques, en raisonnant sur l'ensemble des valeurs complexes des variables, et en regardant globalement les intersections des surfaces définies par les équations précédentes (α représentant toujours une *cote*).

(1) En somme, c'est là une conséquence de l'hypothèse $f''_{\alpha} \neq 0$, qui exprime que la surface ne s'infléchit pas, le long du contour apparent, par rapport à son cylindre circonscrit.

Il exprime que le cylindre, projetant sur xOy l'intersection des surfaces $f = 0$ et $g = 0$, a en commun avec la surface $g = 0$, non seulement l'intersection précédente, mais aussi, en général, d'autres courbes.

Mais on peut aussi envisager cette proposition et la rendre valable dans le domaine réel, en supposant que f et g soient seulement des fonctions continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à un certain ordre, et remplissant certaines conditions analogues à celles de l'énoncé du théorème des fonctions implicites. On se placera donc cette fois au point de vue local.

C'est dans ces hypothèses que nous nous proposons de préciser l'énoncé de l'affirmation précédente.

3. Essayons donc de définir l'élimination *locale*. Supposons que, pour un système de valeurs x_0, y_0, z_0 , nous ayions à la fois

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Les deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0$$

ont donc une racine commune, et il s'agit d'étudier l'ensemble des systèmes de valeurs x, y voisins de x_0, y_0 pour lesquels les deux équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad g(x, y, z) = 0$$

ont une ou plusieurs racines z communes et infiniment voisines de z_0 .

Supposons d'abord que g'_z ne s'annule pas pour le système des valeurs x_0, y_0, z_0 . Il existe alors une fonction $z(x, y)$ et une seule, définie dans le domaine du point x_0, y_0 , qui satisfait à l'équation $g = 0$ et qui tend vers z_0 lorsque $x - x_0$ et $y - y_0$ tendent vers

zéro. Les deux équations données auront alors au plus une racine commune voisine de α_0 , et cela, moyennant la condition

$$f[x, y, \alpha(x, y)] = 0.$$

Cette équation représente une courbe qui passe au point m_0 , et qui offre un caractère plus ou moins simple, suivant les propriétés des dérivées de f et g . (Si le point x_0, y_0, α_0 est ordinaire pour chacune des surfaces $f = 0, g = 0$, et si, de plus, les plans tangents en ce point sont distincts, il y passe une branche de l'intersection, et l'on aura une circonstance analogue en projection sous le plan xOy .)

Dans ce cas, au point de vue local, on peut considérer indifféremment l'un ou l'autre des systèmes suivants :

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ g(x, y, \alpha) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f[x, y, \alpha(x, y)] = 0 \\ g(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons dire qu'ils sont *localement équivalents*.

4. Envisageons maintenant l'hypothèse

$$g'_\alpha(x_0, y_0, \alpha_0) = 0, \quad \text{mais avec} \quad g''_{\alpha^2}(x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0.$$

Le point x_0, y_0 est alors sur la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite $\alpha(x, y)$ définie par $g = 0$, ou encore, le point x_0, y_0, α_0 de l'espace est sur le contour apparent de $g = 0$. Dans le plan xOy , il nous faut subdiviser le domaine du point x_0, y_0 en deux régions (a) et (b). Une projetante, issué de la première, rencontre la surface en deux points et nous fournit deux déterminations $\alpha'(x, y)$ et $\alpha''(x, y)$ de la fonction α . Dans la région (b), il n'existe pas de valeur α répondant à la question.

Plaçons-nous dans la région (α), et réservons l'appellation α' pour désigner la cote la plus faible parmi celles des deux points où la projetante issue de m coupe S . Soit M' le point correspondant et soit de même M'' le point dont la cote α'' est la plus grande. Soit S' la portion S , voisine de M_0 , et au-dessous du contour apparent, c'est-à-dire offerte aux points M' , S'' la portion de S offerte aux points M'' .

Pour accomplir l'élimination locale, nous devons écrire simultanément

$$f[x, y, \alpha'(x, y)] = 0, \quad f[x, y, \alpha''(x, y)] = 0.$$

Plaçons-nous dans les conditions les plus simples possibles. Supposons que M_0 soit un point ordinaire pour chacune des surfaces $f = 0$, $g = 0$, et que les plans tangents correspondants soient distincts. Il passera en M_0 une branche et une seule de l'intersection. Nous supposerons encore que sa tangente en M_0 n'est pas parallèle à Ox : *il faut et il suffit pour cela que M_0 ne soit pas sur le contour apparent de $f = 0$* . En projection sur le plan xOy , cette branche d'intersection devient une courbe tangente en m_0 à l'enveloppe des courbes

$$g(x, y, \alpha) = 0.$$

Dans l'espace, le point M_0 la subdivise d'ailleurs en deux tronçons, l'un θ' situé sur S' et l'autre θ'' situé sur S'' .

Cela posé, envisageons les deux systèmes

$$\begin{aligned} (\sigma) \quad & \begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ g(x, y, \alpha) = 0; \end{cases} \\ (\sigma') \quad & \begin{cases} f(x, y, \alpha'(x, y))f[x, y, \alpha''(x, y)] = 0, \\ g(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que le système (σ') admet des solutions étrangères au système (σ) .

En effet, la projection sur xOy du tronçon θ' provient de l'équation

$$f'_1(x, y, x'(x, y)) = c.$$

Considérons un système x, y de valeurs satisfaisant à cette équation. La projetante correspondante coupe S' en un point de cote $\beta''(x, y)$. Les coordonnées de ce point satisfont au système (σ') , mais non à (σ) . Partons de même du tronçon θ'' , représenté en projection par

$$f[x, y, x''(x, y)] = 0.$$

Une des projetantes correspondantes coupe S'' en un point de cote $\beta'(x, y)$, qui satisfait à (σ') et non à (σ) .

Dans le cas actuel, il n'y a donc pas équivalence locale.

§. Supposons maintenant que M_0 soit encore un point ordinaire pour chacune de nos surfaces $f = 0$, $g = 0$, ainsi que pour leur intersection, et se trouve sur les contours apparents de chacune d'elles, c'est-à-dire supposons que l'on ait à la fois

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &= 0, & g(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ f'_\alpha(x_0, y_0, z_0) &= 0, & g'_\alpha(x_0, y_0, z_0) &= 0. \end{aligned}$$

La projection de l'intersection sur le plan xOy offre alors en m_0 un point de rebroussement. Les deux tronçons séparés par ce point proviennent dans l'espace de deux arcs situés, l'un dans la région S' , l'autre dans la région S'' . Pour les mêmes raisons que précédemment, il ne peut y avoir dans ces conditions équivalence locale. Il n'y a exception que si les pro-

jections de l'arc de la région S' et de l'arc de la région S'' se superposent. L'équivalence réapparaît alors, en même temps que, en chaque point x, y de la projection commune, les deux équations

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad g(x, y, \alpha) = 0$$

possèdent deux racines α communes.

6. On pourrait développer la théorie en posant des hypothèses de plus en plus complexes. Nous n'insisterons pas davantage, et nous nous bornerons à montrer l'opportunité des notions précédentes, en y rattachant l'explication d'un paradoxe souvent cité, à propos des familles de courbes gauches à un paramètre. Soit la famille

$$(\Sigma) \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad g(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Elle n'admet d'enveloppe que si l'on peut trouver trois fonctions dérivables x, y, z de α , vérifiant, outre les équations du système (Σ) , les deux suivantes :

$$f'_\alpha = 0, \quad g'_\alpha = 0.$$

En général, il n'y a donc pas d'enveloppe. Cependant, la solution semble tout autre lorsqu'on se place au point de vue suivant. Éliminons α entre les équations du système (Σ) , soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation obtenue. Considérons le système

$$(\Sigma') \quad F(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Les courbes données satisfont à ce système. Or il semble qu'ici, l'application de la règle classique

conduise à une enveloppe, définie par les équations

$$(2) \quad F = 0, \quad g = 0, \quad g'_\alpha = 0.$$

La théorie précédente résout immédiatement la difficulté : en effet, puisque nous avons $g'_\alpha = 0$, nous sommes dans les conditions où le système (Σ') admet des solutions étrangères au système (Σ) . Mais, il est intéressant de pousser plus avant cette étude.

7. Considérons un système de valeurs x_0, y_0, z_0, α_0 satisfaisant à nos trois dernières équations : en vertu des deux dernières, le point x_0, y_0, z_0 est sur la frontière du domaine d'existence de la fonction implicite $\alpha(x, y, z)$ définie par

$$g = 0.$$

Supposons réalisées les conditions où il passe, en x_0, y_0, z_0 , une nappe unique de cette frontière, admettant x_0, y_0, z_0 comme point ordinaire et séparant l'espace environnant en deux régions A et B : en chaque point de A, on obtient deux déterminations $\alpha'(x, y, z)$ et $\alpha''(x, y, z)$ de notre fonction implicite; soit toujours $\alpha' < \alpha''$. Ces déterminations disparaissent dans B.

L'équation

$$f[x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0$$

représente un premier tronçon de $F = 0$. L'équation

$$f[x, y, z, \alpha''(x, y, z)] = 0$$

en représente un second. Ces deux tronçons se soudent suivant une ligne L, lieu des points qui vérifient les équations (2). *Supposons d'abord que f'_α ne soit pas nul sur L* : alors, cette courbe est une

ligne de contact de $F = 0$ avec l'enveloppe des surfaces $g = 0$: il suffit pour le voir de pratiquer dans les surfaces étudiées des sections par des plans $z = \text{const.}$, ce qui nous ramène aux conditions du n° 4, puis de faire varier ensuite le plan de section.

Cela posé, en un point x, y, z du tronçon

$$f(x, y, z, \alpha'(x, y, z)) = 0,$$

l'équation $g = 0$ a deux racines localement acceptables : la plus petite α' vérifie

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

mais il n'en est pas de même de la plus grande β'' . Nous employons à dessein cette notation β'' pour indiquer que la courbe définie par les équations

$$f[x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0, \quad g(x, y, z, \beta'') = 0$$

ne satisfait plus au système (Σ) . Pour l'autre tronçon, on peut faire un raisonnement analogue.

D'après cela, en un point de $F = 0$, voisin de M_0 , il passe deux courbes satisfaisant au système (Σ') : une courbe C_α , répondant au système (Σ) , et une courbe C_β , étrangère à ce système.

Sur la ligne L , les valeurs α et β se confondent : montrons cependant qu'elle ne joue pas le rôle d'une enveloppe.

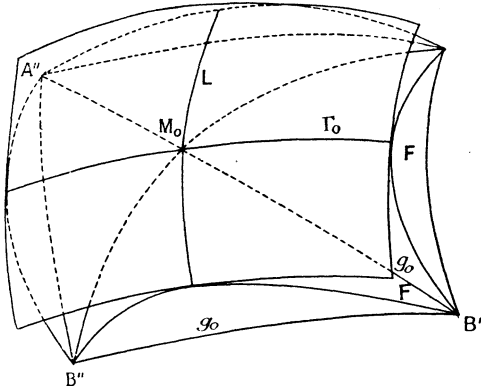
En chaque point de L , passe une surface $g = 0$ et une seule, tangente à l'enveloppe des surfaces $g = 0$, donc tangente aussi à $F = 0$. Désignons par Γ_0 la ligne de contact de cette enveloppe et de la surface

$$(g_0) \quad g(x, y, z, \alpha_0) = 0$$

qui passe en M_0 . Pour un observateur de la région B , qui regarde M_0 , la surface F est en avant de la sur-

face g_0 le long de la ligne L, et l'inverse se produit le long de Γ_0 . L'intersection de F et de g_0 présente donc

Fig. 2.



en M_0 deux branches réelles, dont les tangentes sont disposées par rapport à L et Γ_0 comme l'indique la figure ci-dessus.

Prenons un point quelconque sur l'une de ces branches de courbe : en ce point, l'équation

$$g(x, y, z, \alpha) = 0$$

a deux racines, dont l'une est égale à α_0 . La seconde est plus grande que α_0 , ou plus petite que α_0 , suivant que le point x, y, z considéré appartient à l'une ou à l'autre des portions de la surface g_0 délimitées par la ligne Γ_0 . Supposons, pour fixer les idées, que la seconde racine surpasse α_0 sur la portion $\Gamma_0 A' A''$, et soit dépassée par elle sur $\Gamma_0 B' B''$.

Supposons en outre que la portion $LA' B'$ de F soit celle qui correspond à l'équation

$$f[x, y, z, \alpha'(x, y, z)] = 0,$$

que la portion $LA''B''$ corresponde à

$$f[x, y, z, x''(x, y, z)] = 0.$$

Dans ces conditions, sur l'arc M_0A' de l'intersection, la plus petite des deux racines est $\cot \alpha_0$. Puisque nous sommes sur le tronçon $LA'B'$, nous pouvons affirmer que l'arc M_0A' appartient à la courbe C_α pour $\alpha = \alpha_0$. Il en est de même de l'arc M_0B'' , le long duquel la plus grande racine est α_0 , alors qu'on se trouve sur le tronçon $LA''B''$.

Par contre, les arcs M_0A'' et M_0B' appartiendront à une courbe C_β telle que $\beta = \alpha_0$. Et en effet, sur M_0A'' par exemple, α_0 est la plus petite des deux racines, alors qu'on se trouve sur le tronçon $LA''B''$.

En résumé, aucune propriété spéciale ne distingue les points de L des autres points de la surface $F = 0$: par tout point de cette surface voisin de M_0 il passe, dans les conditions précédentes, une courbe C_α et une courbe C_β . Leurs tangentes étant distinctes, aucun phénomène de contact ne se produit.

8. Pour terminer, examinons sommairement ce qui arrive en supposant remplies les conditions pour l'existence de l'enveloppe. Il nous suffit de nous reporter à ce qui a été dit au n° 5, en recourant au même processus que précédemment : génération de la figure à l'aide de sections par des plans $z = \text{const.}$ Nous obtenons alors le résultat suivant : il y a encore deux tronçons de la surface $F = 0$ qui se soudent le long de la ligne L , mais, cette fois, L joue le rôle d'une arête de rebroussement. Chaque courbe C_α est alors partagée en deux arcs par son point de contact avec l'enveloppe L . L'un des tronçons de $F = 0$ est le lieu

des arcs d'une série, l'autre tronçon est décrit par les arcs de l'autre série.

Il peut arriver comme cas particulier que les deux tronçons de $F = 0$ se superposent l'un à l'autre, et qu'en un point de cette surface double, les deux équations

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad g(x, y, z, \alpha) = 0$$

aient deux racines communes en α , qui se confondent sur l'enveloppe. Cette circonstance se présente toujours lorsqu'on part d'une surface donnée et qu'on considère sur cette surface une famille de courbes à un paramètre tangente à une courbe fixe de la surface. L'arête de rebroussement constituée par cette courbe est alors, il va sans dire, purement fictive.

[O¹⁵h]

SUR LES OMBILICS ;

PAR M. PAUL MONTEL.

Si l'on appelle « ombilic d'une surface » tout point de cette surface en lequel l'indicatrice d'Euler est une circonférence, on sait que la seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics est la sphère. Je me propose de donner une démonstration géométrique simple de cette proposition (1).

(1) M. R. Harmegnies a donné aussi, dans ce journal, une démonstration géométrique du même théorème (*Nouvelles Annales*, t. XX, 1920, p. 180).

Supposons qu'il existe une surface (S) dont tous les points soient des ombilics. Le cône circonscrit à cette surface dont le sommet est un point arbitraire P est tangent à la surface (S) le long d'une courbe (C); en chaque point M de cette courbe, la direction de la tangente à (C), conjuguée de la direction MP, est perpendiculaire à MP puisque M est un ombilic de (S). La courbe (C) est donc normale à tous les rayons vecteurs issus de P : il en résulte que ce rayon vecteur a une longueur constante et que la sphère (Σ), de centre P et de rayon PM, est orthogonale à (S) en tous les points de (C).

Laissons fixe le point M et supposons que le point P se déplace dans le plan tangent en M à la surface (S). On voit que cette surface (S) est orthogonale à toutes les sphères (Σ) de rayons PM; toutes ces sphères sont tangentes au point M à la normale MN à la surface (S). Une inversion de pôle M remplacera les sphères (Σ) par une famille de plans parallèles à la direction MN et la surface (S), par une surface normale à tous ces plans, c'est-à-dire par un plan perpendiculaire à MN. La surface (S), qui est l'inverse d'un plan, est donc une sphère.

La démonstration s'applique à toute surface (S) pour laquelle on peut définir les ombilics; analytiquement, les fonctions qui permettent la représentation de la surface doivent posséder des dérivées premières et des dérivées secondes. Dans le cas où la surface (S) est analytique, il suffit de supposer qu'il existe une petite région de cette surface dont tous les points h sont des ombilics. On choisit alors le point M dans cette région.

On peut rattacher à la question précédente différents problèmes qui se présentent naturellement au sujet des

ombilics des surfaces algébriques. Une telle surface peut posséder une ou plusieurs lignes d'ombilics formant des courbes algébriques.

Quelles sont les limites supérieures du nombre et des degrés des lignes d'ombilics que peut posséder une surface algébrique de degré m ?

**CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
EN 1922.**

Mathématiques (1^{re} COMPOSITION) (1).

NOTATION. — *Le symbole $\text{th } u$ désigne la tangente hyperbolique*

$$\text{th } u = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

I. *Exprimer $Y = \text{th } 3u$ en fonction de $X = \text{th } u$.*

Soit $Y = f(X)$ la fonction obtenue. Calculer avec une décimale exacte l'aire comprise entre la courbe $Y = f(X)$ et les droites $X = 3Y$, $X = 0$, $X = 1$.

Développer $f(X)$ en série convergente procédant suivant les puissances entières positives croissantes de X .

Soit $\varphi(X)$ la fonction formée par l'ensemble des trois premiers termes, à coefficients non nuls, du

(1) Voir plus loin l'énoncé et la solution de la deuxième composition.

développement précédent. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ , la réalité des racines de l'équation

$$\varphi(\operatorname{th} u) = 3 \operatorname{th} u + \lambda.$$

II. Exprimer, pour n entier positif, $Y = \operatorname{th} nu$ en fonction de $X = \operatorname{th} u$.

Soit $Y = F(X)$ la fonction obtenue. Décomposer les deux termes de la fraction rationnelle $F(X)$ en facteurs du premier et du second degré à coefficients réels.

Montrer que la relation $Y = F(X)$ équivaut, si l'on pose $X = \sin x$, $Y = \sin y$, à une relation simple entre les tangentes trigonométriques

$$\operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2} \right).$$

Étudier les variations de la fonction $Y = F(X)$, X variant de $-\infty$ à $+\infty$, et les représenter graphiquement.

Soit l'équation $F(X) = F(X_0)$, X_0 étant une constante donnée différente de -1 et de $+1$. Calculer ses racines à l'aide de X_0 et des tangentes trigonométriques des angles $\frac{K\pi}{n}$ (K entier). Discuter la réalité.

Épure de Géométrie descriptive.

La ligne de terre étant figurée par le petit axe de la feuille, un tore a son centre O dans le premier dièdre à 14^{cm} de chacun des plans de projection; ce point O est dans le plan de profil figuré par le grand axe de la feuille. L'axe du tore est vertical; son cercle générateur et son cercle de

gorge ont tous deux 4^{cm} de rayon. Par le diamètre du tore parallèle à la ligne de terre, on mène un plan bitangent au tore, et l'on fait tourner autour de ce diamètre la surface limitée par le contour extérieur de la courbe de section : on engendre ainsi un solide Σ .

On considère d'autre part un hyperboloïde de révolution à une nappe H , ayant même axe que le tore, et dont la méridienne admet pour cercles osculateurs en ses sommets les cercles formant la méridienne du tore. (À défaut d'une détermination géométrique de l'hyperbole méridienne, on pourra opérer analytiquement; dans ce cas, on indiquera le calcul dans un angle inférieur de la feuille.)

1° Représenter le solide S commun à H et à Σ .

2° On considère des projetantes perpendiculaires au deuxième bissecteur. Construire pour le solide S le contour apparent dans l'espace et le contour apparent en projection sur le second bissecteur.

Mathématiques (2^e COMPOSITION).

Un plan vertical est rapporté à deux axes, l'un, Ox , horizontal, l'autre, Oy , vertical, dirigé vers le haut.

1° Écrire l'équation de la trajectoire d'un point pesant M qui se meut dans ce plan, sachant qu'il passe par l'origine des coordonnées à l'origine du temps, et que sa vitesse lors du passage en O fait l'angle α avec Ox et a pour mesure $\sqrt{2gh}$, où g

désigne l'accélération de la pesanteur et h une longueur donnée. Lorsque α varie, h restant constant, on a une famille de trajectoires paraboliques (T) admettant toutes pour directrice la droite $y = h$. Donner l'équation de la parabole de sûreté, enveloppe de ces courbes (T).

2° On fait toujours varier α , laissant h constant. Former l'équation du lieu (L) des points des courbes (T) où la tangente fait l'angle β donné avec Ox . Trouver l'enveloppe des lignes (L) quand β varie. Montrer qu'on passe simplement du point de contact, variable, de la ligne (L) avec son enveloppe au point variable de la ligne (L), en lequel la tangente est parallèle à Ox .

3° Soient PQ_1, PQ_2 les tangentes aux deux trajectoires (T) qui passent en un point $P(x_0, y_0)$ donné. Trouver les bissectrices PB, PB' de ces droites, et montrer qu'elles ne dépendent pas de h .

La parabole de sûreté varie avec h ; montrer qu'une telle parabole passe par P ; trouver une relation simple entre les éléments de cette parabole en P et les droites PB, PB' .

Il y a une infinité de mouvements d'un point pesant l'amenant à passer par les points donnés O et P . Soient, dans un tel mouvement, OV et PV' les vecteurs vitesses du mobile lors des passages en ces points. Trouver les lieux géométriques (H) et (H') des points V et V' . Par O on mène un vecteur OV'_1 se déduisant par translation du vecteur PV' . Étudier la variation de $\overrightarrow{VV'_1}$ en fonction de la durée θ du parcours de l'arc OP de la trajectoire correspondant à OV .

d'où

$$sS = h \sin^2 \alpha.$$

Soient T et N les points où la tangente et la normale en O rencontrent l'axe de (T). On a, d'après une propriété classique de la parabole,

$$sT = 2sS = 2h \sin^2 \alpha,$$

d'où

$$Ns = Ot \cot \alpha = sT \cot^2 \alpha = 2h \cos^2 \alpha.$$

Mais la sous-normale Ns est égale au double du paramètre de (T). Si donc on appelle σ le point où la directrice (D) de (T) rencontre sS, on a

$$s\sigma = sS + S\sigma = h \sin^2 \alpha + h \cos^2 \alpha = h.$$

Donc, *quel que soit l'angle α , la directrice (D) de (T) est la droite $y = h$* ⁽¹⁾.

Soit A le point où (D) rencontre Oy. F étant le foyer de (T), on a

$$OF = OA.$$

Donc, *quand α varie, le lieu de F est le cercle O(h) de centre O et de rayon h.*

Soit I le second point de rencontre de OF avec (T). Menons la droite (Δ), d'équation $y = 2h$, et soient H et K les projections du point I sur (D) et sur (Δ). On a

$$OF = HK, \quad FI = IH,$$

d'où, par addition,

$$OI = IK.$$

Par conséquent, le point I appartient à une parabole (Π) de foyer O et de directrice (Δ). On voit en outre que (T) et (Π) se touchent en I, la tangente en ce point à chacune des paraboles étant la bissectrice de l'angle \widehat{OIK} . Donc, *quand α varie, (T) a pour enveloppe la parabole (Π), dite parabole de*

(1) On peut aussi écrire

$$\text{paramètre} = \frac{1}{2} \frac{Os^2}{sS}, \quad \dots$$

sûreté. Remarquons d'ailleurs que la parabole (T) passant par le point O et touchant la droite de l'infini au point à l'infini de Oy, c'est-à-dire passant par trois points fixes, ne peut toucher son enveloppe qu'en un point. On est ainsi assuré que (I) n'a pas d'autre enveloppe que (II).

L'équation de (II) est

$$x^2 + y^2 = (y - 2h)^2$$

ou

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = 0.$$

2. Soit L le point (*fig. 1*) de la parabole (T), de foyer F, où la tangente est parallèle à une droite donnée (β). R étant la projection de L sur (D), le triangle FLR est isocèle ($LF = LR$) et FR est perpendiculaire à (β). FL a donc aussi une direction fixe, quelle que soit la parabole (T). On voit donc qu'on passe du point F au point L par une transformation (\mathfrak{C}) définie de la manière suivante : étant donné le point F, on construit le point L tel que le triangle FRL ayant ses trois côtés de directions fixes, son troisième sommet R soit sur (D).

Cette transformation (\mathfrak{C}), étendue à tout le plan, est une *transformation homographique* : en effet, si le point F décrit une droite, on reconnaît immédiatement que le point L décrit une droite concourant avec celle-ci et avec (D). En outre, si F s'éloigne à l'infini, L en fait autant. (\mathfrak{C}) est donc une transformation homographique conservant la droite de l'infini. C'est ce qu'on appelle une *affinité*. On sait qu'une affinité transforme une conique en conique du même genre. On sait aussi qu'elle conserve les relations de parallélisme et qu'elle n'altère pas les rapports de division sur une droite.

La courbe (L) de l'énoncé est la transformée du cercle O(h) par l'affinité (\mathfrak{C}). C'est donc une *ellipse* dont on reconnaît les propriétés suivantes :

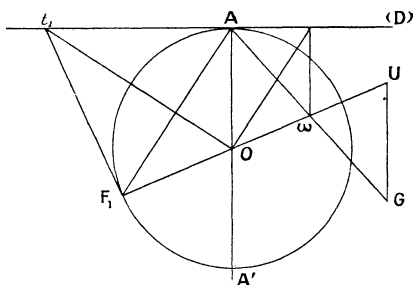
1° (L) passe en A.

2° Soit F_1 (*fig. 2*) le point de O(h) tel que AF_1 soit parallèle à FR (*fig. 1*). Quand F vient en F_1 , L vient en O. *Donc (L) passe par le point O.*

3° Le centre ω de (L) est le transformé du point O par (\mathfrak{C}). Ce point est équidistant de O et de (D). *Donc il appartient à la parabole (II') de foyer O et de directrice (D).*

4° Deux triangles FRL et $F'R'L'$ sont homothétiques. Donc FF' et LL' se coupent sur RR' en (D) . En prenant F' infini-

Fig. 2.



ment voisin de F sur le cercle $O(h)$, on voit que la tangente à (L) en L rencontre (D) au même point t que la tangente à $O(h)$ en F .

En particulier, la tangente en O à (L) , $O t_1$, est perpendiculaire à $A F_1$, donc parallèle à (β) . On voit encore qu'au point G , transformé du point A' de $O(h)$ diamétralement opposé à A' , la tangente est horizontale. Mais ce point est diamétralement opposé sur (L) au point A . Donc, en A , la tangente à (L) est aussi horizontale. C'est donc (D) même.

En résumé, nous avons obtenu les propriétés suivantes de l'ellipse (L) : (L) passe en O où sa tangente est parallèle à (β) ; en A où sa tangente est (D) . Son centre ω est déterminé par une construction simple. L'ellipse doit donc être considérée comme bien connue.

Soit U le point de (L) diamétralement opposé à O . Le point U est sur la parabole homothétique par rapport à O de (Π') , le rapport d'homothétie étant 2. Cette parabole n'est autre que la parabole de sûreté (Π) . En outre, la tangente en U à (L) est parallèle à $O t_1$. Il en est visiblement de même de la tangente à (Π) au même point. Donc (L) touche (Π) en U .

Quand β varie, (L) passe par trois points fixes, à savoir le point O et deux points confondus en A . (L) ne peut donc toucher son enveloppe qu'en un point. On en conclut que (L)

a pour seule enveloppe la parabole de sûreté (II) (voir la Note finale).

Le point variable de (L) où la tangente est horizontale est le point G, diamétralement opposé au point A. UG est équi-pollent à AO. Telle est la relation simple qui existe entre les points U et G.

3. a. Soit J la projection du point donné P sur (D) (fig. 3). Les foyers F_1 et F_2 des deux paraboles (T) qui passent en P sont les points d'intersection du cercle $O(h)$ et du cercle $P(PJ)$.

Les tangentes PQ_1 et PQ_2 sont les bissectrices des angles $\widehat{JPF_1}$ et $\widehat{JPF_2}$.

Dans ce qui suit, nous désignerons par (X) l'angle, défini à 2π près, que fait une droite orientée X avec Ox , et par K_1, K_2, \dots des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

On a les relations

$$2(PQ_1) = (PJ) + (PF_1) + 2K_1\pi,$$

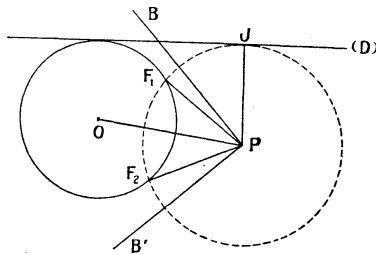
$$2(PQ_2) = (PJ) + (PF_2) + 2K_2\pi,$$

$$(PF_1) + (PF_2) = 2(PO) + 2K_3\pi,$$

d'où l'on tire

$$(PQ_1) + (PQ_2) = (PJ) + (PO) + (K_1 + K_2 + K_3)\pi.$$

Fig. 3.



Soit maintenant PB la bissectrice de l'angle $\widehat{Q_1PQ_2}$, on a

$$2(PB) = (PQ_1) + (PQ_2) + 2K_4\pi,$$

d'où

$$(PB) = \frac{(PJ) + (PO)}{2} + K_4 \pi + \frac{K_1 + K_2 + K_3}{2} \pi.$$

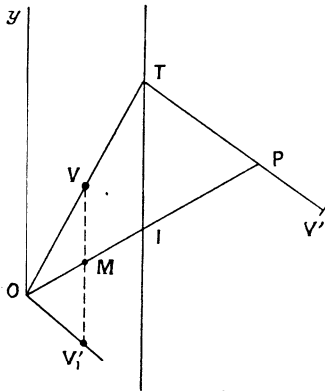
Si l'on fait varier les K de toutes les manières possibles, on obtient pour (PB) les mêmes orientations que pour les quatre demi-bissectrices de l'angle \widehat{OPJ} . Donc, laissant maintenant de côté la question de sens, les droites PB et PB' de l'énoncé sont parallèles aux deux bissectrices, extérieure et intérieure, de l'angle \widehat{OPJ} . Elles ne dépendent pas de h .

Il existe une parabole de sûreté (π) passant en P . C'est celle qui correspond à la valeur de $h = \frac{OP}{2}$. Si l'on renversait le sens de la verticale, il y aurait deux paraboles de sûreté, (Π) et (Π'), se coupant orthogonalement en P .

PB et PB' sont les tangentes (ou les normales) à ces deux paraboles.

b. Quelle que soit la parabole (T) passant en O et P , les tangentes à (T) en ces points se coupent en T sur la verticale du point I , milieu de OP (fig. 4). Les vecteurs OV et PV' ,

Fig. 4



dirigés suivant ces tangentes, ont même composante horizontale, en sorte que, OV'_1 étant équipollent à PV , les points V

et V_1 sont une même verticale. La droite OP coupe VV_1 en son milieu M.

Soit θ le temps de parcours de l'arc OP de trajectoire. VV_1 représente l'accroissement de la composante verticale de la vitesse pendant ce temps. On a donc, en grandeur et en signe.

$$VV_1 = -g\theta^2 \quad \text{ou} \quad V_1V = g\theta,$$

ce qui répond à la dernière question.

D'autre part, si l'on projette obliquement le mouvement sur OP, parallèlement à la verticale Oy, la projection du mobile décrit OP avec une vitesse uniforme égale à OM. On a donc

$$OM \cdot \theta = OP,$$

d'où

$$OM \cdot V_1V = g \cdot OP.$$

Mais

$$V_1V = 2MV,$$

donc

$$OM \cdot MV = \frac{1}{2}g \cdot OP.$$

Si donc on rapporte le lieu du point V à des axes obliques, OP et Oy, ce lieu a pour équation

$$xy = \frac{1}{2}g \cdot OP.$$

C'est une hyperbole (H), ayant pour asymptotes OP et Oy.

V_1 décrit l'hyperbole supplémentaire (H''), et V' décrit l'hyperbole (H') qui se déduit de (H'') par la translation du vecteur OP.

On voit que OV est minimum quand la direction de la vitesse en O est bissectrice de l'angle \widehat{POy} .

NOTE.

Au n° 2, nous avons reconnu que l'enveloppe des ellipses (L) se confond avec celle des paraboles (T). Cela rentre dans le théorème général que voici :

Soit une famille de courbes (T) définies par l'équation

$$(1) \quad f(x, y, \lambda) = 0,$$

où λ est un paramètre variable. Sur chaque courbe (T) marquons un point M satisfaisant à la condition

$$(2) \quad g(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$

où μ est un nombre donné et g une fonction donnée. Quand λ varie, le point M décrit une courbe (L) qui dépend de μ .

Quand on fait varier μ , les courbes (L) ont une enveloppe qui comprend celle des courbes (T) quand on fait varier λ .

En effet, une courbe (L) peut être considérée comme ayant pour équation (1), à la condition de remplacer μ par sa valeur, fonction de x, y et λ , tirée de (2). Cette substitution étant faite, posons

$$(3) \quad \varphi(x, y, \mu) = f(x, y, \lambda).$$

(L) a pour équation

$$(4) \quad \varphi(x, y, \mu) = 0.$$

Un point caractéristique de (L) satisfait à l'équation (4) et à l'équation

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = 0.$$

Mais un point caractéristique de (T) satisfait à l'équation (1) ainsi qu'à l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0,$$

(1) et (6) entraînent (4) et (5), ce qui établit la proposition.

Le résultat du n° 2 n'est évidemment qu'un cas très particulier de ce théorème.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1922.

Mathématiques (1^{re} COMPOSITION).

On considère la famille de sphères (S), à deux paramètres λ, μ , d'équation

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

A, B, C, D représentant les expressions ci-dessous :

$$A = 2a(y + z),$$

$$B = -[x^2 + y^2 + z^2 + 2\sqrt{2}ax - 2a^2 - k],$$

$$C = -[x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}ax + 2a^2 - k],$$

$$D = 2a(y - z),$$

et a et k étant des constantes supposées données ($a > 0$, k quelconque).

1° Montrer que les sphères (S) sont orthogonales à une sphère fixe (D) et que le lieu géométrique de leurs centres est une quadrique (Q).

2° Si l'on fait varier l'un des deux paramètres λ , μ seul, les sphères ainsi obtenues passent par un même cercle qui engendre, lorsqu'on fait varier à son tour le second paramètre, une surface (Σ) à laquelle chaque sphère (S) est doublement tangente. Deux quelconques des cercles générateurs sont-ils sur une même sphère? Peuvent-ils être dans un même plan?

3° Montrer que l'on peut obtenir la surface (Σ) à l'aide du mode de génération que l'on vient de décrire en partant d'autres quadriques que la quadrique (Q) — ayant les mêmes axes qu'elle — et d'autres sphères fixes que la sphère (D). A combien de modes de génération ce procédé peut-il conduire? Discuter, suivant les valeurs de k , la nature des quadriques obtenues, et montrer que les sphères fixes correspondantes sont orthogonales deux à deux.

4° Étudier sommairement la forme de la courbe d'intersection de la surface (Σ) par le plan xOy , suivant les différentes valeurs de k . Contrôler la discussion algébrique par des considérations géo-

métriques résultant du mode de génération de la courbe.

5° *De quoi se compose le contour apparent de la surface (Σ) sur le plan xOy ? Donner un régionnement de ce plan suivant le nombre de points réels de la surface qui se projettent en un de ses points, et en déduire les différentes formes que peut prendre la surface.*

6° *Les différents modes de génération, décrits au paragraphe (3°), mettent en évidence plusieurs séries de cercles générateurs. Discuter leur réalité. Y a-t-il, en dehors de ces séries, d'autres cercles sur la surface (Σ)?*

(2° COMPOSITION).

Deux fils parfaitement élastiques sont attachés, chacun par une de ses extrémités, en deux points diamétralement opposés d'une petite balle sphérique; les autres extrémités de ces fils sont fixées, respectivement, en deux points fixes A et A', situés sur une même verticale. On assimilera la balle à un point matériel de masse m; les masses des fils seront supposées négligeables, ainsi que les frottements aux points d'attache et la résistance de l'air. On ne considérera que des positions de la balle pour lesquelles les deux fils soient tendus, de sorte que ces fils seront toujours rectilignes. Il est, enfin, entendu qu'aucun obstacle ne s'oppose aux déplacements de la balle et des fils, entre les plans horizontaux de A et de A'.

On désignera par O le milieu de AA', par Ox la demi-verticale descendante issue de O, par Oy une demi-horizontale fixe issue de O, par A celui des deux points fixes qui est sur Ox, par M une position

quelconque de la balle. On posera $OA = a$, $AM = \rho$, $A'M = \rho'$. On admettra qu'en vertu de leur élasticité, qui est la même pour tous deux, les fils exercent sur la balle des forces mesurées respectivement par $k \frac{\rho - c}{c}$ et $k \frac{\rho' - c'}{c'}$, k étant une constante qui ne dépend que de la nature des fils, et c et c' étant les longueurs auxquelles les deux fils se réduiraient respectivement s'ils cessaient d'être tendus.

1° On supposera, dans tout le problème, que $c + c' = a$, et que la position d'équilibre de la balle est en O . Quelle est la relation entre m , k , c , c' et l'accélération g de la pesanteur qui traduit cette dernière condition?

2° Montrer que la balle, écartée de O et abandonnée sans vitesse en un point de AA' , suffisamment voisin de O , exécute des oscillations isochrones. Calculer c , c' et k en fonction de a , m , g et de la longueur λ du pendule simple dont les petites oscillations seraient isochrones aux oscillations de la balle considérées. On désignera, s'il y a lieu, par T la durée d'une oscillation simple de ce pendule.

3° Soit F la résultante des actions qui s'exercent sur la balle, quand elle est placée en un point quelconque M du plan xOy , et soient x , y les coordonnées de ce point. Montrer que le champ des forces F dérive d'une fonction de forces $U(x, y)$; et que, si l'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur à 2 par rapport à la distance OM , on peut prendre pour expression approchée de $U(x, y)$, au voisinage de O , le polynôme

$$U_0(x, y) = \frac{k}{a} y^2 - \frac{k}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c'} \right) (x^2 + y^2).$$

Étudier sommairement les courbes de niveau et les lignes de forces du champ, en adoptant cette valeur approchée de la fonction de forces, et en supposant $\lambda = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

4° *Avec la même approximation pour $U(x, y)$, et la même valeur pour λ , étudier le mouvement que prend la balle, quand on l'abandonne sans vitesse en un point quelconque $x = p, y = q$ du plan xOy , voisin de O .*

5° *On lance la balle, à partir de O , dans la direction Oy , avec la vitesse $v_0 = \sqrt{17\lambda g}$. De quel angle maximum le fil supérieur s'écartera-t-il de la verticale? — On supposera encore $\lambda = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, mais l'approximation admise pour $U(x, y)$ dans les deux questions précédentes cesse ici d'être valable.*

QUESTIONS.

Nous reproduisons ci-dessous les énoncés de quelques questions publiées dans les *Nouvelles Annales*, depuis 1919, et dont il n'a pas été publié de solutions. Il n'a pas été reçu de réponses aux questions marquées d'un astérisque. Pour les autres, nous avons des réponses en portefeuille. Nous croyons cependant que la reproduction en sera agréable à nos lecteurs.

2388. Dans un quadrilatère complet, les orthopôles de chacun des côtés, pris par rapport au triangle formé par les trois autres côtés, sont quatre points collinéaires avec les orthocentres des quatre triangles obtenus en prenant les côtés trois à trois.

En déduire que, dans un triangle, l'orthopôle d'une droite appartient à la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre sur la transversale réciproque de cette droite.

R. GOORMAGHTIGH.

*2390. Étudier la surface qui a pour équation

$$x^2(z-a)^2 + z^2(y^2 + z^2 - a^2) = 0,$$

les axes étant rectangulaires; droites de la surface, cercles, coniques, etc.; génération de la surface par le mouvement d'un cercle, d'une ellipse.

J. LEMAIRE.

*2393. Si l'équation d'une surface en coordonnées homogènes est de la forme

$$A(x, y, z) \times \varphi^m(x, y, z) + B(x, y, z) \times \varphi^{m-1}(x, y, z)t + \dots = 0,$$

de sorte que la courbe représentée par les équations $t = 0$, $\varphi = 0$ est une ligne de la surface dont l'ordre de multiplicité est m , l'équation du système des m plans tangents à la surface en un point de cette ligne s'obtient en remplaçant, dans l'équation de la surface, $\varphi(x, y, z)$ par $X\varphi'_x + Y\varphi'_y + Z\varphi'_z$ et t par T .

G. FONTENÉ.

2397. Soient P et Q les intersections d'une conique (S) avec les tangentes à une conique (Σ) issues d'un point variable M de la première. On sait que PQ enveloppe une conique appartenant au faisceau (S, Σ). Démontrer que le point de contact de PQ avec son enveloppe est, par rapport au segment PQ , le conjugué harmonique de l'intersection de cette droite avec la polaire de M par rapport à (Σ).

G. BOULLOUD.

*2399. Soient α_1 et α_2 , β_1 et β_2 , γ_1 et γ_2 les milieux des arcs BC , CA , AB du cercle circonscrit à un triangle ABC , et α'_1 et α'_2 , β'_1 et β'_2 , γ'_1 et γ'_2 leurs symétriques par rapport aux côtés BC , CA , AB respectivement. Montrer que les quatre cercles $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, $\alpha'_1\beta'_2\gamma'_2$, $\beta'_1\alpha'_2\gamma'_2$, $\gamma'_1\alpha'_2\beta'_2$ se coupent à l'orthocentre H du triangle ABC . Indiquer les centres et les rayons de ces cercles.

V. THÉBAULT.

2402. Si l'on joint un point d'une ellipse aux deux sommets situés sur un axe et le point diamétralement opposé aux deux sommets situés sur l'autre axe, les quatre droites ainsi obtenues et les axes de l'ellipse sont six tangentes d'une parabole.

F. BALITRAND.

*2403. L'équation

$$1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^m - (\beta x)^n = 0,$$

α et β étant des quantités positives, a deux racines positives, si

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn};$$

on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}.$$

A. PELLET.

*2409. Si deux triangles sont à la fois homologues et orthologiques, les deux centres d'orthologie sont sur la perpendiculaire abaissée du centre d'homologie sur l'axe d'homologie.

Application. — Soient M et M' deux points inverses par rapport à un triangle ABC, $\mu_1, \mu_2, \mu_3; \mu'_1, \mu'_2, \mu'_3$ leurs projections sur BC, CA, AB; si les droites A $\mu_1, B\mu_2, C\mu_3$ et A $\mu'_1, B\mu'_2, C\mu'_3$ sont concourantes, elles se coupent sur MM' et les axes d'homologie des triangles ABC et $\mu_1\mu_2\mu_3, ABC$ et $\mu'_1\mu'_2\mu'_3$ sont perpendiculaires à MM'.

R. BOUVAIST.

2410. Construire une conique connaissant un point M, le cercle osculateur en ce point et deux tangentes (ou deux points).

A. PELLET.

*2411. Une horloge porte une aiguille des heures, une aiguille des minutes et une aiguille des secondes, montées sur le même pivot. Ces trois aiguilles ne peuvent être en coïncidence qu'à midi, comme on le reconnaît facilement. A quelle heure, non infiniment voisine de midi, sont-elles contenues dans un angle aussi petit que possible?

R. B.



[R1]

**SUR UNE MANIÈRE SIMPLE D'OBTENIR GÉOMÉTRIQUEMENT
LES FORMULES DE LORENTZ ;**

PAR M. MAX MORAND,
Élève de l'École Normale supérieure.

Avant d'entrer plus en détail dans la démonstration des formules de Lorentz, il convient d'écarter une objection importante qui ne peut manquer de venir à l'esprit.

On peut analyser de la façon suivante le phénomène de la contraction. Des observateurs voient passer une règle animée d'un mouvement de translation uniforme. Ils font sur cette règle, au moyen de deux dispositifs convenables dont la distance est mesurable, deux marques simultanées (pour eux). Les observateurs entraînés avec la règle mesurent également, au moyen de leurs instruments, la distance des deux marques. Parler de contraction, c'est affirmer que le nombre mesurant la distance des marques, pour les observateurs qui leur sont liés, est plus grand que le nombre mesurant la distance de ces marques pour les observateurs qui les ont vu passer.

Or on se demande, non sans raison, comment des observateurs différents peuvent comparer des nombres de mesures quand leurs unités ne sont pas définies, et ne paraissent pas aisées à définir.

Supposons, par exemple, qu'un système d'observateurs se serve du mètre et l'autre de la toise ; l'un four-

nira certainement un nombre supérieur à l'autre, et cela sans que le phénomène de contraction ait eu à jouer le moindre rôle.

A-t-on le droit de parler d'une « même unité » employée par les deux systèmes d'observateurs en mouvement relatif, et comment peut-on la définir ?

Telles sont deux questions auxquelles il est nécessaire de répondre pour donner un sens aux formules démontrées plus bas.

Considérons deux laboratoires immobiles l'un par rapport à l'autre. Les observateurs de ces deux laboratoires ont tout loisir de transporter leurs unités de longueur d'un laboratoire dans l'autre, et de les comparer. Je suppose qu'ils les trouvent rigoureusement égales. Ces opérations une fois terminées, et chaque laboratoire conservant son étalon de longueur, on met en mouvement l'un des laboratoires, en lui imprimant une accélération très faible. Pendant cette période très longue où l'un des laboratoires acquiert par rapport à l'autre une vitesse finie, l'intérieur des laboratoires reste constamment pareil à lui-même et, en particulier, les mesures de longueur qu'on y peut faire continuent à rester concordantes. Quand les observateurs ont atteint une vitesse v les uns par rapport aux autres, l'accélération est annulée et le mouvement devient uniforme. On réalise alors l'expérience décrite plus haut et l'on fait les mesures nécessaires, chaque observateur utilisant la règle qu'il a emportée avec lui. C'est en employant ces unités de longueurs que l'on peut parler de contraction. Elles sont considérées comme étant les mêmes, bien qu'elles ne soient plus comparables l'une à l'autre par suite de leur mouvement relatif, mouvement qui est d'ailleurs la cause d'une apparente contraction.

Supposons maintenant que le système d'observateurs primitivement mis en mouvement soit lentement arrêté, avec une accélération négative infiniment petite. Pendant cette nouvelle période, chaque laboratoire continue à rester semblable à lui-même. Quand ils sont redevenus immobiles l'un par rapport à l'autre, une nouvelle comparaison des règles est rendue possible. On trouve que les unités de longueurs n'ont pas changé. D'autre part, la distance des marques peut être comparée à la distance des deux dispositifs ayant servi à les tracer. On peut s'assurer directement que la première distance est plus grande que la seconde, et l'on constate objectivement la contraction, indépendamment des unités de mesure.

Un raisonnement semblable s'applique aux horloges. Chaque système d'observateurs doit utiliser des horloges qui, immobiles les unes par rapport aux autres, marchent rigoureusement aussi vite. Remarquons d'ailleurs que l'unité de longueur une fois définie dans un système comme nous venons de le faire, l'unité de temps en découle nécessairement. Elle doit être telle que la vitesse de la lumière soit mesurée par le nombre c dont la valeur est fixée à l'avance.

Dans les formules qui suivent, on supposera toujours qu'il est fait usage des unités de longueur et de temps que nous venons de définir. Ce sont celles qui restent toujours semblables à elles-mêmes pour des observateurs qui leur sont liés, et qui donnent les mêmes mesures quand on fait $v = 0$ dans les formules trouvées.

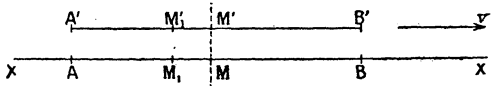
L'explication de la contraction de Lorentz, donnée depuis longtemps déjà par M. Langevin, a montré l'importance du rôle que joue dans les nouvelles théories le principe de la constance de la vitesse de la lumière.

La première conséquence de ce principe est la relativité de la simultanéité. Celle-ci entraîne la relativité des longueurs (contraction de Lorentz).

Nous nous sommes demandé si, pour arriver aux formules de Lorentz, il ne serait pas plus instructif et plus élégant de pousser plus loin ces considérations, de chercher à voir comment le principe de la constance de la vitesse de la lumière détermine la forme de ces transformations. C'est remplacer les calculs algébriques que l'on fait ordinairement par une démonstration géométrique tombant davantage sous le sens commun. Elle ne fait intervenir que les points de vue des observateurs liés à un corps et des observateurs qui le voient passer; elle prépare ainsi l'esprit aux attitudes auxquelles il doit se conformer pour pénétrer la signification des théories de la relativité.

1. *Relativité de la simultanéité.* — Considérons une règle $A'B'$ qui se meut parallèlement à la droite XX' avec une vitesse constante v dans le sens XX' (*fig. 1*).

Fig. 1.



Supposons qu'au moment où la règle occupe la position $A'B'$ par rapport à XX' , deux éclairs jaillissent en A et B . Ces deux éclairs sont simultanés pour XX' ; ils seront aperçus en même temps en tous les points du plan mené perpendiculairement à AB par son milieu M . Comme la lumière met un certain temps à se propager, la règle aura bougé pendant le temps que les rayons lumineux auront mis pour atteindre ce plan, et c'est le point M_1' situé un peu en avant du plan au moment des

éclairs, qui les verra simultanément, un peu plus tard, en passant dans ce plan en même temps que les rayons lumineux. Comme $A'M_1$ est inférieur à M_1B' , les observateurs liés à $A'B'$ déduiront de cette observation que les éclairs, simultanés pour les observateurs XX' , ne le sont pas pour eux.

2. *Formules de Lorentz.* — Mais on peut aller plus loin et retrouver très simplement, dans cet ordre d'idées, les formules de Lorentz.

Soient t l'heure marquée par l'horloge A au moment de l'éclair A; t_1 l'heure marquée par A' à ce même instant. Les éclairs étant simultanés pour XX' , au moment où jaillit l'éclair en B, B marquait aussi t . Cherchons ce que devait marquer B'. Soit μ' la mesure de la longueur M_1M' faite par les observateurs qui lui sont liés. Soit c la vitesse constante de la lumière. Pour les observateurs entraînés avec la règle, les rayons lumineux issus des deux éclairs se sont croisés en M_1 , par conséquent l'éclair en B' a été antérieur à l'éclair en A' de

$$\frac{M_1B' - A'M_1}{c} = \frac{2\mu'}{c}.$$

Il en résulte que l'horloge B' devait marquer, quand elle a été éclairée par l'éclair B',

$$(1) \quad t' = t_1 - \frac{2\mu'}{c}.$$

$MM_1 = \mu$ étant la mesure de la longueur M_1M' faite par les observateurs qui la voient passer, remarquons que l'on a

$$\frac{AB}{2c} = \frac{MM_1}{v} = \frac{\mu}{v}$$

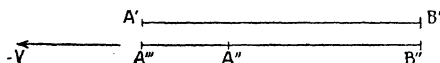
ou

$$(2) \quad \mu = \nu \frac{AB}{2c}.$$

Nous poserons $AB = x$, mesure faite par les observateurs liés à AB , et $A'B' = x'$, mesure faite par les observateurs liés à $A'B'$.

Jusqu'ici, nous avons envisagé les phénomènes en nous plaçant au point de vue XX' . Maintenant, examinons ce qui s'est passé pour les observateurs $A'B'$ (*fig. 2*). Pour ceux-ci, l'éclair B' précède l'éclair A' .

Fig. 2.



En outre, $A'B'$ n'est pas, pour eux, la projection du segment AB de XX' ; ce segment leur paraît, en réalité, occuper la position $A''B''$ à l'instant t' de l'éclair B' . $A''B''$ est la mesure de AB faite par les observateurs qui la voient passer avec la vitesse $-v$. Si, l'éclair B' jaillissant, nous imaginons B' et B'' en coïncidence, A'' sera d'autre part le point qui, par un déplacement de vitesse $-v$ et de durée égale à

$$t'_1 - t' = \frac{2\mu'}{c},$$

viendra en A''' , coïncidant avec A' ,

$$A''A''' = \frac{2\mu'}{c} v.$$

Par suite,

$$(3) \quad \begin{aligned} A'B' &= A''B'' + A''A''', \\ x' &= A''B'' + \frac{2\nu}{c} \mu'. \end{aligned}$$

Écrivons maintenant la constance du rapport des

(47)

nombres mesurant certaines longueurs pour des observateurs qui leur sont liés, aux nombres mesurant ces mêmes longueurs pour ceux qui les voient passer; nous obtenons ainsi

$$(4) \quad \frac{AB}{A''B''} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{M'_1 M'}{M_1 M} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{x'}{x} = \lambda,$$

d'où

$$A''B'' = \frac{x^2}{x'}.$$

En portant dans (3) et en tenant compte de ce que

$$\mu' = \frac{\mu'}{\mu} \mu = \frac{v x'}{2c},$$

il vient

$$x'^2 = x^2 + \frac{v^2}{c^2} x^2$$

ou

$$(5) \quad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nous retrouvons ainsi la contraction des longueurs, avec le rapport

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'origine de ce phénomène est bien dans un défaut de simultanéité.

Portant maintenant dans (1) les valeurs trouvées, il vient immédiatement

$$(6) \quad t' = t'_1 - \frac{vx}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Les égalités (5) et (6) donnent en outre, par un simple

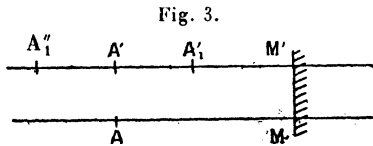
changement d'origines,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} t' - t'_0 = t_1 - t_0 - \frac{v(x - x_0)}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ x' - x'_0 = \frac{x - x_0 - v(t - t_0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{array} \right.$$

Nous pourrions considérer maintenant les formules de Lorentz comme entièrement obtenues, en ajoutant à (6) et à (7) la condition de pouvoir obtenir la transformation inverse par un simple changement de v en $-v$.

Mais, pour avoir les formules de Lorentz sous la forme ordinaire, remarquons qu'il nous suffit d'exprimer $t'_1 - t'_0$ en fonction de $t - t_0$. Un raisonnement simple va nous permettre de pousser jusqu'au bout la démonstration géométrique.

Supposons qu'un signal lumineux instantané soit émis en A. L'horloge A, éclairée par la lumière, marque t_0 ; A', qui est en face, marque t'_0 . Le signal se propage et se réfléchit sur un miroir qui, au moment



de la réflexion, occupe la position M. Le signal revient et, en repassant, éclaire le cadran de A qui marque t , ainsi que le cadran de l'horloge qui passe en face et marque t'_1 .

On a

$$t - t_0 = \frac{2AM}{c}.$$

Pendant le temps que le rayon lumineux a mis pour aller de AA' en MM' , l'horloge A' s'est déplacée et est venue en A'_1 (*fig. 3*). Pendant le temps du retour, le tout s'est encore déplacé et c'est l'horloge A''_1 , symétrique de A'_1 par rapport à AA' , qui passe en A' en même temps que le signal lumineux.

Comme

$$A'_1 M' + A''_1 M' = 2 A' M' = \frac{2 AM}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

l'horloge qui passe devant A , quand A marque t , indique

$$t'_1 = t'_0 + \frac{2 A' M'}{c} = t'_0 + \frac{t - t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nous avons alors finalement la formule donnant l'heure marquée par une horloge d'abscisse $x - x_0$ au temps $t - t_0$

$$t' - t'_0 = \frac{t - t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(x - x_0)}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

En supposant que les horloges situées à l'origine des coordonnées de chaque système aient indiqué la même heure, $t'_0 = t_0 = 0$ au moment où elles se sont croisées, nous obtenons les formules

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{vx}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{array} \right.$$

Quant aux autres coordonnées d'espace, il est bien évident qu'elles ne changent pas, du fait même de la possibilité de la translation parallèle.

[R6]

**INTRODUCTION A L'ÉTUDE DE LA MÉCANIQUE
ET DE SES PRINCIPES ;**

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

En raison des polémiques soulevées par les travaux d'Einstein, il paraît désirable de donner à nos étudiants quelques idées précises sur les principes de la Mécanique, ainsi que des vues d'ensemble sur les nombreux faits d'observation que la théorie newtonienne a permis de coordonner : c'est là une préparation nécessaire à la lecture des Ouvrages d'actualité et à la compréhension des doctrines relativistes. Elle montrera en même temps que l'ancienne Mécanique demeure, à titre de première approximation, et qu'elle demeurera sans doute longtemps. Notre but étant ainsi précisé, nous espérons qu'on voudra bien nous excuser d'avoir fait, dans ce travail, beaucoup d'emprunts à des Ouvrages classiques : il ne s'agit nullement de présenter ici des matériaux nouveaux, mais, si possible, d'établir une suite d'idées.

1. La Mécanique s'est développée à la base de cette affirmation : « La force, agissant sur la matière, produit le mouvement. » Cet énoncé, qui semblerait aujourd'hui trop vague, a inspiré et orienté les chercheurs pendant de longs siècles (1).

(1) Voyez l'article de M. Painlevé : *Les axiomes de la Mécanique et le principe de causalité* (*Bulletin de la Société française de philosophie*, février 1905).

Historiquement, l'étude des principes de la Mécanique a emprunté ses éléments à trois domaines différents :

1° Celui de l'Astronomie, et plus spécialement, de notre système solaire;

2° Celui des phénomènes terrestres, c'est-à-dire des mouvements voisins de l'écorce de notre planète;

3° Celui de l'Optique et de l'Électromagnétisme.

Dans les deux premiers ordres d'idées, les résultats d'expérience, par des routes convergentes, ont amené les penseurs à induire un petit nombre de principes, expliquant parfaitement les phénomènes observés. Plus récemment, les études d'ordre optique ou électrique tendent à montrer que la théorie ainsi obtenue est sans doute valable, mais seulement à titre de première approximation; toutefois, le degré de cette approximation est tel qu'on peut s'abstenir de le dépasser en mécanique terrestre et dans la plupart des problèmes de mécanique céleste.

De ce qui touche à l'Optique, nous ne parlerons qu'incidemment. Nous analyserons d'abord les indications de l'Astronomie : elles sont, au point de vue expérimental, les plus précises. Notons que, historiquement, les premiers pas ont été accomplis par l'étude des phénomènes terrestres et, principalement, de la Statique. Suivant la route inverse, et synthétisant d'abord les résultats relatifs aux mouvements des astres, nous montrerons plus loin que les principes directeurs de cette synthèse cadrent bien avec les phénomènes terrestres.

2. Nous aurons surtout en vue la coordination des résultats relatifs aux mouvements du système solaire. Il est à prévoir de grands progrès, à mesure qu'on

parviendra à préciser les mouvements d'étoiles plus nombreuses; mais cette tâche est loin d'être achevée. Rappelons les résultats acquis dans cet ordre d'idées. On peut subdiviser les étoiles en deux catégories :

1° Les étoiles fixes, ou mieux, celles dont il est impossible d'apprécier des déplacements apparents, parce qu'elles sont les plus éloignées. Ces étoiles forment un ensemble pratiquement invariable sur la sphère céleste; elles nous fournissent dans l'Univers des directions fixes, ou du moins telles, pendant une durée très longue. A ce point de vue, elles nous seront très utiles dans la suite.

2° Les étoiles douées de déplacements sensibles (par rapport aux précédentes) : l'amplitude annuelle de ces derniers peut atteindre jusqu'à 7". En étudiant au point de vue global ces déplacements, on constate que les étoiles correspondantes se meuvent les unes par rapport aux autres. Il est impossible d'expliquer les résultats de l'observation, en admettant que les étoiles forment un système invariable, par rapport auquel se mouvrait le Soleil : une telle hypothèse exigerait que tous les déplacements apparents soient des arcs de grand cercle, s'écartant d'un même point de la sphère céleste. Elle est infirmée par l'expérience. Toutefois, on constate qu'un grand nombre de déplacements observés participent à ce caractère général de divergence à partir d'un point fixe ou, ce qui revient au même, de convergence vers le point diamétralement opposé, soit vers Sirius. On en conclut à un mouvement d'entraînement probable du système solaire vers la constellation d'Hercule (opposée à Sirius). Définissons un trièdre, par les conditions que les directions de ses axes soient fixes et que les mouvements propres des étoiles n'aient

par rapport à lui *aucune orientation spéciale* (1); le sommet de ce trièdre s'éloignerait du Soleil vers Sirius avec une vitesse de l'ordre de grandeur de 25^{km} par seconde. On est tenté ici de conclure à un pas fait en faveur de l'objectivité du mouvement absolu. Nous nous abstiendrons de discuter cette question.

3. Le point capital sera pour nous de montrer comment on peut rattacher à quelques principes simples la synthèse, extrêmement approchée, des mouvements des corps très nombreux qui gravitent autour de notre Soleil.

Les premiers éléments de cette synthèse nous sont fournis par les trois lois suivantes, que Képler énonça, après avoir révisé et complété les observations de Tycho-Brahé :

1° *Les planètes décrivent des ellipses, dont le Soleil occupe un des foyers.*

2° *L'aire balayée par le rayon vecteur qui va du Soleil à la planète est proportionnelle au temps.*

3° *Les cubes des grands axes sont proportionnels aux carrés des durées des révolutions.*

Ces lois font intervenir un système de référence, d'orientation constante par rapport aux étoiles fixes, et vis-à-vis duquel le centre du Soleil est à peu près invariable (*voyez n° 7*). Ce système, c'était, pour Képler et ses successeurs, l'espace absolu lui-même dont ils admettaient l'existence d'une manière plus ou moins consciente. Non moins indubitable leur paraissait la notion d'un temps absolu, voulant bien *couler uniformément*, croyance acceptée et formulée explicitement par Newton.

(1) PAINLEVÉ, *ibid.*

4. Les discussions récentes nous obligent à présenter cette dernière hypothèse sous une forme plus positive :

Il est possible de définir la simultanéité de deux événements indépendamment du système de référence et, en conséquence, de mesurer le temps de la même manière dans tous les systèmes.

Voilà, au fond, à quoi revient la pétition du temps absolu.

A partir de ce postulat, joint à ceux de la géométrie ordinaire, on peut construire un édifice parfaitement logique, la Cinématique classique. Mais de même que nous renoncerions aux conceptions d'Euclidé, en faveur de celles de Riemann, du jour où une mesure aurait assigné plus de deux droits à la somme des angles d'un triangle, de même une nouvelle Cinématique semble, pour des raisons expérimentales, préférable à la Cinématique classique.

De la réponse donnée par cette dernière au problème de la composition des vitesses, il résulterait, en effet, ce qui suit : soient deux systèmes S et S'; S' est animé par rapport à S d'une translation rectiligne et uniforme. Considérons un rayon lumineux se propageant dans la direction de cette translation. Soient V sa vitesse par rapport à S et V' sa vitesse par rapport à S'. Soit enfin v la vitesse de S' par rapport à S. On devrait avoir ⁽¹⁾

$$V = V' + v,$$

Or, l'expérience de Michelson est en désaccord avec

(1) Si toutefois l'on admet qu'il est possible de construire la Mécanique, et en particulier la Cinématique, de manière à en déduire l'explication de tout phénomène physique, et à en faire dépendre les lois de propagation des ondes lumineuses ou électromagnétiques.

ce résultat et conduit à

$$V = V',$$

et, plus généralement, à la conclusion suivante :

La vitesse de propagation d'un rayon lumineux dans le vide est la même dans toutes les directions et dans tous les systèmes de référence doués de translations rectilignes et uniformes les uns par rapport aux autres.

En prenant ce second énoncé comme postulat fondamental, on a construit une nouvelle cinématique. Examinons ce qui la rapproche et ce qui la distingue de l'ancienne.

Soient, dans l'ancienne cinématique, deux systèmes de référence dont l'un est doué, par rapport à l'autre, d'une translation rectiligne et uniforme. Situons, par rapport à chacun de ces systèmes, deux événements. Le premier événement se produit pour le premier système au point $x_1 y_1 z_1$ et au temps t_1 , le deuxième événement, au point $x_2 y_2 z_2$ et au temps t_2 . Soient de même, dans le deuxième système, (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) et (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) les caractéristiques spatiales et temporelles de nos deux événements. En posant

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = x, & \quad y_2 - y_1 = y, & \quad z_2 - z_1 = z, & \quad t_2 - t_1 = t, \\ x'_2 - x'_1 = x', & \quad y'_2 - y'_1 = y', & \quad z'_2 - z'_1 = z', & \quad t'_2 - t'_1 = t', \end{aligned}$$

et, en supposant les coordonnées spatiales rectangulaires, nous aurons des formules de transformation de la forme

$$(F) \quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \lambda' t, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \lambda'' t, \\ t' = t, \end{cases}$$

où les coefficients $\alpha, \beta, \dots, \gamma''$ sont ceux d'une substitution orthogonale de déterminant $+1$. Les formules (F) forment un groupe. La dernière exprime l'invariance du temps ou, comme l'aurait dit Newton, son caractère absolu. Si t est nul, t' l'est aussi : les deux événements sont alors *simultanés pour tout système* et, dans ces conditions, le carré de leur distance

$$x^2 + y^2 + z^2$$

est aussi un invariant. Il cesse de l'être pour deux événements non simultanés, car t n'est plus nul, et $x'^2 + y'^2 + z'^2$ diffère alors de $x^2 + y^2 + z^2$ par un polynôme du second degré en t , dont le terme en t est une fonction linéaire et homogène de x, y, z .

Dans la *nouvelle cinématique*, on exprime encore l'état de translation rectiligne et uniforme des deux trièdres par des formules linéaires et homogènes, du type général

$$(\Phi) \quad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda t, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \lambda' t, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \lambda'' t, \\ t' = \alpha''' x + \beta''' y + \gamma''' z + \lambda''' t. \end{cases}$$

On renonce donc à l'hypothèse de l'indépendance du temps et de l'espace, et l'on considère un continu espace-temps à quatre dimensions. On détermine les seconds membres des formules Φ en exprimant l'invariance de la forme quadratique

$$V^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

La cinématique ainsi construite sera conforme à l'expérience de Michelson. En effet, l'équation invariante

$$V^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

exprime bien la constance de la vitesse de propagation de la lumière dans les conditions précitées. Réciproquement, si cette équation est invariante, nous devons avoir une identité telle que

$$V^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = m(V^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Or, dans le cas de la fixité mutuelle des deux systèmes de référence, nous devons avoir

$$t' = t, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'après cela, on a nécessairement $m = 1$. Parmi les transformations Φ qui conservent la forme précédente, remarquons les suivantes :

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{V^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}},$$

qui correspondent au cas où la translation est parallèle à Ox ; v désigne alors la vitesse de cette translation.

Supposons que $\frac{v}{V}$ ou, mieux, que son carré $\frac{v^2}{V^2}$ soit négligeable. Nous pourrions, à ces formules, substituer les suivantes :

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t,$$

c'est-à-dire revenir à l'ancienne cinématique. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Dans le mouvement d'entraînement de la Terre autour du Soleil, la vitesse v est environ de 30^{km} par seconde. Donc, dans ce cas, le rapport $\frac{v}{V}$ est voisin de 10^{-4} , $\frac{v^2}{V^2}$ serait donc voisin de 10^{-8} . La vitesse est plus grande pour les planètes plus rapprochées du Soleil, d'après la troisième loi de Képler, mais même

pour Mercure, elle n'atteint pas 50^{km} par seconde. Nous nous en tiendrons donc, désormais, aux notions de la Cinématique classique.

5. Cela posé, admettons provisoirement l'exactitude rigoureuse des lois de Képler, qui ne sont qu'approchées. Remarquons en outre qu'elles assimilent le Soleil et chaque planète à un point : un coup d'œil jeté sur les dimensions respectives et les distances de ces astres légitime cette manière de faire; nous sommes amenés à introduire ici, pour la première fois, la notion de *point matériel*, et à donner ce nom à un corps dont les dimensions sont très petites, vis-à-vis de celles d'un système dont ce corps fait partie. Dans la question actuelle, le Soleil, ou chaque planète, ont des dimensions négligeables par rapport à celles du système solaire tout entier : on les assimile donc à des points matériels. Cette notion sera d'ailleurs précisée dans la suite. (A suivre.)

[O'6k]

**SUR LA CONSERVATION DE LA COURBURE GÉODÉSIQUE
DANS LA DÉFORMATION D'UNE SURFACE;**

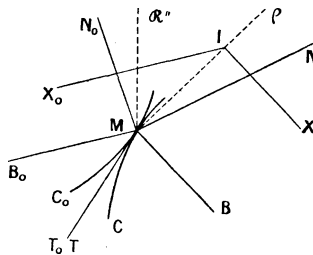
PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Considérons d'abord une courbe de grandeur invariable C roulant sur une courbe fixe C_0 . Les courbes C et C_0 peuvent être planes ou gauches. La condition de roulement est que le point de contact M

des deux courbes, supposé lié à C , ait à chaque instant une vitesse nulle. Ce roulement est compatible avec une loi de variation quelconque de l'angle que font les plans osculateurs aux deux courbes.

Figurons (*fig. 1*) les trièdres principaux des deux

Fig. 1.



courbes, \mathfrak{E}_0 ou $MT_0N_0B_0$, \mathfrak{E} ou $MTNB$ (MT_0 et MT sont les tangentes, MN_0 et MN les normales principales, MB_0 et MB les binormales). Les deux courbes se touchent en M , MT et MT_0 sont confondues.

Appelons \mathfrak{R} le mouvement de l'espace lié à la courbe C .

On peut le considérer comme résultant de trois mouvements que j'appellerai \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 , \mathfrak{R}_3 :

\mathfrak{R}_1 est le mouvement de \mathfrak{E}_0 par rapport à C_0 .

\mathfrak{R}_2 est le mouvement de \mathfrak{E} par rapport à \mathfrak{E}_0 .

\mathfrak{R}_3 est le mouvement de C par rapport à \mathfrak{E} .

Le mouvement \mathfrak{R}_1 est bien connu : on sait, qu'à l'instant considéré, il résulte de deux rotations, l'une autour de l'axe de courbure X_0 de C_0 en M , l'autre autour de la tangente MT_0 . Inutile de rappeler les vitesses angulaires de ces rotations.

\mathfrak{R}_2 est une rotation autour de $MT_0 = MT$.

\mathfrak{R}_3 , analogue à \mathfrak{R}_1 , résulte de deux rotations, l'une autour de MT , l'autre autour de X , axe de courbure de C en M .

En composant ces cinq rotations (ce qui peut se faire en les prenant dans un ordre quelconque), on voit que \mathfrak{R} résulte d'une rotation \mathfrak{R}_0 autour de X_0 , d'une rotation \mathfrak{R}' autour de $MT = MT_0$, d'une rotation \mathfrak{R} autour de X . Symboliquement,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}' \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}.$$

Mais \mathfrak{R} étant un roulement est tangent à une rotation \mathfrak{R}'' dont l'axe doit passer par le point M , point de vitesse nulle. On a donc

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}' \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R},$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{R}'^{-1} \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}.$$

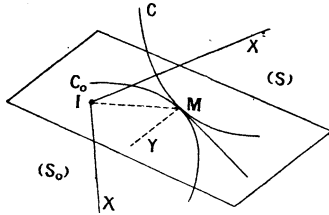
$\mathfrak{R}'^{-1} \mathfrak{R}''$ est le produit de deux rotations dont les axes passent en M . C'est donc une rotation ρ dont l'axe passe par M . Cette rotation devant aussi résulter de \mathfrak{R}_0 et de \mathfrak{R} , il faut que son axe passe par le point I commun aux axes X_0 et X de ces dernières (X_0 et X concourent comme appartenant au plan normal commun aux deux courbes en M). Par conséquent, la rotation $\mathfrak{R}'' = \rho \mathfrak{R}$, a son axe dans le plan MIT . Ainsi :

Quand une courbe C roule sur une courbe fixe C_0 , le mouvement élémentaire de C est une rotation dont l'axe est dans le plan déterminé par la tangente commune aux deux courbes et par le point de concours des axes de courbure de ces courbes, correspondant à leur point de contact.

2. Soient maintenant (S) et (S_0) deux surfaces

applicables (*fig. 2*), C et C_0 deux courbes correspondantes tracées sur ces surfaces. On peut donner à S un mouvement tel que les points de C viennent succes-

Fig. 2



sivement coïncider avec les points correspondants de C_0 , les deux surfaces étant à chaque instant tangentes en un point M . D'après le théorème de Ribaucour, ce mouvement est à chaque instant tangent à une rotation dont l'axe MY est dans le plan tangent commun aux deux surfaces en M . Ce plan contenant la tangente commune à C_0 et à C , il devra aussi, d'après le théorème démontré ci-dessus, contenir le point de concours I des axes de courbure X_0 et X des courbes C_0 et C en M . *Par conséquent, les deux courbes C_0 et C ont même rayon de courbure géodésique MI au point M .* C'est le théorème classique que j'avais en vue. On voit que les propositions les plus simples de la Cinématique le rendent presque intuitif.

3. Naturellement, la démonstration s'applique au cas où (S_0) étant un plan, (S) est une développable, et l'on obtient le théorème connu sur l'altération de la courbure dans le développement d'une développable.

[L²9a]

SUR LES CONIQUES FOCALES ;

PAR M. CH. BIOCHE.

A propos de diverses questions de géométrie, on est amené à considérer un système de deux coniques, situées dans des plans rectangulaires, et telles que chacune d'elles ait pour sommets les foyers de l'autre; on les appelle quelquefois *coniques focales*. C'est d'un pareil système qu'il s'agit ici.

1. Si l'on désigne par $2a$ le grand axe, par $2c$ la distance des foyers de l'ellipse, et par $2b$ l'axe non focal, l'hyperbole correspondante a pour axe transverse $2c$, pour distance des foyers $2a$ et pour axe non transverse $2b$.

Il résulte de là que, si l'on projette ces deux coniques sur un plan P passant par l'axe commun et faisant un angle α avec le plan de l'ellipse, l'ellipse obtenue aura pour demi-axes a et $b \cos \alpha$, et l'hyperbole aura pour demi-axes c et $b \sin \alpha$. On en déduit facilement que le carré de la demi-distance des foyers est pour chacune des coniques $a^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha$. Donc ces coniques sont homofocales.

Il est facile de constater que la demi-distance focale commune varie de c à a , quand α varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

2. Réciproquement, soient deux coniques homofocales

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2}{c^2 - d^2} = 1.$$

Si l'on considère un plan P passant par OX et faisant l'angle α avec le plan des courbes données, l'ellipse peut être considérée comme la projection d'une ellipse de P dont les demi-axes auraient pour carrés

$$a^2 \text{ et } \frac{a^2 - c^2}{\cos^2 \alpha}.$$

L'hyperbole peut aussi être considérée comme la projection d'une hyperbole, située dans le plan P' perpendiculaire à P, les carrés des demi-axes seraient pour cette hyperbole

$$d^2 \text{ et } \frac{c^2 - d^2}{\sin^2 \alpha}.$$

On peut disposer de α de façon que les coniques obtenues dans les plans P et P' forment un système de coniques focales; car les équations obtenues en écrivant que les foyers de l'une des coniques sont les sommets de l'autre se réduisent à une seule, qui donne

$$\text{tang}^2 \alpha = \frac{c^2 - d^2}{a^2 - c^2}.$$

Donc deux coniques homofocales peuvent toujours être considérées comme les projections de deux coniques focales.

[K'13b]

REMARQUES SUR LES TRIÈDRES ;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. On sait que, dans un trièdre, les sinus des faces sont proportionnels aux sinus des dièdres; on peut

trouver une signification géométrique simple au rapport de deux sinus correspondants.

Si a, b, c sont les faces d'un trièdre et A, B, C les dièdres, le volume V du rhomboèdre admettant ce trièdre est donné par

$$V = \sin a \sin b \sin C;$$

le volume V_1 , correspondant au trièdre supplémentaire, ou réciproque, du trièdre considéré, est donné par

$$V_1 = \sin A \sin B \sin c;$$

on en déduit :

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\sin a}{\sin A},$$

en remarquant que, par suite de la relation rappelée plus haut, il y a simplification dans le rapport des produits de sinus.

Comme on a appelé sinus du trièdre le volume V , par analogie avec ce fait que le sinus d'un angle plan mesure l'aire du losange de côté 1 construit sur cet angle, on arrive à l'énoncé suivant : *dans un trièdre, le rapport du sinus d'une face au sinus du dièdre opposé est égal au rapport du sinus de ce trièdre au sinus du trièdre réciproque.*

2. Une discussion facile permet de voir que, si le rapport considéré est égal à 1, l'une des faces du trièdre est supplémentaire du rectiligne du dièdre opposé, les autres faces étant égales aux rectilignes correspondants.

Si ces faces sont a, b, c , les dièdres sont donnés par

$$A = \pi - a \quad B = b \quad C = c.$$

Et, pour le trièdre réciproque, on a

$$\begin{aligned} a' &= \pi - A = a & b' &= \pi - B = \pi - b & c' &= \pi - C = \pi - c \\ A' &= \pi - a = A & B' &= \pi - b = \pi - B & C' &= \pi - c = \pi - C; \end{aligned}$$

de sorte que si, en outre des conditions précédemment supposées, on a $b + c = \pi$, les éléments du deuxième trièdre sont donnés par

$$\begin{array}{lll} a' = a & b' = c & c' = b \\ A' = A & B' = C & C' = B. \end{array}$$

Autrement dit, chacun des trièdres réciproques considérés est égal au symétrique de l'autre.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1921.

Mécanique rationnelle.

DEUXIÈME QUESTION.

Un pendule balistique se compose d'un cylindre de révolution C, d'axe horizontal, rempli de terre et pouvant osciller librement autour d'un axe horizontal perpendiculaire à l'axe du cylindre, la plus courte distance AB des deux axes étant verticale et ayant pour longueur 10^m . Le poids de C est supposé être de 10 tonnes, et l'on néglige, par rapport à lui, le poids des organes de suspension.

Ce cylindre est utilisé comme cible pour des balles de mitrailleuses dont la vitesse est parallèle à son axe et qui s'incorporent dans sa masse symétriquement à l'axe. Le poids de chaque balle est de 10^6 et l'on en tire dix par seconde. La durée du tir est assez courte pour que le poids total des balles tirées soit négligeable par rapport au poids du cylindre, et assez longue cependant pour que le cylindre prenne une position apparente d'équilibre, dans

laquelle la droite AB, cessant d'être verticale, fait un angle de 3 décigrades avec la verticale. Calculer la vitesse des balles.

SOLUTION

Par M. G. BOULIGAND.

Dans les conditions de l'énoncé, nous pouvons admettre, que dans l'intervalle de deux chocs, l'angle θ du pendule avec la verticale satisfait à l'équation différentielle des petites oscillations

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \theta.$$

Cette hypothèse sera d'ailleurs légitimée *a posteriori*, grâce au choix opportun des données numériques.

Prenons pour unité de longueur le centimètre, pour unité de masse le gramme, pour unité de temps la seconde. Nous aurons ici

$$g = 981, \quad l = 10^3.$$

Nous pouvons donc écrire approximativement

$$(1) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\theta.$$

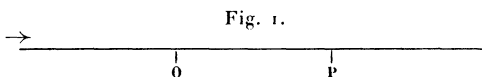
Cela posé, calculons l'accroissement brusque de vitesse subi par le cylindre à l'arrivée de chaque balle. Soit $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire, $\Delta\omega$ son accroissement lors de l'arrivée d'une balle. On calcule $\Delta\omega$ en appliquant le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de suspension, ce qui élimine les percussions de réaction de cet axe. Appelons MK^2 le moment d'inertie de l'appareil total par rapport à cet axe, et a la distance AB.

Puisque l'énoncé nous autorise à négliger le poids

des balles déjà incorporées, nous aurons

$$(2) \quad MK^2 \Delta\omega = m V a,$$

en appelant V la vitesse inconnue des balles, et en assimilant à une droite la portion utile de la trajectoire du centre du cylindre. Puisque l'énoncé ne donne aucune indication sur les dimensions du cylindre, il est légitime de faire $K^2 = a^2$. Représentons par v la vitesse de translation du cylindre, le long de la droite décrite par son centre, par O la position d'équilibre normal de ce centre, par P sa position à l'instant t ,



par x le segment \overline{OP} . Avec ces notations, l'équation (2) peut s'écrire

$$M \Delta v = m V$$

ou

$$\Delta v = \frac{1}{10^6} V.$$

Chaque balle fournit donc au cylindre une impulsion correspondant à un accroissement de vitesse égal à $\frac{V}{10^6}$. Soit $\tau = \frac{1}{10}$ de seconde, l'intervalle qui s'écoule entre deux chocs. L'élongation de P sera définie comme il suit :

$$\begin{aligned}
 0 < t < \tau, & \quad x = \frac{V}{10^6} \sin t, \\
 \tau < t < 2\tau, & \quad x = \frac{V}{10^6} [\sin t + \sin(t - \tau)], \\
 2\tau < t < 3\tau, & \quad x = \frac{V}{10^6} [\sin t + \sin(t - \tau) + \sin(t - 2\tau)], \\
 \dots\dots\dots, & \quad \dots\dots\dots \\
 n\tau < t < (n + 1)\tau, & \quad x = \frac{V}{10^6} [\sin t + \sin(t - \tau) \\
 & \quad \quad \quad + \sin(t - 2\tau) + \dots + \sin(t - n\tau)].
 \end{aligned}$$

En effet, la première détermination de x correspond bien aux conditions initiales du mouvement : départ de la verticale avec la vitesse $\frac{V}{10^6}$; la seconde détermination de x correspond bien à la même élongation que la première pour $t = \tau$, et présente pour cette même valeur, par rapport à la première détermination, l'accroissement de vitesse $\frac{V}{10^6}$, etc.

On peut, par un calcul classique, transformer ces sommes en produit. Mais ce calcul n'est pas bien utile. Il nous montrerait seulement que si l'on fait croître τ indéfiniment, x ne tend vers aucune limite. Voilà une circonstance extrêmement troublante, et un candidat ayant attaqué la question par ce côté devait conclure que *la position apparente indiquée dans l'énoncé n'existe pas* (point de vue A).

Voici d'ailleurs un calcul approché qui donne x à un instant quelconque. Reprenons l'équation définissant x dans l'intervalle $n\tau, (n+1)\tau$. En multipliant les deux membres par τ , et en remarquant que l'intervalle τ est petit par rapport à la demi-période d'une oscillation non troublée (il en est environ la trente et unième partie), nous pouvons écrire sensiblement

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} &= \frac{V}{10^6} \int_0^t \sin(t-u) du \\ &= \frac{V}{10^6} (1 - \cos t), \end{aligned}$$

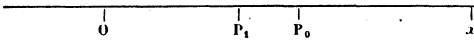
d'où

$$(3) \quad x = \frac{V}{10^5} (1 - \cos t).$$

On voit immédiatement que cette élongation est celle d'un mouvement oscillatoire dont une des positions extrêmes correspond au point O (c'est-à-dire à la verticale) et dont l'autre a pour abscisse $\frac{2V}{10^5}$.

D'autres candidats auront sans doute raisonné de la façon suivante. L'énoncé indique une position apparente d'équilibre. Supposons réalisé un état de régime, rigoureusement périodique, de période $\frac{1}{10}$ de seconde. Soit P_0 la position où la vitesse du mobile est rigoureusement nulle. Le mobile étant en P_0 , à un instant t_0 , marchera, d'un mouvement accéléré, jusqu'à une position P_1 , où il sera heurté par la balle, laquelle aura

Fig. 2.



pour effet de le faire retourner en P_0 , d'un mouvement retardé, qui est la réversion du précédent. Soit v_1 la vitesse du mouvement de retour pour la position P_1 . Nous avons

$$2v_1 = \frac{V}{10^6}.$$

Dans l'intervalle de temps $\left(t_0, t_0 + \frac{\tau}{2}\right)$, le mouvement de P est défini par

$$x = \overline{OP_0} \cos(t - t_0).$$

Nous avons donc

$$v_1 = \overline{OP_0} \sin \frac{\tau}{2}.$$

Comme P_1 est très voisin de OP_0

$$\left[\overline{OP_0} - \overline{OP_1} = 2\overline{OP_0} \sin^2 \frac{\tau}{4} = \frac{1}{8,00} \right],$$

nous pouvons confondre la position d'équilibre apparente avec P_0 . Nous aurons d'ailleurs

$$\overline{OP_0} = 10^3 \times \frac{0,3 \times \pi}{200} = \frac{9,4}{2} = 4,7.$$

(70)

Remplaçons approximativement $\sin \frac{\pi}{2}$ par $\frac{1}{20}$, il vient

$$\frac{\overline{OP}_0}{20} = \frac{V}{2 \cdot 10^6},$$

la position d'équilibre apparent serait donc liée à V par

$$(4) \quad \overline{OP}_0 = \frac{V}{10^5}.$$

C'est la moyenne de l'élongation définie par l'équation (3). Les candidats qui ont adopté ce point de vue (point de vue B) sont sortis sans doute de la séance plus satisfaits que les premiers. Tout au plus, auront-ils pu être choqués légèrement de trouver une valeur de la vitesse V égale à 4700 m : sec. Mais ce n'est évidemment là qu'une petite négligence dans le choix des données numériques. Il eût suffi d'attribuer au pendule un poids d'une tonne pour trouver une vitesse dix fois plus petite, et en même temps compatible avec les conditions expérimentales ordinaires.

Toutefois, en se ralliant au point de vue B, on obtient un mouvement compatible avec les conditions indéfinies, mais non avec les conditions initiales du problème.

Aucun des points de vue A et B n'est donc parfaitement compatible avec l'énoncé. C'est là une conséquence de ce fait que nous nous sommes placés dans les conditions où la *Mécanique Rationnelle* étudie d'ordinaire le pendule, c'est-à-dire en négligeant son amortissement par la résistance de l'air et par le frottement des appareils de suspension sur leurs supports.

La face de la question est complètement changée lorsqu'on fait entrer en ligne de compte ces résistances passives. Pour présenter la solution, nous parti-

rons de la remarque suivante : lorsque, nous plaçant au point de vue A, nous avons substitué, à la somme de sinus qui définit l'élongation dans l'intervalle de temps $[n\tau, (n+1)\tau]$, une intégrale qui se ramène à l'expression (3); nous avons substitué, au mouvement réel, un mouvement rapproché et *continu* très voisin, se produisant sous l'action d'une force qui satisfait à l'équation

$$(5) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{V}{10^5} - x,$$

c'est-à-dire qui s'obtient en composant à la force $-x$ du mouvement pendulaire non troublé une force constante $\frac{V}{10^5}$ qui, en une seconde, communique un accroissement de vitesse $\frac{V}{10^5}$, et par suite est approximativement équivalente aux dix chocs qui se produisent pendant cette seconde, fournissant chacun l'accroissement de vitesse $\frac{V}{10^6}$. Mais alors, tous les mouvements apparents que nous observerions indépendamment des résistances passives sont régis par l'équation (5). En particulier, la valeur

$$(6) \quad x = \frac{V}{10^5}$$

fournit la position d'équilibre apparent que nous a fourni le point de vue B.

Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé, c'est-à-dire supposons que le pendule parte de la verticale. D'après l'équation (5), il va osciller autour de la position d'équilibre apparent, et on retrouve l'équation (3). Mais, si l'on tient compte des résistances, on trouvera nécessairement que le pendule tend vers sa position apparente d'équilibre, définie par (6), de même qu'un pendule qu'on écarte de la verticale dans les conditions

ordinaires tend à y revenir par amortissement après un certain nombre d'oscillations.

Ainsi se trouve concilié, avec l'énoncé, le résultat obtenu en adoptant le point de vue (B).

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Soit l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + bx + c},$$

où a, b, c désignent des constantes réelles.

Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de a, b, c ;

2° Écrire l'intégrale générale, en distinguant les trois cas suivants :

$$b^2 - 4ac > 0,$$

$$b^2 - 4ac = 0,$$

$$b^2 - 4ac < 0;$$

3° Pour que l'intégrale générale soit rationnelle, il faut et il suffit que

$$\frac{4}{b^2 - 4ac}$$

soit le carré d'un entier;

4° L'intégrale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe, sans se réduire à une fraction rationnelle? Trouver, dans ce cas, les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature, en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Trouver en projection sur le

plan yOz les lignes asymptotiques de la surface

$$x + y^2 z = \int_0^y (y-t) e^{-\sqrt{t}} dt.$$

Parmi ces courbes projetées, montrer qu'il y en a une et une seule, délimitant avec Oy et le prolongement de Oz une région d'aire finie.

Évaluer cette aire.

(Poitiers, juillet 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soient p, q les dérivées partielles premières d'une fonction z des variables x, y ; P, Q celles de la fonction Z de X, Y , qu'on déduit de la précédente en posant

$$x^2 = X, \quad y^2 = Y, \quad z^2 = Z.$$

Évaluer p, q en fonction de P, Q, X, Y, Z . Appliquer cette transformation à l'équation aux dérivées partielles

$$(e) \quad xyz(z - px - qy)^2 = pq.$$

Soit (E) l'équation transformée, qui appartient à un type classique. Intégrer cette équation, montrer qu'elle admet une intégrale singulière, indiquer comment sont constituées les multiplicités caractéristiques. En déduire les résultats correspondants dans l'étude de (e).

Faire l'étude directe de l'équation (e), en montrant d'abord qu'elle possède certaines surfaces intégrales du second ordre

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

où A, B, C sont des constantes, choisies de manière à satisfaire à une relation de forme convenable $F(A, B, C) = 0$.

Écrire le système différentielle qui définit les multiplicités caractéristiques de (e). Intégrer ce système.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On assimile la Terre à un ellipsoïde de révolution, dont les rayons de courbure principaux en un point sont R_1 et R_2 . Évaluer la partie

principale de l'intégrale

$$\iint \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 dS,$$

étendue à toute la surface du globe, en supposant très petit l'aplatissement $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$.

Application $\varepsilon = \frac{1}{300}$. Degré d'approximation?

(Poitiers, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. I. — Soient dans un plan deux axes rectangulaires Ox, Oy . On donne une fonction $u(x, y)$ (définie et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une courbe fermée sans point double Γ).

Soit C une courbe fermée sans point double quelconque intérieure à Γ ; un sens positif et une origine des arcs ayant été choisis sur C , on désigne par S l'abscisse curviligne d'un point $P(x, y)$ de contour C et par V l'angle de la demi-tangente positive en P et de la demi-droite PU dont l'angle avec Ox est $u(x, y)$:

1° Transformer l'intégrale curviligne $I = \int_C \cos V ds$ en une intégrale double étendue à l'intérieur du contour C (on précisera le sens de parcours adopté dans l'intégration le long du contour);

2° Comment faut-il choisir la fonction u pour que I soit nulle quel que soit C ? Que peut-on dire alors des lignes qui en chacun de leurs points M sont tangentes à la direction MU correspondant à ce point;

3° u étant définie par l'équation implicite

$$x \sin u - y \cos u = 1$$

et C étant une courbe fermée sans point double quelconque telle que les directions PU_1, PU_2 correspondant à l'un quelconque de ses points soient réelles et distinctes, on appelle PU l'une des directions PU_1, PU_2 et l'on suppose que les diverses positions de PU forment une suite continue lorsque P parcourt C . Calculer l'intégrale

curviligne

$$\int_c \cos V \, ds.$$

II. Étant donné un cylindre de révolution indéfini et un point A de sa surface S, on considère toutes les hélices tracées sur S et passant par A :

1° Démontrer que toutes les tangentes (D) de toutes ces hélices peuvent être considérées comme les normales d'une même surface Σ ;

2° Déterminer les lignes de courbure de Σ et les rayons de courbure principaux en un point M de Σ ;

3° Soient C une courbe fermée sans point double dont tous les points sont extérieurs au cylindre donné, V l'angle de la tangente à C en un de ses points avec une droite (D) passant par P; on suppose que lorsque P décrit une fois d'une manière continue le contour C à partir d'une position initiale P_0 , (D) varie d'une manière continue (avec discontinuité éventuelle en P_0). Calculer

$$\int_c \cos V \, ds.$$

N. B. — Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre. Cependant il est recommandé de ne traiter la troisième partie de II qu'après avoir traité I en entier.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad x^2 y'' + xy' - \left(\frac{1}{4} + ax \right) y = 0,$$

où a est une constante donnée :

1° Trouver une solution de (1) qui reste finie pour $x=0$. Cette solution apparaîtra comme le produit d'une fonction élémentaire par une série entière dont on étudiera la convergence. Cette solution est-elle entièrement déterminée?

2° Comment peut-on en déduire l'intégrale générale de l'équation (1) sous forme d'un développement en série? Calculer les trois premiers termes de ce développement;

3° Cas particulier où $a=0$.

(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° On donne deux fonctions P et Q des trois variables x, y, z . Comment faut-il choisir la surface S pour que l'intégrale curviligne

$$I = \int_C P dx + Q dy$$

soit nulle pour toute courbe fermée tracée sur S ? Intégrer l'équation aux dérivées partielles trouvée pour

$$P = xy, \quad Q = yz + x,$$

et déterminer la surface intégrale qui passe par l'axe des x ;

2° On considère la portion Σ de la surface $y = x \operatorname{tang} z$ qui correspond à des valeurs positives de x et de y et à des valeurs de z comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On joint par une courbe Γ tracée sur Σ les points de Σ défini par

$$x = 1, \quad y = 0; \quad x = \xi, \quad y = \eta.$$

Montrer que

$$\delta = \int_{\Gamma} xz dx + (yz + x) dy$$

ne dépend que de ξ, η et non de Γ . Calculer δ en fonction de ξ, η ; valeur de δ pour $\xi = 1, \eta = 1$.

II. Intégrer l'équation

$$(E) \quad p + zq = 2.$$

C étant une courbe fermée quelconque tracée sur une surface intégrale S , montrer que

$$\int_C [4(y + x^2) - z^2] dx + 2z dy = 0.$$

Étant donné un arc de courbe quelconque tracé sur une telle surface S et un point $M(x, y, z)$ de cet arc, on désigne d'une manière générale par y' la pente $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à la projection de cette courbe sur le plan des x, y au point $m(x, y)$, projection de M . On considère sur S un contour fermé, formé par une portion Q d'une

caractéristique de E et par un autre arc quelconque de Γ . On a

$$\int_{\Gamma} [4(y+x^2)+y'^2] dx - \int_c [4(y+x^2)+y'^2] dx \\ = \int_{\Gamma} (y'-z)^2 dx.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la surface engendrée par les normales principales à la courbe

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad z = \frac{x^3}{6} :$$

- 1° Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface;
2° Calculer les rayons de courbure principaux de cette surface à l'origine.

(Grenoble, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° A quelle condition doivent satisfaire les équations P et Q de x et de y pour que l'expression

$$\left(P \frac{\partial Q}{\partial x} - Q \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx - \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy$$

soit une différentielle totale exacte.

Trouver les fonctions dont cette expression et la différentielle dans chacun des trois cas suivants :

$$\begin{array}{ll} P = x^2 + y^2 & Q = y, \\ P = x & Q = x^2 + y^2, \\ P = y & Q = x; \end{array}$$

- 2° Trouver les lignes asymptotiques de la surface

$$x = \frac{v^3}{3} - u^3 v, \quad y = \frac{u^3}{3} - v^2 u, \quad z = uv.$$

- II. Intégrer l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 + x - y - z) \frac{\partial z}{\partial y} + x - y + 3z = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On considère les courbes (P) représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'équa-

(78:)

tion $y^2 - 2ax - a^2 = 0$, a étant une constante quelconque. Par un point quelconque du plan, passent deux courbes (P) orthogonales. On demande l'aire du quadrilatère curviligne, situé au-dessus de l'axe des x , qui se trouve limité par les courbes P qui passent aux points

$$(x + a, \quad y = 1) \quad \text{et} \quad \left(x = \frac{5}{2}, \quad y = 6\right).$$

II. Ox, Oy, Oz désignant trois axes de coordonnées rectangulaires et C une courbe fermée, on considère l'intégrale curviligne

$$\int_C xz \, dx + yz \, dy + \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2} \, dz.$$

On demande la valeur de cette intégrale lorsque la courbe C est entièrement située sur une surface de révolution d'axe Oz.

(Grenoble, novembre 1921.)

QUESTIONS.

2412. On donne dans un plan deux coniques (S) et (Σ), et un point O; soit A un point commun aux deux coniques. On mène par O une sécante variable qui rencontre la conique (S) en P et P', et l'on trace les droites AP et AP' qui rencontrent encore la conique (Σ) aux points Π et Π' ; la droite $\Pi\Pi'$ passe alors par un point fixe Ω , et le lieu du point de rencontre des droites PP' et $\Pi\Pi'$ est la conique qui passe par les points O, Ω , et par les trois autres points B, C, D, communs aux deux coniques. A quelles conditions les droites $P\Pi'$ et $P'\Pi$ passent-elles en B, auquel cas on obtient la même figure complète en se servant du point B qu'en se servant du point A? Remarquer le quadrilatère complet dont les trois diagonales sont AB, PP', $\Pi\Pi'$.

-Cas de deux cercles.

G. FONTENÉ.

*2414. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy , on considère les paraboles Π et Π' admettant pour foyer commun le point F de Oy et qui sont tangentes à Ox en des points A et B tels que l'angle AFB soit droit. On voit ⁽¹⁾ que, dans ces conditions, les secondes tangentes t et t' que, de tout point de Ox , on peut mener à Π et Π' , sont rectangulaires. Trouver l'équation de l'enveloppe de la droite qui est la symétrique de Ox à la fois par rapport à t et à t' , et construire cette courbe.

M. D'OCAGNE.

*2419. Soit $ABA'B'$ un quadrilatère circonscrit à une conique de foyers F et F' . On considère les deux groupes de quatre triangles :

$$FAB, \quad FA'B', \quad F'AB', \quad F'A'B';$$

$$FAB', \quad FA'B, \quad F'AB, \quad F'A'B'.$$

Démontrer que

1° Les cercles circonscrits aux triangles de ces deux groupes passent respectivement par des points C et C' , qui sont les deux foyers d'une nouvelle conique inscrite au quadrilatère;

2° Les orthocentres des triangles de ces deux groupes sont respectivement sur des droites D et D' , toutes deux perpendiculaires à la droite, lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère.

R. B.

*2420. On donne à un segment AB de longueur constante toutes les positions, dans un plan fixe, telles que les points A, B et deux points fixes A_0 et B_0 du plan soient sur un cercle. Démontrer que l'on peut trouver, d'une infinité de manières, un couple de points M, N , invariablement liés au segment AB et un couple de points fixes M_0, N_0 , tels que les points M, N, M_0, N_0 soient sur un cercle pour toutes les positions du segment AB satisfaisant à la condition indiquée.

Les points M, N sont répartis sur deux droites rectangulaires, et de même les points M_0, N_0 .

R. B.

2421. La courbe (M') se déduit de la courbe (M) par la construction suivante : le point M' est à la rencontre de la

(1) *N. A.*, 1901, p. 446.

perpendiculaire élevée en M au rayon vecteur OM et de la perpendiculaire menée de O à la tangente en M à la courbe (M) . Construire le centre de courbure μ de la courbe (M) connaissant la normale de la courbe (M') (1). M. D'OCAGNE.

2424. Dans un plan, deux courbes de grandeurs invariables roulent respectivement sur deux courbes fixes, et cela de manière à se couper sous un angle constant.

Démontrer que la normale à la courbe décrite par leur point d'intersection concourt avec les droites joignant leurs centres de courbure en ce point respectivement à leurs points de contact avec les courbes fixes. R. B.

2427. Soient $ABCD$ un quadrilatère inscriptible dans un cercle Q , M et N les extrémités du diamètre parallèle à la droite de Simson du point D par rapport au triangle ABC . Démontrer que les droites de Simson des points M et N par rapport au triangle ABC sont parallèles aux axes des paraboles circonscrites au quadrilatère $ABCD$.

SERBAN A. GHEORGHÈRE.

2452. Les rabattements du sommet A d'un tétraèdre $ABCD$ sur la face BCD , effectués autour des arêtes BC , CD , DB comme charnières, extérieurement au volume du solide, déterminent un triangle $A_1A_2A_3$. On obtient de même des triangles $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ relatifs aux autres sommets. Démontrer que ces triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ sont semblables et que

$$\frac{\overline{A_1A_2A_3}}{P_A} = \frac{\overline{B_1B_2B_3}}{P_B} = \frac{\overline{C_1C_2C_3}}{P_C} = \frac{\overline{D_1D_2D_3}}{P_D},$$

P_A , P_B , P_C , P_D désignant les puissances de A , B , C , D par rapport aux sphères ex-inscrites correspondantes du tétraèdre.

V. THÉBAULT.

(1) C'est la transformation étudiée par M. F. Egan (*N. A.*, 1919, p. 14). La courbe (M') est une adjointe infinitésimale de la courbe (M) (*N. A.*, 1900, p. 219).

[H5gβ]

MONOGRAPHIE DES POLYNOMES DE KUMMER ;

PAR M. PIERRE HUMBERT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Si, dans la série hypergéométrique de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

on fait tendre β vers l'infini, après division de x par β , on obtient la série

$$\Phi(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

connue sous le nom de *série hypergéométrique confluyente*, ou *fonction de Kummer*. Il est évident que si l'élément α est égal à un entier négatif $-n$, la série s'arrête après le terme de rang n , de sorte qu'on se trouve en présence d'un polynôme d'ordre n , $\Phi(-n, \gamma, x)$, ou pour abrégé Φ_n , que nous appellerons *polynôme de Kummer*: Comme nous le verrons, ces polynômes comprennent comme cas particuliers un certain nombre de fonctions bien connues, introduites par divers auteurs; mais je ne crois pas qu'une étude des propriétés générales de ces polynômes ait été faite, au moins dans des publications de langue française. D'ailleurs les intéressants travaux de N. Sonine (*Math. Annalen*, t. 16, 1880) et de M. Mac-Arthur (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 38, 1919-1920) n'en considèrent que certains aspects très particuliers. Je me

propose de rappeler ici les principales formules de la théorie du polynome Φ_n , m'attachant à n'employer, pour les établir, que des méthodes très générales susceptibles d'être appliquées dans la plupart des questions similaires.

1. D'après sa définition, le polynome de Kummer s'écrira

$$(1) \quad \Phi_n = 1 - \frac{nx}{\gamma \cdot 1!} + \frac{n(n-1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ + (-1)^n \frac{x^n}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}.$$

Comme on sait que l'équation différentielle de la série de Gauss est

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (z + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

on obtiendra sans difficulté, par confluence, c'est-à-dire en remplaçant x par $\frac{x}{\beta}$ et faisant tendre β vers l'infini, puis en écrivant $-n$ à la place de z , l'équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène, vérifiée par le polynome de Kummer,

$$(2) \quad xy'' + (\gamma - x)y' + ny = 0.$$

Si l'on cherche, par la méthode des coefficients indéterminés, quels sont les polynomes d'ordre n en x vérifiant cette équation, on constate immédiatement que le seul polynome répondant à la question est précisément Φ_n , à un facteur constant près bien entendu.

Cela étant, faisons dans (2) le changement de fonction

$$y = x^{1-\gamma} e^x u,$$

nous trouvons pour u l'équation

$$(3) \quad xu'' + (z + \gamma + x)u' + (n+1)u = 0.$$

Considérant alors l'équation

$$(4) \quad xz'' + (2 + \gamma - n + x)z' + z = 0,$$

dérivons n fois son premier membre, en posant $z^{(n)} = u$: nous retombons sur (3). Si donc nous connaissons une intégrale z_1 de (4), $u_1 = z_1^{(n)}$ sera une intégrale de (3), et $y_1 = x^{1-\gamma} e^x u_1$ sera une intégrale de (2). Or, comme on le constate facilement, une intégrale de (4) est

$$z_1 = x^{n+\gamma-1} e^{-x},$$

de sorte qu'une intégrale de (2) est

$$y_1 = x^{1-\gamma} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\gamma-1} e^{-x}).$$

Mais la dérivée d'ordre n de l'expression entre parenthèses est le produit, par e^{-x} , d'un polynôme d'ordre $n + \gamma - 1$: donc y_1 sera un polynôme d'ordre n ; d'où l'on conclut que y_1 est, à un facteur constant près, identique à Φ_n . On déterminera ce facteur en se souvenant que, dans Φ_n , le terme indépendant de x est l'unité ; or dans y_1 , c'est

$$(\gamma + n - 1)(\gamma + n - 2) \dots (\gamma + 1)\gamma,$$

ou, suivant la notation classique introduite par M. Appell, (γ, n) . On arrive par conséquent à l'expression remarquable

$$(5) \quad \Phi_n = \frac{x^{1-\gamma} e^x}{(\gamma, n)} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\gamma-1} e^{-x})$$

d'où l'on pourra tirer également la formule

$$6) \quad \frac{d^p \Phi_n}{dx^p} = \frac{x^{1-\gamma} e^x}{(\gamma, p)} \times \frac{(-1)^p}{n(n-1) \dots (n-p+1)} \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}} (x^{n+\gamma-1} e^{-x}).$$

2. L'expression (5) du polynôme de Kummer va nous conduire, par l'application de la formule de Lagrange, à une conséquence intéressante. Cette formule, on le sait, indique pour une fonction quelconque $F(z)$ d'une racine z de l'équation

$$z = x + tf(z)$$

le développement suivant :

$$F(z) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [F'(x) f^n(x)]$$

ou, par dérivation,

$$\frac{d}{dx} F(z) = F'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [F'(x) f^n(x)].$$

Prenons alors $f(x) = x$ et $F'(x) = x^{\gamma-1} e^{-x}$, on aura au second membre la dérivée d'ordre n qui figure dans (5), et z sera racine de l'équation

$$z = x + tz,$$

donc

$$z = \frac{x}{1-t}.$$

D'ailleurs

$$\frac{d}{dx} F(z) = F'(z) \frac{dz}{dx} = \frac{z^{\gamma-1} e^{-z}}{1-t} = \frac{x^{\gamma-1} e^{\frac{-x}{1-t}}}{(1-t)^{\gamma}}.$$

On aura donc

$$\frac{x^{\gamma-1} e^{\frac{-x}{1-t}}}{(1-t)^{\gamma}} = x^{\gamma-1} e^{-x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\gamma-1} e^{-x})$$

ou, en multipliant par $x^{1-\gamma} e^x$ et changeant le signe de t ,

$$(7) \quad \frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{(1+t)^{\gamma}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} (\gamma, n) \Phi(-n, \gamma, x).$$

Cette formule, on le voit, indique pour les polynomes Φ_n une fonction génératrice. On en déduira avec la plus grande simplicité, par le procédé classique (*voir par exemple la théorie des fonctions de Legendre*), des formules de récurrence entre des polynomes Φ d'indices voisins, ou leurs dérivées. C'est ainsi qu'on obtiendra

$$(8) \quad (n + \gamma) \Phi_{n+1} + (x - 2n - \gamma) \Phi_n + n \Phi_{n-1} = 0,$$

$$(9) \quad n \Phi_n - n \Phi_{n-1} = x \frac{d\Phi_n}{dx},$$

$$(10) \quad (n + \gamma) \Phi_{n+1} - (n + \gamma - x) \Phi_n = x \frac{d\Phi_n}{dx}.$$

Il est évident qu'on aurait pu déduire ces formules, soit de l'expression (5) de Φ_n , soit encore, par confluence, des formules analogues de la théorie des polynomes de Jacobi, puisque l'on a évidemment

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F\left(-n, x+n, \gamma, \frac{x}{x}\right) = \Phi(-n, \gamma, x).$$

C'est ainsi qu'entre des polynomes Φ d'éléments γ différents, on pourra écrire des formules telles que

$$(11) \quad \Phi(-n+1, \gamma, x) - \Phi(-n, \gamma, x) \\ = \frac{x}{\gamma} \Phi(-n+1, \gamma+1, x),$$

$$(12) \quad \frac{d}{dx} \Phi(-n, \gamma, x) = -\frac{n}{\gamma} \Phi(-n+1, \gamma+1, x),$$

$$(13) \quad \frac{d^2}{dx^2} \Phi(-n, \gamma, x) = \frac{n(n-1)}{\gamma(\gamma+1)} \Phi(-n+2, \gamma+2, x),$$

.....

Écrivons à présent la relation (8) sous la forme

$$(n + \gamma - 1) \Phi_n + (x - 2n - \gamma + 2) \Phi_{n-1} + (n - 1) \Phi_{n-2} = 0,$$

puis la suite

$$\begin{aligned}
 (n + \gamma - 2) \Phi_{n-1} + (x - 2n - \gamma + 4) \Phi_{n-2} + (n - 2) \Phi_{n-3} &= 0, \\
 \dots\dots\dots \\
 (\gamma + 1) \Phi_2 + (x - 2 - \gamma) \Phi_1 + \Phi_0 &= 0, \\
 \gamma \Phi_1 + (x - \gamma) \Phi_0 &= 0, \\
 \Phi_0 - 1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons $(n + 1)$ équations entre lesquelles nous pouvons éliminer les n quantités $\Phi_0 \Phi_1 \dots \Phi_{n-1}$; le coefficient de Φ_n après cette élimination sera un déterminant dont on calculera facilement la valeur, et l'on obtiendra ainsi l'expression de Φ_n au moyen d'un déterminant à n lignes et colonnes

$$(44) \quad \Phi_n = \frac{(-1)^n}{(\gamma)_n} \times \begin{vmatrix} x-\gamma & \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x-\gamma-2 & \gamma+1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x-\gamma-4 & \gamma+2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & x-\gamma-2n+2 \end{vmatrix}.$$

3. Montrons à présent le lien qui existe entre les polynomes de Kummer et d'autres polynomes spéciaux étudiés sous diverses dénominations.

a. Polynomes de Sonine. — Introduits à l'occasion de recherches sur les fonction de Bessel (*loc. cit.*), ce sont les polynomes T définis par la fonction génératrice

$$(15) \quad \frac{e^{\alpha x}}{(1 + \alpha)^{p+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(p + m + 1) x^m T_p^m(x).$$

Par comparaison avec (7), on voit aussitôt que

$$T_p^m(x) = \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p + 1)} \Phi(-m, p + 1, x).$$

Les polynomes de Sonine sont donc, à un facteur près et avec un léger changement de notation, identiques aux polynomes de Kummer; mais la forme que leur a donnée Sonine a l'inconvénient de ne pas faire apparaître le caractère hypergéométrique de ces fonctions.

b. Polynomes de Laguerre. — Définis par Laguerre (*Œuvres*, t. 1, p. 434) sous la forme

$$(16) \quad f_n(x) = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^x),$$

ils sont exprimés, comme on le voit en comparant avec (5), par

$$n! \Phi(-n, 1, -x).$$

c. Polynomes d'Abel. — Ce sont les polynomes (Abel, *Œuvres*, t. 2) définis par

$$(17) \quad \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = \sum h^m \varphi_m(x)$$

et l'on a par conséquent

$$\varphi_m(x) = \Phi(-m, 1, x).$$

d. Polynomes de Milne et Vaney. — Comme généralisation des polynomes de Laguerre, M. Archibald Milne (*Proc. Edinb. Math. Soc.*, t. 33, 1914-1915) a considéré les polynomes

$$(18) \quad \psi_n(x) = (-1)^n e^{kx} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-kx} x^n)$$

et M. Félix Vaney (*Thèse*, Lausanne, 1921) les polynomes

$$(19) \quad P_n(x, a) = e^{-\frac{x}{a}} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{\frac{x}{a}}).$$

On verra sans difficulté que l'on a

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= (-1)^n n! \Phi(-n, 1, kx), \\ P_n(x, a) &= a^n \Phi\left(-n, 1, -\frac{x}{a}\right).\end{aligned}$$

e. *Polynomes d'Hermite.* — Définis, on le sait, par $U_n(x) = e^{\frac{ax^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{ax^2}{2}} \right)$ ils s'écrivent, suivant les cas,

$$\begin{aligned}U_{2m}(x) &= (-1)^m a^m \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-1) \\ &\quad \times \left[1 - \frac{2max^2}{2!} + \frac{2m(2m-2)a^2x^4}{4!} - \dots \right], \\ U_{2m+1}(x) &= (-1)^{m+1} a^{m+1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m+1) \\ &\quad \times \left[x - \frac{2max^3}{3!} + \frac{2m(2m-2)a^2x^5}{5!} - \dots \right].\end{aligned}$$

On aura donc, en comparant avec (1),

$$\begin{aligned}U_{2m}(x) &= (-1)^m a^m \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-1) \Phi\left(-m, \frac{1}{2}, \frac{ax^2}{2}\right), \\ U_{2m+1}(x) &= (-1)^{m+1} a^{m+1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m+1) x \Phi\left(-m, \frac{3}{2}, \frac{ax^2}{2}\right).\end{aligned}$$

f. Ajoutons enfin qu'avec la notation de M. Whittaker (*Modern Analysis*, 2^e édition), on écrirait le polynome de Kummer

$$\Phi(-n, \gamma, x) = x^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{x}{2}} M_{\frac{\gamma}{2}+n, \frac{\gamma}{2}-1}(x).$$

4. Reprenons l'équation différentielle (2) à laquelle satisfait Φ_n , et faisons le changement de variable $y = x^{1-\gamma} z$. Nous trouvons

$$(20) \quad xz'' + (2 - \gamma - x)z' + (n + \gamma - 1)z = 0.$$

C'est encore une équation du type hypergéométrique confluent, et l'une de ses solutions est la série

$\Phi(-n-\gamma+1, 2-\gamma, x)$. Une solution de (2) sera donc la série

$$x^{1-\gamma}\Phi(-n-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

évidemment distincte de Φ_n , et pouvant par conséquent être considérée comme la deuxième intégrale particulière de (2), dont la solution générale sera ainsi

$$(21) \quad y = A\Phi(-n, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma}\Phi(-n-\gamma+1, 2-\gamma, x).$$

On pourra d'ailleurs avoir cette deuxième intégrale sous la forme d'Euler

$$\Phi_n(x) \int_{-\infty}^x \frac{x^{-\gamma} e^{-x} dx}{[\Phi_n(x)]^2}.$$

Mise sous forme canonique, l'équation (2) s'écrira

$$(22) \quad \frac{d}{dx} \left[x^\gamma e^{-x} \frac{dy}{dx} \right] + n x^{\gamma-1} e^{-x} y = 0.$$

D'après les résultats classiques de Sturm sur les équations de ce type, on pourra écrire les relations intégrales importantes (propriété d'orthogonalité)

$$(23) \quad \begin{cases} \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = 0 \\ \int_0^\infty \frac{d\Phi_n}{dx} \frac{d\Phi_m}{dx} dx = 0 \end{cases} \quad \text{pour } m \neq n.$$

Dans le cas $m = n$, l'intégrale

$$I_m = \int_0^\infty x^{\gamma-1} e^{-x} [\Phi_n(x)]^2 dx$$

se calculera aisément, en mettant Φ_n sous la forme (5),

et par une suite d'intégrations par parties ; on trouvera

$$(24) \quad I_m = n! \frac{\Gamma(\gamma + n)}{[(\gamma, n)]^2} = n! \frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma + n)}.$$

Signalons la formule, bien facile à établir,

$$(25) \quad \Phi(-n, \gamma, x) = e^x \Phi(\gamma + n, \gamma, -x).$$

Ainsi que celle-ci, qui se rattache aux suites de Sturm, et se démontre à partir de la relation (8),

$$(26) \quad \frac{(n + \gamma)}{I_n} \frac{\Phi_{n+1}(z) \Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x) \Phi_n(z)}{z - x} \\ = \sum_{\rho=0}^{n-n} \frac{\Phi_\rho(x) \Phi_\rho(z)}{I_\rho}.$$

§. Si dans la fonction de Gauss nous divisons x par $\alpha\beta$ et faisons croître indéfiniment α et β , nous obtenons la série

$$1 + \frac{x}{\gamma, 1} + \frac{x^2}{\gamma(\gamma + 1) 2!} + \dots,$$

que nous désignerons par $\Xi(\gamma, x)$, et qui, on le sait, n'est autre chose qu'une modification de la fonction de Bessel ; on a en effet

$$\Xi(\gamma, x) = \Gamma(\gamma) x^{\frac{1-\gamma}{2}} i^{1-\gamma} J_{\gamma-1}(2i\sqrt{x}).$$

Il est évident qu'on a par conséquent

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(-n, \gamma, -\frac{x}{n}\right) = \Xi(\gamma, x).$$

Mais de plus, ainsi que l'a montré Kummer (*Crelle*, t. 13, p. 139), la série Φ se réduit dans certains cas à la série Ξ , et l'on a

$$\Phi(\alpha, 2\alpha, x) = e^{\frac{x}{2}} \Xi\left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{x^2}{16}\right).$$

Nous aurons donc pour nos polynomes, lorsque $\gamma = -2n$,

$$(28) \quad \Phi(-n, -2n, x) \\ = e^{\frac{x}{2}} \Gamma\left(-n - \frac{1}{2}\right) 2^{2n+1} i^{n+\frac{1}{2}} x^{n+\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{ix}{2}\right).$$

Ce ne sont pas les seuls liens qui rattachent les polynomes de Kummer à la fonction de Bessel; on en peut obtenir un autre très remarquable de la façon suivante: considérons le polynome d'ordre n

$$X_n = x^n \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

En dérivant par rapport à x , on aura

$$X'_n = n x^{n-1} \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)} \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mais par (9),

$$\frac{1}{x} \frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)} \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) = n \left[\Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - \Phi_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

D'où l'on tire

$$X'_n = n x^{n-1} \Phi_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) = n X_{n-1}.$$

Les polynomes X_n forment donc une suite de M. Appell, et si l'on cherche leur fonction génératrice (au sens de M. Appell), c'est-à-dire la fonction $\alpha(h)$ telle que

$$(29) \quad \alpha(h) e^{hx} = \sum \frac{h^m}{m!} X_m(x),$$

on trouve

$$\alpha(h) = 1 - \frac{h}{\gamma+1} + \frac{h^2}{\gamma(\gamma+1)2!} - \dots,$$

c'est-à-dire la série $\Xi(\gamma, -h)$. Écrivant alors (29) en

remplaçant X par sa valeur en fonction de Φ , Ξ par sa valeur en fonction de J , et mettant x à la place de $\frac{1}{x}$ et hx à la place de $-h$, nous arrivons à la relation obtenue autrefois par Sonine en suivant une voie très détournée

$$(30) \quad e^{-h} J_{\gamma-1}(2i\sqrt{hx}) = (i\sqrt{hx})^{\gamma-1} \sum_n \frac{(-1)^n h^n}{n! \Gamma(\gamma)} \Phi_n(x).$$

6. Pour terminer, et afin d'être aussi complet que possible dans la monographie de ces polynomes, j'indique encore les formules de duplication de l'argument x et de duplication de l'indice n , que j'ai établies, la première dans une Note aux *Comptes rendus* (1921), la seconde dans un Mémoire actuellement sous presse au *Bulletin de la Société mathématique de France* :

$$(31) \quad \Phi(-n, \gamma, 2x) \\ = (-1)^n \sum_{\mu} \sum_{\nu} \frac{(-n, \mu + \nu)}{\mu! \nu!} \Phi(-\mu - \nu, \gamma, x),$$

$$(32) \quad \Phi(-2n, \gamma, x) \\ = \Gamma(\gamma) \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \frac{\Gamma(\gamma + q - 1) n^2 (n-1)^2 \dots (n-q+1)^2}{q! \Gamma(\gamma + 2q - 1) \Gamma(\gamma + 2q)} \\ \times x^{2q} \Phi^2(-n + q, \gamma + 2q, x).$$

Leur démonstration, fondée sur les propriétés des fonctions hypergéométriques de deux variables, ne saurait trouver place ici. Pour la même raison, je me contente d'énoncer, d'après M. Nielsen (*Integral logarithmus*), la remarque suivante : le polynome $(\gamma, n) \Phi(-n, \gamma, -x)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite dans le développement en fraction continue de l'expression

$$x^{\gamma-1} e^x \int_x^{\infty} e^{-x} x^{-\gamma} dx.$$

[R6]

**INTRODUCTION A L'ÉTUDE DE LA MÉCANIQUE
ET DE SES PRINCIPES ;**

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

(Suite.)

6. Invoquons le principe de causalité et cherchons à déduire, des lois de Képler, *des caractères cinématiques communs* aux mouvements des différentes planètes. En remontant à ces caractères communs, nous remonterons aux causes de ces mouvements, nous mettrons en évidence les forces qui les produisent.

De la deuxième loi de Képler, nous déduisons d'abord que l'accélération de chaque planète est portée par la droite qui la joint au Soleil. En effet, soient S le Soleil, P la planète, PV son vecteur vitesse, SH un vecteur équipollent. Le parallélogramme SPVH a une aire constante. Soit K la projection de S sur PV. On a

$$SK \times SH = a^2.$$

Pour déduire le point H de la droite PV, on tracera un cercle de centre S, de rayon a , on prendra le pôle de cette droite et l'on fera tourner ce pôle d'un angle droit autour de S; de là, on déduit aisément que la tangente à l'hodographe (lieu du point H) est parallèle à SP, qui porte, par suite, l'accélération de P.

De la première loi de Képler, on déduit que, pour une planète déterminée, l'accélération est en raison inverse du carré de la distance. En effet, le lieu de K

est la circonférence principale de l'ellipse décrite par P. On en déduit le lieu de H par une inversion et une rotation d'un droit autour de O. L'hodographe est donc aussi une circonférence : soit σ l'abscisse curviligne de H sur cette courbe. L'accélération est $\frac{d\sigma}{dt}$ ou $\frac{d\sigma}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$, en appelant θ l'angle de SP avec un rayon vecteur fixe, que nous prenons pour axe polaire. Nous avons, d'après la deuxième loi de Képler,

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \alpha^2.$$

Or $d\theta$ est l'angle de contingence de l'hodographe, $\frac{d\sigma}{d\theta}$ est son rayon de courbure, qui a une valeur constante R. L'accélération est donc égale à

$$\frac{\alpha^2 R}{r^2};$$

elle est d'ailleurs dirigée dans le sens PS.

Étudions maintenant les conséquences de la troisième loi de Képler. Soient a, b les demi-axes de la trajectoire, le cercle décrit par K a pour rayon a , la puissance de S par rapport à ce cercle est $-b^2$. Le rayon R de l'hodographe est donné par

$$\frac{R}{a} = \frac{\alpha^2}{b^2},$$

car ce cercle est égal à un cercle inverse, par rapport à O, du cercle décrit par K. Or nous avons

$$\frac{2\pi ab}{T} = \alpha^2.$$

L'accélération qui sollicite chaque planète est donc de la forme

$$\frac{\alpha^2}{r^2}$$

en posant

$$\mu = \alpha^2 R = \frac{\alpha^4 a}{b^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Puisque $\frac{a^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes, d'après la troisième loi de Képler, le coefficient μ est aussi le même.

La méthode précédente, due à M. Niewenglowski, nous donne donc des caractères cinématiques communs aux mouvements des différentes planètes, caractères qui peuvent se résumer ainsi :

Chaque planète possède une accélération dirigée vers le Soleil, et d'intensité $\frac{\mu}{r^2}$, le coefficient μ étant le même pour toutes les planètes.

Ces caractères communs portent sur l'accélération de chaque planète. D'où cette idée, que *l'accélération d'un mouvement est liée intimement aux causes de ce mouvement.*

Dès lors, si nous envisageons l'hypothèse que le mouvement des planètes autour du Soleil est le résultat d'une certaine action du Soleil sur chacune d'elles, les conséquences précédentes des lois de Képler militent singulièrement en faveur de cette hypothèse.

Sans enfreindre le principe de symétrie, on ne peut concevoir une action du Soleil sur une planète sans qu'elle s'exerce suivant la droite joignant ces astres. Or l'accélération de la planète admet cette droite pour support et elle est uniquement fonction de la distance des deux astres. Il est naturel de penser qu'il existe une relation simple entre cette accélération et l'action supposée du Soleil sur la planète.

7. Mais si notre esprit se réclame du principe de symétrie, il ne saurait admettre l'absence de réciprocité. Comment supposer que le Soleil exerce une action

sur les planètes, sans penser en même temps que les planètes influencent le Soleil, et s'influencent mutuellement?

Mais alors, n'est-il pas possible, par ces influences mutuelles, d'expliquer les écarts que l'on observe entre les lois de Képler et les lois réelles du mouvement? L'exactitude approchée des lois de Képler résulterait d'une prépondérance des actions solaires vis-à-vis des actions planétaires mutuelles, et l'intervention simultanée de ces actions, participant d'une loi commune, fournirait très exactement la synthèse des mouvements d'ensemble du système solaire.

Essayons donc de faire intervenir l'ensemble des actions de chaque planète sur les autres corps du système solaire, et *admettons que toutes ces actions s'exercent indépendamment les unes des autres*. Comment caractériser l'action d'une planète déterminée? Chaque planète joue, par rapport à ses satellites, le rôle d'un soleil. Pour ces satellites, situés à petite distance de la planète, l'action de cette dernière est prépondérante, et l'on vérifiera grossièrement les lois de Képler par rapport à trois axes de directions fixes, dont l'origine est proche de la planète. La planète imprime donc à un point, situé à la distance r' de cet astre, une accélération dirigée vers elle et égale à $\frac{\mu'}{r'^2}$ (nous négligeons l'accélération d'entraînement, ce qui est admissible, à cause de la faible durée de la révolution des satellites vis-à-vis de celle de la planète autour du Soleil).

Cela posé, pour confronter, avec l'observation, la dernière hypothèse qui vient d'être formulée, nous aurons à résoudre le problème général suivant :

Soit un système d'axes O_1, x_1, y_1, z_1 , dont les directions sont invariables par rapport aux étoiles fixes, mais dont nous évitons, pour le moment, de spécifier l'ori-

gine O_1 . Soient $n + 1$ points

$$P_0, P_1, P_2, \dots, P_n,$$

où P_0 (par symétrie, et non plus S) représente le Soleil, et P_1, P_2, \dots, P_n les diverses planètes ou même satellites. Désignons par r_{ik} la distance $P_i P_k$, et admettons que l'accélération de P_i soit la somme géométrique de n vecteurs, portés par les n droites $P_i P_k$ ($K \neq i$) et de modules respectifs $\frac{\mu_i}{r_{ik}^2}$. Envisageons alors le problème de cinématique pure, qui consiste à étudier, dans ces conditions, les mouvements de ces n points, et cherchons si, pour un choix convenable des constantes μ_i et des constantes d'intégration, on parvient à reconstituer les mouvements d'ensemble du système solaire.

L'expérience répond affirmativement. Si le problème précédent n'est pas soluble analytiquement d'une manière complète, du moins on peut en trouver une solution approchée, et celle-ci s'accorde avec les faits observés. On peut montrer de plus que le centre des distances proportionnelles des points P_0, P_1, \dots, P_n avec les coefficients $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ possède une accélération nulle. Pour cela, mettons les équations qui définissent le mouvement de ces différents points sous forme vectorielle (1) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_0}{dt^2} &= \mu_1 \frac{P_1 - P_0}{r_{10}^3} + \mu_2 \frac{P_2 - P_0}{r_{20}^3} + \dots + \mu_n \frac{P_n - P_0}{r_{n0}^3}, \\ \frac{d^2 P_1}{dt^2} &= \mu_0 \frac{P_0 - P_1}{r_{10}^3} + \mu_2 \frac{P_2 - P_1}{r_{12}^3} + \dots + \mu_n \frac{P_n - P_1}{r_{1n}^3}, \\ \frac{d^2 P_2}{dt^2} &= \mu_0 \frac{P_0 - P_2}{r_{20}^3} + \mu_1 \frac{P_1 - P_2}{r_{12}^3} + \dots + \mu_n \frac{P_n - P_2}{r_{2n}^3}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d^2 P_n}{dt^2} &= \mu_0 \frac{P_0 - P_n}{r_{n0}^3} + \mu_1 \frac{P_1 - P_n}{r_{n1}^3} + \dots + \mu_{n-1} \frac{P_{n-1} - P_n}{r_{n-1,n}^3}. \end{aligned}$$

(1) Il n'est pas nécessaire, pour suivre ce calcul, d'être rompu

On déduit immédiatement de ces équations

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n) = 0,$$

relation qui exprime que le centre des distances proportionnelles ⁽¹⁾ précédemment cité a une accélération nulle par rapport aux axes $O_1 x_1 y_1 z_1$. D'après le théorème de Coriolis, nous pouvons d'ailleurs, sans altérer les accélérations de P_0, P_1, \dots, P_n , substituer au trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ un trièdre $O_2 x_2 y_2 z_2$, animé par rapport au premier d'une translation rectiligne et uniforme.

D'après cela, on peut prendre pour origine O_1 du

à la pratique des opérations vectorielles. Le lecteur comprendra immédiatement le sens des notations ci-dessus par les remarques suivantes : le vecteur $P_i P_k$ est égal à $OP_k - OP_i$, quel que soit le point O . On peut donc l'écrire $P_k - P_i$ en sous-entendant le point O . De la même manière, le vecteur vitesse et le vecteur accélération d'un point P sont respectivement les dérivées géométriques première et seconde, par rapport au temps, du vecteur OP , quel que soit le point fixe O . On peut donc les représenter respectivement par $\frac{dP}{dt}$ et $\frac{d^2 P}{dt^2}$. Enfin la notation $\mu_i \frac{P_i - P_k}{r_{ik}^3}$ représente le produit du vecteur $P_k P_i$ (ou $P_k - P_i$) par la quantité scalaire $\frac{\mu_i}{r_{ik}^3}$; ce produit est un vecteur porté par la droite $P_i P_k$ et dont l'intensité s'obtient en multipliant par $\frac{\mu_i}{r_{ik}}$ celle de $P_i - P_k$; cette intensité est donc $\frac{\mu_i}{r_{ik}}$.

(1) Ici encore, l'élève n'aura aucune peine à établir que si la somme $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n$ n'est pas nulle, on peut écrire l'égalité vectorielle

$$(E) \quad \mu_0 OP_0 + \mu_1 OP_1 + \dots + \mu_n OP_n = (\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n) OG,$$

le point G ayant une position indépendante de O . On peut donc encore sous-entendre O et écrire

$$\mu_0 P_0 + \mu_1 P_1 + \dots + \mu_n P_n = (\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n) G.$$

Le point G défini par l'équation (E) n'est autre que le centre des distances proportionnelles. On le verra en projetant sur trois axes

trièdre O, x, y, z , le centre des distances proportionnelles des corps P_0, P_1, \dots, P_n du système solaire, affectés des coefficients respectifs $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$: ce point est, nous l'avons déjà dit, très voisin du Soleil.

8. Ayant ainsi réalisé, par approximations successives, une synthèse satisfaisante des mouvements du système solaire, nous allons introduire les concepts de *force* et de *masse*. A cet effet, reprenons les équations vectorielles qui déterminent les accélérations de P_0, P_1, \dots, P_n et considérons le tableau carré obtenu en supprimant, dans leurs seconds membres, les signes d'addition; à vrai dire, il manque, dans ce tableau, les termes de la diagonale principale; écrivons à leur place des zéros. Cela posé, si nous multiplions tous les éléments de la première ligne par μ_0 , ceux de la seconde par μ_1 , ..., etc., nous transformons ce tableau en un tableau symétrique gauche, dont les vecteurs sont proportionnels aux accélérations, et se présentent avec ce caractère de réciprocité qui nous permettra d'affirmer: deux points exercent l'un sur l'autre des actions égales et directement opposées. Nous dirons donc que chacun de ces vecteurs représente une *force* et que les coefficients $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ sont les *masses* de P_0, P_1, \dots, P_n ; la masse est donc une quantité scalaire, constante pour chacun des corps considérés. Les forces que nous venons d'introduire correspondent aux différentes accélérations. D'une accélération, on déduit la force correspondante en multipliant cette accélération par la masse du point qu'elle affecte.

Les forces provenant de l'action mutuelle de deux corps du système seront, d'après ce qui précède, en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance.

En résumé, pour élaborer la synthèse précédente, nous avons dû admettre les principes suivants :

1° *Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.* — Entre deux points s'exercent des forces représentant l'action de chacun de ces points sur l'autre; ces forces sont égales et directement opposées.

2° *Principe de la proportionnalité des forces aux accélérations.* — Soit une force \vec{F} , agissant sur un point de masse m . Elle lui imprime une accélération $\vec{\gamma}$, liée à \vec{F} par

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}.$$

3° *Principe de l'indépendance des effets des forces.* — Supposons que des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$, agissant isolément sur un point de masse m , lui communiquent respectivement les accélérations $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots$. L'action simultanée de ces forces sur le point lui communique une accélération égale à la somme géométrique des précédentes.

A partir de ces principes et de l'hypothèse que les forces mutuelles d'attraction sont en raison inverse du carré des distances, nous pourrions reconstituer les mouvements du système solaire sans avoir à vaincre d'autres difficultés que des difficultés d'intégration. Il suffira pour cela de nous donner les positions de ses divers points et leurs vitesses à un même instant, le calcul permettra alors de déterminer leur mouvement ultérieur.

9. Pour obtenir des solutions, même approchées, de systèmes différentiels aussi complexes que le précédent, les analystes ont dû s'attaquer d'abord à des sys-

tèmes de même nature et d'un moins grand nombre d'équations. Le plus simple qui se puisse concevoir est celui qui est fourni par une seule équation vectorielle

$$\vec{F} = m \vec{\gamma},$$

où nous supposons que m est un coefficient donné, que $\vec{\gamma}$ est l'accélération d'un point P par rapport à un système de référence déterminé (qu'on peut caractériser par un système d'axes O, x, y, z), et que \vec{F} est donné à chaque instant en fonction de la position du point P et de sa vitesse. Ici, nous simplifions d'un côté et nous généralisons de l'autre en augmentant la complexité des caractères de dépendance de \vec{F} . Cette étude, purement abstraite, de l'équation

$$\vec{F} = m \vec{\gamma} \quad \text{ou} \quad \vec{F} = m \frac{d^2 P}{dt^2},$$

constitue ce que l'on appelle couramment *la Dynamique du point matériel*. Elle a un double intérêt : elle montre, dans les cas les plus simples, la nature des difficultés analytiques à vaincre; de plus, nous le verrons plus loin, elle est susceptible d'applications concrètes, en permettant de reconstituer, avec une approximation suffisante, certains mouvements voisins de l'écorce terrestre.

10. A un point de vue abstrait, également, le mathématicien peut se proposer d'étudier la question suivante, qui constitue *la Dynamique des systèmes de points matériels*.

Soient des points, en nombre fini, P_0, P_1, \dots, P_n affectés de coefficients m_0, m_1, \dots, m_n . Étudier leurs

système partiel seront soumis alors à deux espèces de forces :

1° Les forces extérieures, qui sont l'action du Soleil sur chaque astre du système (réduit à un point);

2° Les forces intérieures, résultat des attractions mutuelles de la planète et de ses satellites.

Pour faire la synthèse des mouvements du système considéré, nous serons amenés à écrire un système de la forme (2).

II. Voici quelques propriétés générales des systèmes de la forme (2) qui nous seront utiles dans la suite. En additionnant membre à membre toutes les équations de ce système, il vient

$$m_0 \frac{d^2 P_0}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 P_1}{dt^2} + \dots + m_n \frac{d^2 P_n}{dt^2} = \vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_1 + \dots + \vec{\Phi}_n;$$

ou encore, en appelant G le centre des distances proportionnelles de nos points, affectés des coefficients m_0, m_1, \dots, m_n ,

$$(3) \quad (m_0 + m_1 + \dots + m_n) \frac{d^2 G}{dt^2} = \vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_1 + \dots + \vec{\Phi}_n.$$

L'accélération du mouvement du point G est donc la même que si l'on faisait agir, sur la masse totale concentrée en ce point, la résultante des forces extérieures.

Si, pour le système considéré, il se trouve que cette résultante ne dépende, à chaque instant, que des coordonnées de G et de sa vitesse, l'équation (3) permettra d'étudier le mouvement de G, indépendamment de l'ensemble du système.

Mais on peut encore donner à l'énoncé précédent une autre forme. Introduisons à cet effet les quantités

de mouvements des points P_0, P_1, \dots, P_n . Nous entendons par là les vecteurs

$$m_0 \frac{dP_0}{dt}, \quad m_1 \frac{dP_1}{dt}, \quad \dots, \quad m_n \frac{dP_n}{dt}.$$

Ils forment un système, dont nous appellerons $\vec{\rho}$ la « résultante de translation », et $\vec{\sigma}$ le « moment résultant » par rapport à un point fixe dans notre système de référence ⁽¹⁾. Introduisons la résultante de translation \vec{R} et le moment résultant \vec{S} (par rapport au même point) des forces extérieures. L'égalité précédente, résultant de l'addition des équations du système (2), peut encore s'écrire

$$(3 \text{ bis}) \quad \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{R}.$$

Proposons-nous de même d'établir l'équation vectorielle

$$(4) \quad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{S}.$$

A cet effet, nous utiliserons la remarque suivante : Prendre le moment par rapport à O de la quantité de mouvement de P, c'est-à-dire du vecteur $m \frac{dP}{dt}$, c'est procéder à une opération vectorielle sur les deux vecteurs OP et $m \frac{dP}{dt}$. Nous indiquerons cette opération par la notation

$$OP \wedge m \frac{dP}{dt}.$$

(¹) On donne encore à $\vec{\sigma}$ le nom de *moment cinétique*. La résultante cinétique $\vec{\rho}$ n'est autre que la quantité de mouvement du centre de gravité, donc de la masse totale.

Les propriétés de cette opération, couramment dénommée *produit géométrique* (ou *vectorel*), sont les suivantes :

1° Elle n'est pas commutative, l'échange des facteurs modifie le sens du vecteur produit, sans modifier sa direction ni sa grandeur (ou encore, le multiplie par -1);

2° Elle est distributive par rapport à l'addition vectorielle (théorème de Varignon), et par suite la dérivation géométrique d'un produit de cette nouvelle espèce s'opère par le même mécanisme que celle des produits, en Algèbre.

Cela posé, multiplions, au sens précédent, les équations (2) respectivement par OP_0 , OP_1 , ..., OP_n et ajoutons. Remarquons que

$$\begin{aligned} OP \wedge m \frac{d^2 P}{dt^2} &= m \left(OP \wedge \frac{d^2 P}{dt^2} \right) \\ &= m \left[\frac{d}{dt} \left(OP \wedge \frac{dP}{dt} \right) - \frac{dP}{dt} \wedge \frac{dP}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Or le produit géométrique de deux vecteurs de même direction est nul (car c'est, en somme, le moment d'un vecteur par rapport à un point de son support), donc on a

$$OP \wedge m \frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(OP \wedge m \frac{dP}{dt} \right).$$

Dans l'addition, les moments des forces intérieures, deux à deux opposés, s'éliminent, et l'on obtient donc bien, comme nous l'avions annoncé, l'équation (4) : elle exprime le *théorème du moment cinétique*.

Les équations (3 bis) et (4) équivalent à six équations ordinaires : ce sont les six équations universelles du mouvement des systèmes de points. Pour l'équilibre

par rapport au système de référence choisi, on aura les six conditions déduites de

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{S} = 0.$$

Mais est-il nécessaire de le redire : tout ce qui a été exposé dans les n^{os} 6 et 7 est de nature purement mathématique. Nous avons seulement trouvé une classe de phénomènes s'adaptant à ce cadre : ceux de la gravitation. Il y a un chemin notable à parcourir pour être en mesure d'appliquer des systèmes de la forme (2) à la synthèse de phénomènes d'un autre ordre.

12. Quoi qu'il en soit, il était commode, pour notre exposition, d'étudier les propriétés abstraites qui précèdent. Avant d'aller plus loin, appliquons au système solaire les équations vectorielles

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{R}, \quad \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{S}.$$

Dans ce cas, le système (2) se réduit au système (1) : il n'y a pas de forces extérieures. Donc

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{S} = 0.$$

Par suite, les vecteurs $\vec{\varphi}$ et $\vec{\sigma}$ sont constants : la constance de $\vec{\varphi}$, c'est l'absence d'accélération du point G, ou encore la possibilité de prendre ce point pour origine des axes auxquels on rapporte les mouvements du monde solaire. Dire, comme on le fait parfois, que le centre du système solaire est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, n'est qu'un abus d'interprétation des équations qui précèdent : ainsi que nous l'avons déjà dit, cette question ne pourra être résolue que par

des observations précises, opérées sur les déplacements des étoiles les plus voisines du Soleil.

13. Dans les numéros qui précèdent, nous avons échafaudé une théorie purement mathématique. Les forces que nous y avons introduites sont des êtres abstraits, dont nous supposons connue l'expression : chaque force est le produit d'une masse par une accélération. Nous admettons, à titre de postulat, que la masse est indépendante du système de référence. Par contre, si l'on modifie le système de référence, il faut modifier l'accélération de chaque point P_0, P_1, \dots, P_n . Dans ces conditions, les forces seront elles-mêmes modifiées. Pour étudier le mouvement par rapport au nouveau système, on y évaluera les accélérations relatives des points P_0, P_1, \dots, P_n . On les déduit des accélérations anciennes au moyen du théorème de Coriolis. Prenons par exemple le cas d'un seul point P, dont le mouvement par rapport à un trièdre O, x_1, y_1, z_1 est régi par l'équation

$$\vec{F}_1 = m \vec{\gamma}_1$$

Considérons un autre trièdre $Oxyz$ en mouvement par rapport au premier, soit $\vec{\gamma}$ l'accélération de P par rapport à ce trièdre; désignons par $\vec{\gamma}_e$ l'accélération d'entraînement, par $\vec{\gamma}_c$ l'accélération complémentaire. D'après le théorème de Coriolis,

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c.$$

On peut donc écrire l'équation vectorielle définissant le mouvement du point P par rapport au trièdre $Oxyz$ sous la forme

$$m \vec{\gamma} = \vec{F}_1 - m \vec{\gamma}_e - m \vec{\gamma}_c;$$

on voit aussi comment il faut modifier l'expression de la force \vec{F}_1 : à cet effet, on la compose avec deux forces fictives, la *force centrifuge* $-m\vec{\gamma}_c$ et la *force centrifuge composée* $-m\vec{\gamma}_c$. Cette dernière disparaît lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

14. Plaçons-nous dans ce dernier cas, et supposons que l'origine des axes $Oxyz$ soit le point G , centre des distances proportionnelles, précédemment considéré, des points P_0, P_1, \dots, P_n . Pour obtenir l'accélération de chacun de ces points dans le nouveau système, il suffit de faire la différence géométrique de leur accélération dans l'ancien système, et de l'accélération d'entraînement commune à tous ces points, c'est-à-dire celle de G dans l'ancien système. On peut donc considérer que le mouvement des points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ par rapport au système $Oxyz$ se produit sous l'action de forces dont la résultante s'obtient, pour chaque point, en corrigeant la même résultante pour l'ancien système d'une force égale au produit de la masse de ce point par l'accélération d'entraînement commune. Or, ces forces correctives ont une résultante passant par le point G (1). Le moment résultant des forces correctives

(1) C'est le théorème de la coïncidence du centre des vecteurs parallèles et du centre des distances proportionnelles.

Soit un système formé de vecteurs parallèles, de résultante de translation non nulle. Si l'on fait varier la direction commune aux vecteurs du système sans changer leurs rapports algébriques, de manière que le support de chacun d'eux passe par un point fixe, le support du vecteur unique équivalent aux distances données passe par le centre des distances proportionnelles de ces points, affectés de coefficients qui sont entre eux comme les rapports des vecteurs du système.

par rapport au point G est donc nul. D'où cette importante proposition :

On peut appliquer le théorème du moment cinétique dans le mouvement par rapport au centre de gravité sans avoir à faire subir aux forces les modifications qu'exigerait un changement arbitraire de système de référence.

Ces préliminaires théoriques posés, nous pouvons aborder l'étude des données de la Mécanique terrestre.

(A suivre.)

[M'3jz]

NOTE SUR LES PODAIRES ;

PAR M. M.-F. EGAN.

1. On sait que la podaire d'une courbe par rapport à un point O touche la courbe aux pieds des normales issues de O. En effet, si P est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente au point M de la courbe, la podaire et le cercle OMP se touchent en P. Or ce cercle, ayant OM pour diamètre, touche la courbe en M dans le cas limite où P se confond avec M.

Il est donc naturel, dans le cas d'une conique S, de chercher à mettre l'équation de sa podaire sous la forme

$$SS_1 - S_2^2 = 0,$$

S_1 et S_2 étant des coniques. Et de fait, si O est le point (p, q) et S est $ax^2 + by^2 + c$, l'équation de la podaire

peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (ax^2 + by^2 + c) \{ b(x-p)^2 + a(y-q)^2 \} \\ & = \{ (a-b)xy - aqx + bpy \}^2, \end{aligned}$$

S_2 étant l'hyperbole d'Apollonius, comme on pouvait s'y attendre. La podaire est donc l'enveloppe des coniques

$$\lambda^2(ax^2 + by^2 + c) + 2\lambda \{ (a-b)xy - aqx + bpy \} + b(x-p)^2 + a(y-q)^2 = 0.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$a(\lambda x + y - q)^2 + b(x - \lambda y - p)^2 + c\lambda^2 = 0,$$

soit, en posant $\lambda = \cot z$,

$$\begin{aligned} S_\alpha &= a(x \cos z + y \sin z - q \sin z)^2 \\ &+ b(x \sin z - y \cos z - p \sin z)^2 + c \cos^2 z = 0. \end{aligned}$$

Transportons l'origine au point O et considérons la transformation T_α donné par

$$z' = z \cos z e^{i\alpha} \quad (z = x + iy)$$

comprenant une rotation α autour de O suivie d'une homothétie de rapport $\cos z$ ayant O pour centre. Il est assez facile de voir que la conique S_α est la transformée T_α de S.

2. Or, c'est là un fait général; si S est une courbe plane quelconque, l'enveloppe des courbes $T_\alpha S$, lorsque α prend de différentes valeurs, est la podaire de S par rapport au point O.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que les transformés $T_\alpha M$ d'un point donné M sont tous situés sur le cercle ayant OM pour diamètre. Si M décrit une courbe, ses coordonnées sont des fonctions données

d'un paramètre t , et les coordonnées de $T_\alpha M$ s'exprimeront par des équations de la forme

$$x = f(t, \alpha), \quad y = g(t, \alpha).$$

Or, d'après un théorème de Czuber ⁽¹⁾, l'enveloppe des courbes $\alpha = \text{const.}$, c'est-à-dire des $T_\alpha S$, s'identifie avec celle des courbes $t = \text{const.}$, toutes les deux étant données par

$$\frac{dx, y}{dt, \alpha} = 0.$$

Les courbes $t = \text{const.}$ étant les cercles de diamètre OM , la proposition est démontrée.

3. La podaire de S a une relation géométrique aux courbes $T_\alpha S$ qui rend intuitif le théorème précédent. Soient P et P_α les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur la tangente à S au point M et sur la tangente à $T_\alpha S$ au point correspondant M_α . Comme P_α est le transformé du point P , $P_\alpha P$ est perpendiculaire à OP_α et se confond par conséquent avec la tangente $M_\alpha P_\alpha$; aussi, l'angle POP_α est égal à α . Désignons par *podaire d'angle* θ d'une courbe le lieu de l'intersection de la tangente avec la droite qu'on obtient en faisant tourner autour du pôle O , d'un angle θ , la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente. (Ainsi la podaire d'angle zéro est la podaire au sens ordinaire.) D'après ce qu'on vient de voir, P est situé sur la podaire d'angle $-\alpha$ de $T_\alpha S$, c'est-à-dire que la podaire de S est la podaire d'angle $-\alpha$ de $T_\alpha S$.

Or, la podaire d'angle donné d'une courbe touche la

(1) CZUBER, *Archiv der Math. u. Physik*, 1901, p. 113. — Voir EGAN, *On some theorems of Czuber's* (*Messenger of Mathematics*, 1913, p. 178).

courbe aux pieds des quasi-normales issues du pôle; la démonstration que nous avons indiquée ci-dessus pour la podaire ordinaire s'applique presque mot à mot. Il s'ensuit que la podaire de S touche les $T_\alpha S$, ce qui démontre de nouveau notre proposition.

4. Nous avons vu que les tangentes à toutes les $T_\alpha S$, répondant à une même tangente t de S , concourent au pied de la perpendiculaire abaissée de Q sur t . D'autre part, deux courbes quelconques directement semblables peuvent évidemment être regardées comme des transformées T_α d'une troisième courbe. En effet, O étant le centre de similitude, δ l'angle constant entre deux demi-droites correspondantes, k le rapport des dimensions linéaires des deux systèmes, les angles α et β de transformation sont donnés par

$$\alpha - \beta = \delta, \quad \cos \alpha = k \cos \beta.$$

Donc : *étant données deux courbes directement semblables, le lieu de l'intersection des couples de tangentes correspondantes est la podaire, par rapport au centre de similitude, d'une troisième courbe semblable aux deux premières.*

Deux cercles sont semblables d'une infinité de façons, et l'on peut associer les couples de tangentes faisant entre elles un angle donné quelconque; d'où le théorème connu, que le point d'intersection d'un tel couple décrit un limaçon bitangent aux deux cercles.

CORRESPONDANCE.

M. R. Bouvaist. — Dans le numéro d'octobre 1919 des *N. A.*, M. Egan énonce la propriété suivante, dont

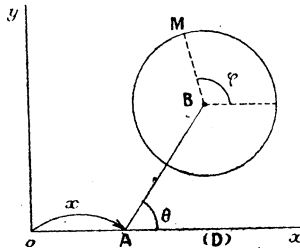
il serait, dit-il, intéressant de trouver une démonstration géométrique :

Soient un triangle Δ inscrit à une parabole et Δ' son triangle médian; l'axe de la parabole est une droite de Simson pour Δ' .

Voici une démonstration géométrique simple de cette propriété : Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle Δ , l'hyperbole d'Apollonius (H) de O par rapport à la parabole (Π), circonscrite au triangle, est le lieu des points d'intersection des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes à (Π) avec les diamètres de (Π) correspondants. (H) est donc circonscrite à Δ' ; elle a d'ailleurs pour asymptote l'axe de (Π), ce qui démontre la proposition.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre homogène pesante AB, de longueur $2l$, de masse m , est assujettie à rester dans un plan vertical (P), son extrémité A glissant sur une horizontale (D) de ce plan; en outre, un disque circu-



laire (C) homogène pesant, de masse m , de rayon $r (< l)$ est fixé par son centre à l'extrémité B autour de laquelle

il peut tourner librement [en restant dans le plan (P)].
Toutes les liaisons sont supposées sans frottement.

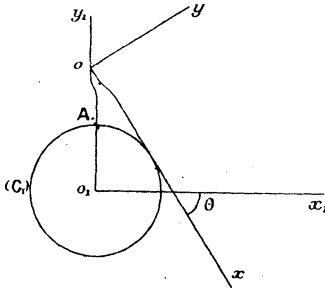
1° Former les équations du mouvement du système et montrer qu'elles s'intègrent par quadratures.

2° Existe-t-il des mouvements dans lesquels la barre AB glisse en restant parallèle à elle-même? Que peut-on dire alors de la réaction de (D) et de la vitesse de A?

3° A un certain instant t , on fixe brusquement l'extrémité A en un point de (D); calculer la perte de force vive du système, connaissant l'état des vitesses immédiatement avant l'instant t .

NOTATIONS. — On prendra (D) pour axe Ox , l'axe des y étant dirigé suivant la verticale ascendante; on désignera l'abscisse de A par x , l'angle de AB avec Ox par θ , et l'angle d'un rayon déterminé BM de (C) avec Ox par φ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un plan mobile (rapporté aux axes rectangulaires xOy) est assujéti à glisser sur un plan fixe (rapporté aux axes rectangulaires $x_1O_1y_1$) en



satisfaisant aux conditions suivantes : La droite Ox du plan mobile reste tangente au cercle (C_1) de centre O_1 et de rayon a du plan fixe, le point O de la barre décrit le prolongement Ay_1 d'un diamètre de (C_1) .

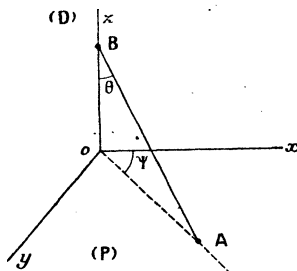
1° Trouver la base et la roulante;

2° Former l'équation du cercle des inflexions dans le plan mobile et chercher ses intersections avec O_1y_1 .

(On désignera l'angle de Ox avec O_1x_1 par θ ; on remarquera que sur la figure cet angle est négatif.)

(Poitiers, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre matérielle homogène pesante AB, de section infiniment petite, de longueur $2l$



est assujettie aux liaisons suivantes : son extrémité A glisse sans frottement sur un plan horizontal (P), tandis que son extrémité B décrit sans frottement une verticale fixe (D).

1° Étudier et discuter le mouvement de la barre.

[NOTATIONS. — On prendra pour axe Oz la droite (D), pour axes Ox et Oy deux droites rectangulaires du plan (P) issues de la trace O de (D) sur (P); on désignera par ψ l'angle du plan passant par AB et (D) avec le plan xOz et par θ l'angle de AB avec Oz; dans la discussion on supposera que la barre peut traverser le plan (P).]

2° On supposera que la barre puisse se soulever au-dessus de (P); à quelle condition doivent satisfaire les quantités ψ_0 et θ_0 qui définissent les vitesses initiales pour que la barre ne se soulève pas au début du mouvement. Peut-on écrire la condition obtenue en n'employant comme éléments variables que la vitesse v du point C (milieu de AB) et sa hauteur ζ au-dessus de (P)?

3° La barre étant supposée immobile à l'instant t_0 , une balle de dimensions négligeables vient la frapper en son milieu C, avec une vitesse V, dans une direction horizontale, perpendiculaire au plan vertical passant par la barre; aussitôt après le choc, la balle s'incorpore à la barre. Calculer les valeurs de ψ' et θ' immédiatement après le choc.

(Poitiers, novembre 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une plaque carrée, homogène, pesante PQRS est assujettie aux liaisons suivantes, réalisées sans frottement: deux sommets consécutifs P et Q glissent sur une même circonférence C fixe dont le plan est horizontal et dont le diamètre est égal aux diagonales de la plaque. Celle-ci peut donc librement tourner autour de l'axe Oz de C et autour du côté PQ.

1° Étudier le mouvement de la plaque. On limitera la discussion au cas où, à l'instant initial, la plaque fait un angle θ_0 avec le plan de C et se trouve animée d'une rotation de vitesse ω autour de Oz, en cherchant uniquement le sens de la variation initiale de l'angle θ du plan de la plaque avec celui de C;

2° La plaque étant immobile, verticale, au-dessous du plan de C, on applique une percussion en son centre; quel est l'état des vitesses immédiatement après la percussion?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une roue de poids P est assimilable à une circonférence homogène de rayon r, dont le centre O est situé sur l'axe Oz de rotation, mais dont le plan Q fait un angle α avec le plan R normal à l'axe. On prend pour origine le centre O, pour axe Oy, l'intersection de Q et de R.

1° Équation de l'ellipsoïde d'inertie de la roue relatif au point O;

2° Évaluer les réactions qui s'exerceraient, pendant un mouvement de la roue de vitesse angulaire ω autour de Oz supposé horizontal et fixe, sur les tourillons qu'on assimilera à deux points situés sur Oz à une même distance r du centre. Application $\alpha = 1^\circ$; $\omega = 200$ tours par minute;

3° Même question en supposant qu'au poids P s'ajoute un couple d'axe Oz, de moment connu N.

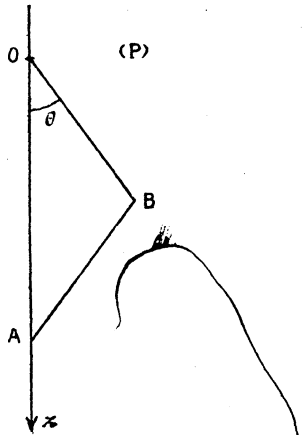
(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une tige rectiligne homogène pesante AB de masse M se meut dans un plan vertical P; l'une de ses extrémités A décrit la verticale descendante Oz; l'autre B est reliée à O par un fil OB, de même longueur $2l$ que la tige. Il n'y a pas de frottement :

1° Le plan P étant fixe, trouver le mouvement de la tige, le fil étant censé tendu. On suppose qu'à l'instant initial,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

2° Dans les mêmes conditions, calculer la réaction $M \times R$ agissant en A et la tension $M \times T$ du fil. Quelles sont les valeurs de R et de T à l'instant initial?



3° On suppose, en second lieu, que le plan P tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante ω . Quelle est l'équation du mouvement de la tige, les conditions initiales étant les mêmes? Peut-on choisir ω de manière que θ reste constamment égal à $\frac{\pi}{6}$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un solide homogène S, de masse M, est limité par deux sphères concentriques de rayon r et $2r$.

1° Ellipsoïde d'inertie de S relatif à un point O de sa surface extérieure;

2° S, étant censé non pesant et mobile autour de O, supposé fixe, prend un mouvement à la Poinsot. A l'instant initial, il est animé d'une rotation autour d'un axe O Ω faisant un angle de 45° avec la droite qui joint O au centre commun C des deux sphères. On demande la

force vive de S, son moment cinétique $O\sigma$ par rapport à O; on donnera les projections $O\sigma_1$ et $O\sigma_2$ de ce vecteur sur le plan tangent en O et sur OC;

3° Définir géométriquement les deux cônes roulants correspondant au mouvement précédent.

(Grenoble, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un solide S est limité extérieurement par un cylindre circulaire droit; la distribution des masses est telle que le centre de gravité G est sur l'axe Gx du cylindre, que Gx est un des axes principaux d'inertie relatif à G, et que les moments d'inertie par rapport aux trois axes principaux sont : pour Gx , $A = 3MK^2$; pour Gy , $B = 4MK^2$; pour Gz , $C = 5MK^2$, M étant la masse de S. Le solide étant placé sur un plan horizontal parfaitement poli, étudier son mouvement et effectuer la réduction au point G des réactions exercées par le plan. On appelle ψ l'angle de Gx et d'une horizontale fixe Ox_1 ; θ l'angle de Gz et de la verticale ascendante Oz_1 . On désignera par ξ , η , a les coordonnées de G par rapport au trièdre $Ox_1y_1z_1$ fixe; a est constant. A l'instant initial,

$$\psi' = \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \theta' = \omega\alpha.$$

On discutera en faisant varier α .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une plaque homogène pesante est limitée par deux circonférences concentriques C et c, de centre O et de rayons R et r :

1° Elle oscille autour d'un point fixe de la petite circonférence, dans un plan vertical fixe. Longueur du pendule synchrone de ce pendule composé;

2° On considère un second mouvement de la plaque dans un plan vertical fixe où c roule sans glisser sur une circonférence fixe c_1 de centre O_1 , et de rayon $r_1 < r$, intérieure à c. Etudier les petites oscillations correspondant à ce roulement sans glissement.

Dans cette seconde partie, on appellera A_1 le point le plus élevé de c_1 , A le point de c qui vient coïncider avec A_1 ; on prendra comme paramètre l'angle θ de OA avec O_1A_1 .

(Grenoble, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Un disque circulaire homogène, de rayon R , et une tige OA rectiligne homogène, de longueur $4R$, de même masse M , se meuvent dans un plan vertical fixe sous l'action de la pesanteur. Le disque repose sur une horizontale fixe Ox , la tige tourne autour du point fixe O , qui est son extrémité, et elle touche le disque. Il n'y a pas de frottement.

1° Étudier le mouvement du système. On prend pour paramètres l'abscisse x du centre du disque et l'angle φ de Ox avec un rayon marqué sur le disque

$$At = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad x = a > R \quad \frac{dx}{dt} = 0;$$

2° Déterminer, à l'instant initial, la réaction au point de contact du disque et de la tige.

N. B. — On ne s'occupera pas du cas où la tige cesse d'être tangente au disque.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un point de masse m , soumis à une résistance mKv^2 , tombe verticalement. Son mouvement tend à devenir uniforme; quelle est la vitesse limite a ? Quel espace E parcourt le mobile pendant que sa vitesse passe d'une valeur v_0 à une valeur v_1 et quel est le temps T correspondant à cette variation de vitesse?

Application numérique — Un parachute et son passager pèsent ensemble 100^{kg} ; la résistance de l'air, mesurée dans le système industriel, est $0,16Sv^2$. Calculer S de manière que la vitesse limite soit de 4^{m} par seconde. Calculer alors E et T pour $v_0 = 30 \text{ m} : \text{s}$ et $v_1 = 4,4 \text{ m} : \text{s}$.

(Grenoble, novembre 1921.)

QUESTIONS.

2435 (1920, 80). Pour que l'équation

$$(a\lambda + a')x^m + (b\lambda + b')x^{m-1} + \dots = 0$$

ait toutes ses racines réelles quel que soit λ , il faut et il suffit

que, pour deux valeurs particulières de λ , l'équation ait toutes ses racines réelles, les racines qui correspondent à l'une des valeurs alternant avec celles qui correspondent à l'autre valeur quand on range ces $2m$ racines dans l'ordre des valeurs croissantes; et la même chose a alors lieu si l'on donne à λ deux valeurs quelconques. Indiquer la forme de la courbe qui représente les m racines pour les diverses valeurs de λ , avec un axe des x et un axe des λ (on pourra supposer d'abord que les deux valeurs particulières de λ sont 0 et ∞).

G. FONTENÉ.

*2436 (1920, 120). Deux points décrivent avec des vitesses uniformes deux cercles concentriques. Démontrer que la droite qui les joint reste en général normale à une épicycloïde ou à une hypocycloïde, en général allongée ou raccourcie.

Dans le cas où les deux points ont des vitesses angulaires opposées, on obtient une propriété connue de l'ellipse.

L. MALOUE.

*2442 (1920, 200). Étant donné un réseau tangentiel de coniques, les cercles principaux des coniques du réseau dont le foyer décrit une droite sont orthogonaux à un cercle fixe.

Ce théorème comprend comme cas particulier le théorème de M. T. Lemoyne relatif aux cercles podaires des points d'une droite, par rapport à un triangle (*N. A.*, 1904, 400).

R. B.

*2443 (1920, 240). Dans le plan, deux triangles inversement semblables sont orthologiques.

R. B.

2444 (1920, 240). Si deux hyperboles équilatères concentriques H, H' sont telles qu'il existe des triangles (T) inscrits à H et circonscrits à H' , le cercle circonscrit à un triangle (T) est le cercle conjugué du triangle (T') qui a pour sommets les points de contact des côtés de (T) avec H' .

C. CONVERS.



[L'17e]

SYSTÈME HARMONIQUE DE TROIS CONIQUES ;

PAR M. J. LEMAIRE,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. On donne ce nom à tout système de trois coniques dont deux quelconques sont polaires réciproques par rapport à la troisième. Admettant d'abord l'existence de tels systèmes, nous allons en établir quelques propriétés.

Soient (A), (B), (C) trois coniques formant un système harmonique : si T est le triangle conjugué commun à (A) et (B), et si nous remplaçons la figure formée par ces deux coniques et ce triangle par sa polaire réciproque par rapport à (A), nous obtenons les deux coniques (A) et (C) et le même triangle T, d'où ce théorème :

THÉORÈME I. — *Les trois coniques d'un système harmonique ont un triangle conjugué commun.*

Appelons M et N les points où (A) et (B) sont touchés par une de leurs tangentes communes ; puisque (C) est la polaire réciproque de (B) par rapport à (A), cette conique C doit passer par M ; et comme elle est aussi la polaire réciproque de (A) par rapport à (B), elle passe de même par N.

Les quatre points tels que M et les quatre points tels que N appartiennent d'autre part à la conique lieu des points d'où l'on peut mener à (A) et (B) des tangentes

formant un faisceau harmonique, laquelle coïncide par suite avec (C), de sorte qu'on a cette proposition :

THÉORÈME II. — *Chacune des coniques d'un système harmonique est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux autres des tangentes formant un faisceau harmonique.*

La conique (C) est de même tangente aux tangentes aux deux autres aux points communs à ces deux coniques. Comme ces huit droites touchent aussi la conique enveloppe des droites sur lesquelles (A) et (B) déterminent une division harmonique, laquelle coïncide par suite avec (C), on a ce théorème :

THÉORÈME III. — *Chacune des coniques d'un système harmonique est l'enveloppe des droites sur lesquelles les deux autres déterminent des points formant une division harmonique.*

Cette proposition se déduit d'ailleurs de la précédente par dualité : si, en effet, nous transformons l'ensemble des trois coniques par polaires réciproques par rapport à (C), cette conique se transforme en elle-même, et les deux autres se permutent; à un faisceau harmonique formé par les tangentes menées d'un point de (C) à (A) et (B), correspond une division harmonique déterminée par (B) et (A) sur une tangente à (C).

2. Considérons une tangente Δ à (C) qui coupe (A) en A et A', et (B) en B et B'; le pôle P de cette droite par rapport à (A) appartient à (B), et son pôle Q par rapport à (B) appartient à (A); comme $(AA'BB') = -1$, le triangle PBB' est conjugué par rapport à la

conique (A); la conique (B) est donc harmoniquement circonscrite à (A). La polaire PB' de B par rapport à (A) touche (C); de même PB; le triangle PBB' est circonscrit à la conique (C) qui est ainsi harmoniquement inscrite à (A); donc :

THÉORÈME IV. — *Dans un système harmonique de trois coniques, chacune d'elles est à la fois harmoniquement circonscrite et harmoniquement inscrite à chacune des deux autres.*

Le triangle PBB' étant à la fois inscrit à (B) et circonscrit à (C), on peut encore dire que :

THÉORÈME V. — *Si l'on considère deux quelconques des coniques d'un système harmonique, on peut inscrire ou circonscrire à chacune une infinité de triangles circonscrits ou inscrits à l'autre; chacun de ces triangles est conjugué par rapport à la troisième conique.*

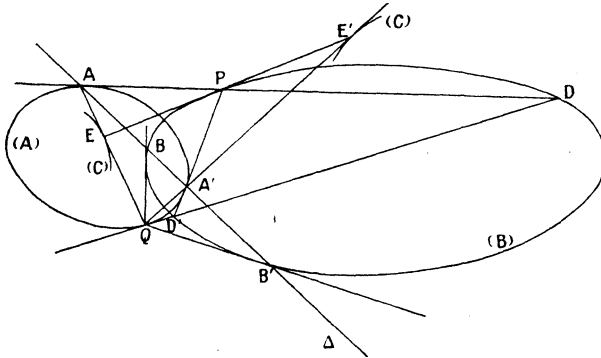
Il faut bien observer qu'il existe une infinité de triangles tels que PBB' inscrits à (B) et circonscrits à (C) et aussi une infinité de triangles inscrits à (C) et circonscrits à (B).

3. M et N désignant les points où les coniques (A) et (B) sont touchées par une tangente commune, la conique (C) passe en ces points; comme MN est tangente à (A), son pôle P par rapport à (C) est sur (B); il est de même sur (A), et est par suite commun à (A) et (B), de sorte que :

THÉORÈME VI. — *Les tangentes à deux des coniques (A) et (B) d'un système harmonique, en un point P commun à ces coniques, les coupent*

respectivement en N et M , et sont tangentes en ces points à la troisième conique (C); de plus MN est une tangente commune aux deux premières.

Fig. 1.



4. Transformons la figure faite plus haut de manière que B et B' deviennent les points cycliques du plan; employant de petites lettres pour la nouvelle figure, nous voyons que (A) devient une hyperbole équilatère (a), et (B) un cercle (b); le centre p de l'hyperbole est sur le cercle, le centre q du cercle est sur l'hyperbole.

La troisième conique (C) devient une parabole (c) tangente aux droites isotropes passant par p , qui est ainsi un foyer.

Nous avons vu que PBB' est conjugué par rapport à (A) et circonscrit à (C); de même QAA' est conjugué par rapport à (B) et circonscrit à (C).

QA étant tangente à (C), son pôle D par rapport à (A) est sur (B); de même le pôle D' de QA' par rapport à la même conique (A). Le triangle PDD' , circonscrit à (A), inscrit à (B), est conjugué par rapport à (C).

Ainsi la tangente en Q à (A) est la polaire de P par rapport à (C); de même la tangente en P à (B) est la polaire de Q par rapport à (C).

Les points E et E' où cette tangente à (B) coupe (C) sont sur QA et QA'.

Dans la figure transformée, la tangente dqd' en q à l'hyperbole (a) est la polaire de p par rapport à la parabole (c), c'est-à-dire la directrice de cette parabole; on voit donc que :

THÉORÈME VII. — *Un système harmonique de trois coniques peut être transformé par projection en un système comprenant : une hyperbole équilatère (a), un cercle (b) ayant son centre q sur (a) et passant lui-même par le centre p de l'hyperbole, une parabole (c) ayant p pour foyer et la tangente en q à l'hyperbole pour directrice.*

Comme il est possible de construire un tel système particulier, on obtient, par la transformation inverse, un système harmonique, dont l'existence se trouve ainsi établie.

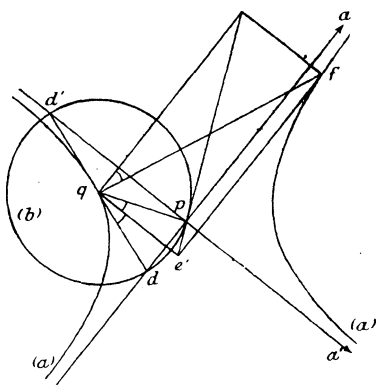
Appliquant au système particulier les théorèmes généraux obtenus plus haut pour un système harmonique quelconque, on aurait diverses propositions relatives à l'hyperbole, au cercle et à la parabole ci-dessus, pris ensemble ou associés deux à deux.

§. On aurait pu d'abord démontrer ces théorèmes pour ce système spécial, et les étendre par projection à un système harmonique quelconque.

C'est ainsi que nous allons maintenant procéder : les tangentes issues de q à la parabole (c), bissectrices des angles \widehat{dqp} et $\widehat{pqd'}$ (*fig. 2*), sont parallèles aux

asymptotes de (a) , et ont leurs points de contact e' et e sur la perpendiculaire menée à qp au foyer de la courbe, c'est-à-dire sur la tangente en p au cercle (b) [revenant à la figure générale, nous retrouvons que la polaire de Q par rapport à (C) touche (B) en P].

Fig. 2.



Construisons le rectangle $eqe'f$; les égalités d'angles marqués sur la figure montrent que qf est normale en q à l'hyperbole, et par suite un diamètre de la parabole (c) . Mais qf et le segment déterminé sur cette droite par les asymptotes de l'hyperbole ont le même milieu, de sorte que f est sur l'hyperbole.

Les droites qe , qe' et la droite à l'infini du plan forment un triangle circonscrit à (c) , inscrit à (a) et conjugué par rapport à (b) ; les droites $e'f$, ef , qf joignant les sommets de ce triangle, points de (a) , aux points où les côtés opposés touchent (c) , si nous revenons à la figure primitive, nous avons ce théorème :

THÉORÈME VIII. — *Un triangle étant inscrit à (A) et circonscrit à (C) , les droites qui joignent ses*

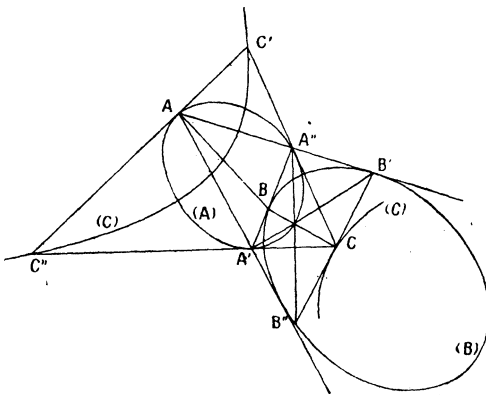
sommets aux points de contact des côtés opposés concourent en un point de (A).

Appliquant ce théorème aux couples de coniques particulières obtenues en associant de toutes les façons possibles deux des trois coniques du système (a), (b), (c), on aurait des propositions faciles à énoncer.

6. $AA'A''$ étant un triangle inscrit à (A), et circonscrit à (B) qui touche ses côtés en B, B', B'', les droites AB, A'B', A''B'' concourent en un point de (A).

Le triangle $BB'B''$ étant autopolaire par rapport à (A), le pôle C de la droite $A'A''$, qui passe en B, est un point de $B'B''$; comme $A'A''$ touche (B), son pôle C est sur (C); de plus $B'B''$, étant la polaire de A par rapport à (B), touche (C); cette conique est ainsi tangente en C à $B'B''$.

Fig. 3.



De même $B''B$ touche (C) au pôle C' de $A''A$ par rapport à (A); et BB' touche (C) au pôle C'' de AA' par rapport à cette même conique (A).

Nous voyons que $BB'B''$ et $CC'C''$ sont à (B) et (C) ce que sont $AA'A''$ et $BB'B''$ à (A) et (B), de sorte que les droites BC , $B'C'$, $B''C''$ concourent en un point de (B).

De même CA , $C'A'$, $C''A''$ concourent en un point de (C).

On a donc ce théorème :

THÉORÈME IX. — *Trois coniques (A), (B), (C) formant un système harmonique, si $AA'A''$ est un triangle inscrit à (A) et dont les côtés touchent (B) en B, B', B'' , les côtés du triangle $BB'B''$ touchent (C) en C, C', C'' , et les côtés du triangle $CC'C''$ touchent (A) en A, A', A'' . Les groupes de trois droites $AB, A'B', A''B'' - BC, B'C', B''C'' - CA, C'A', C''A''$, concourent en trois points situés respectivement sur (A), (B), (C).*

7. Soient deux coniques (A) et (B) déterminant sur une sécante Δ deux couples de points A et A', B et B', qui forment une division harmonique, et telles que le pôle P de cette droite par rapport à (A) soit sur (B), et le pôle Q par rapport à (B) sur (A), ce qui est évidemment possible; projetant la figure de manière que B et B' deviennent les points cycliques, on obtient une hyperbole équilatère (a) et un cercle (b), le centre de chacune de ces courbes étant sur l'autre; ces coniques appartiennent donc à un système harmonique; il en est de même des coniques primitives, d'où ce théorème :

THÉORÈME X. — *Pour que deux coniques (A) et (B) fassent partie d'un système harmonique, il suffit qu'il existe une droite sur laquelle elles déterminent deux segments se divisant harmoniquement, et telle*

que son pôle par rapport à chacune des coniques soit sur l'autre.

8. *Systèmes harmoniques particuliers.* — Outre le système hyperbole-cercle-parabole considéré plus haut, en voici d'autres :

Reprenons d'abord la figure du n° 3, et projetons-la de manière que les coniques (A) et (B) deviennent deux cercles (a) et (b), deux points communs autres que P devenant les points cycliques : le triangle pmn , transformé de PMN , est équilatéral, les deux cercles sont égaux et se coupent suivant un angle de 60° ; la troisième conique (c) du système harmonique passe aux points de contact, tels que m et n , des tangentes communes aux cercles, et touche en ces points les tangentes telles que pm et pn : c'est une hyperbole; et comme elle est la polaire réciproque de chacun des cercles par rapport à l'autre, elle a pour foyers les centres des cercles; cela résulte d'ailleurs de ce que chaque conique touche les tangentes menées aux autres en leurs points communs. Observons encore que l'hyperbole (c) coupe chaque cercle suivant un angle de 60° .

Le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la ligne des centres des cercles ayant même polaire par rapport aux trois coniques (a), (b), (c), on peut dire que tout point ayant même polaire par rapport à deux coniques d'un système harmonique a même polaire par rapport à la troisième; on retrouve que les trois coniques d'un tel système ont un triangle conjugué commun.

Ainsi la hessienne de trois [pareilles coniques se réduit à trois droites, les côtés du triangle conjugué commun; la cayleyenne se réduit aux trois sommets

de ce triangle. Les 18 cordes communes à ces trois coniques, prises deux à deux, passent six à six par les points constituant la cayleyenne; leurs 18 ombilics sont six à six sur les droites constituant la hessienne.

Nous avons vu que si deux coniques font partie d'un système harmonique, à chacune on peut inscrire un triangle circonscrit à l'autre.

Si deux coniques vérifient cette condition, on peut les projeter suivant deux cercles la vérifiant aussi, donc nécessairement égaux (en vertu, par exemple, de la relation d'Euler); la tangente à chacun en un de leurs points communs passe en un point où l'autre est touché par une tangente commune, et il en résulte que l'angle des cercles vaut 60° ; ils font donc partie d'un système harmonique, et si l'on revient à la figure primitive on obtient la réciproque de la première partie du théorème V : *si deux coniques sont telles qu'il existe pour chacune un triangle inscrit qui est en même temps circonscrit à l'autre, les deux coniques font partie d'un système harmonique.*

9. En projetant le système particulier du n° 4 sur un plan parallèle à une asymptote de l'hyperbole équilatère (a), on obtient un système harmonique formé par une ellipse, une hyperbole d'Apollonius ayant son centre sur l'ellipse, et la parabole de Chasles correspondante.

On voit donc qu'une ellipse et une hyperbole d'Apollonius ayant son centre sur elle peuvent être transformées homographiquement en deux cercles égaux se coupant sous un angle de 60° .

10. Transformons homographiquement les coniques d'un système harmonique de manière que deux de

sommets de leur triangle conjugué commun deviennent les points cycliques, nous obtenons trois hyperboles équilatères concentriques. Mais ce système d'hyperboles peut être projeté suivant un système harmonique contenant deux cercles égaux; les deux hyperboles transformées suivant ces cercles sont alors égales, et comme elles peuvent être choisies arbitrairement, elles sont égales toutes les trois.

Dans le système du n° 8, appelons l et l' les points limites et k, k' les traces, sur la ligne des centres des deux cercles (a) et (b), des tangentes en un de leurs points communs p ; un calcul simple donne

$$(kk'll') = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{2i\frac{\pi}{3}};$$

comme, pour obtenir un système d'hyperboles, on peut projeter la figure de telle sorte que l et l' deviennent les points cycliques, il résulte de la conservation du rapport anharmonique, et du théorème de Laguerre, que l'angle des cercles se conserve en projection; un calcul analogue montre que la propriété est vraie aussi pour chacun des cercles et l'hyperbole qui est la troisième conique du système harmonique, calcul d'ailleurs superflu, puisque deux quelconques des hyperboles équilatères peuvent être considérées comme correspondant aux deux cercles.

Ainsi, ces trois hyperboles équilatères égales se coupent mutuellement suivant des angles de 60° ; on en conclut aisément que leurs axes transverses font entre eux des angles de 60° , de sorte que les trois courbes sont disposées régulièrement autour de leur centre commun.

Elles se coupent deux à deux en six points réels qui forment un hexagone régulier; le diamètre de chacun

de ces points, faisant avec les axes des hyperboles auxquelles appartient ce point des angles de 30° , est égal à la distance focale des hyperboles, de sorte que le cercle qui contient ces six points passe aussi aux foyers réels des hyperboles. En vertu du principe de continuité, les six autres points communs et les six autres foyers appartiennent à un même cercle imaginaire concentrique, comme le précédent, aux hyperboles. Revenant au système harmonique général, on a ce théorème :

THÉORÈME XI. — *Si O est un sommet du triangle conjugué (T) commun aux trois coniques d'un système harmonique, six sécantes communes à ces courbes associées deux à deux passent en O; les douze points communs peuvent être partagés en deux groupes de six, tels que les points de chaque groupe appartiennent à une conique passant aux deux autres sommets I et J de (T) et tangente en ces points à OI et OJ, et contenant aussi six des douze points de rencontre des tangentes menées de I et J aux coniques du système.*

Sans nous arrêter au théorème corrélatif, signalons encore le suivant :

THÉORÈME XII. — *A chaque sommet O de (T) correspond une conique bitangente aux trois coniques d'un système harmonique, et tangente à OI et OJ aux autres sommets du triangle conjugué commun; les cordes de contact de cette conique avec chacune des premières passent au point O.*

11. Reprenons, pour terminer, le système hyperbole-cercle-parabole considéré au début : nous savons que

si, l'hyperbole équilatère (a) restant fixe, le centre q du cercle (b) se déplace sur cette hyperbole, le cercle enveloppe une lemniscate de Bernoulli tangente aux asymptotes de (a) en son centre q ; revenant à un système harmonique quelconque, nous avons ce théorème :

THÉORÈME XIII. — *Étant donnée une conique fixe (A), une conique (B) faisant partie avec elle d'un même système harmonique, et restant circonscrite à un triangle fixe conjugué à (A), a pour enveloppe une courbe de quatrième ordre et de sixième classe, qui admet les sommets du triangle pour points doubles à tangentes inflexionnelles, les tangentes d'inflexion étant les tangentes menées de ces sommets à la conique (A); la troisième conique du système harmonique enveloppe la polaire réciproque de la première enveloppe par rapport à (A).*

Par exemple, si (A) est une ellipse, et (B) une hyperbole d'Apollonius dont le centre décrit l'ellipse, cette hyperbole a pour enveloppe une courbe (β) de quatrième ordre et de sixième classe; la parabole de Charles (C), qui forme avec l'ellipse fixe et l'hyperbole variable un système harmonique, enveloppe la courbe (γ) polaire réciproque de (β) par rapport à l'ellipse.

Il est aisé de déterminer la nature de ces courbes : considérons le cercle (A') décrit sur l'axe focal de l'ellipse comme diamètre, et qui se projette suivant l'ellipse, et dans le plan de ce cercle l'hyperbole équilatère (B') et la parabole (C') dont les projections sont (B) et (C); et cherchons d'abord l'enveloppe de (C'): cette parabole a son foyer F mobile sur le cercle, et touche deux diamètres rectangulaires fixes $X'OX$

et $Y'OY$; P et Q étant les projections de F sur ces deux tangentes, PQ est la tangente au sommet de la parabole, lequel est la projection S de F sur cette droite. Comme le segment PQ est égal au rayon du cercle, cette tangente à la parabole enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements dont les points de rebroussement sont les extrémités des diamètres appartenant aux tangentes fixes de la parabole; la parabole a la même enveloppe, qu'elle touche en son sommet S .

Soit T le point qui a pour projections, sur $X'X$ et $Y'Y$, les traces U et V sur ces axes de la tangente en F au cercle; les points P et Q ayant TU et TV pour polaires par rapport au cercle, le point T est le pôle de PQ , appartient par suite à l'hyperbole équilatère (B'). Comme PQ est la tangente à l'enveloppe de (C') au point S où la parabole touche cette enveloppe, T est le point où l'hyperbole, polaire réciproque de la parabole par rapport au cercle, touche son enveloppe, et la tangente en T est la polaire de S par rapport au cercle, elle est perpendiculaire à OS .

L'enveloppe de l'hyperbole est, comme on voit, la *kreuzcurve* dérivée du cercle et ayant ses points à l'infini sur $X'X$ et $Y'Y$; et nous avons incidemment une construction de la tangente à cette courbe.

Revenant à la figure primitive, nous obtenons pour l'enveloppe (β) de l'hyperbole d'Apollonius (B) la *kreuzcurve* dérivée de l'ellipse, et pour l'enveloppe (γ) de la parabole de Chasles (C) une développée d'ellipse dont les rebroussements sont les sommets de l'ellipse (A).

Remarque. — On peut observer que dans les divers systèmes harmoniques particuliers que nous avons considérés, deux quelconques des coniques se coupent

en deux points réels et deux points imaginaires; il en est de même pour tout système harmonique. Le triangle conjugué commun a un seul sommet réel; et des sécantes communes, seules, sont réelles: celles qui concourent en ce sommet, trois d'entre elles joignant deux à deux les points réels communs aux coniques du système, et les trois autres joignant les points imaginaires conjugués.

On pourra lire, dans les Exercices de Géométrie de J. Köhler (*Géométrie plane*, p. 227), un intéressant exposé analytique des principales propriétés des systèmes harmoniques, obtenues comme application des coordonnées trilinéaires.

[R6]

**INTRODUCTION A L'ÉTUDE DE LA MÉCANIQUE
ET DE SES PRINCIPES;**

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

(Suite.)

15. Ces données sont extrêmement complexes: un système qui se meut à proximité de la surface de notre planète n'est jamais dans un état d'indépendance complète vis-à-vis des systèmes voisins. S'il s'agit d'une bille placée sur un plan incliné, son mouvement sera influencé par la rugosité du plan et même par la résistance de l'air. L'influence de cette dernière se manifestera, plus considérable encore, si l'on étudie le mouvement d'un projectile, etc.

C'est dire qu'il a fallu déployer beaucoup de sagacité pour interpréter avec justesse les résultats des observa-

tions courantes faites sur les mouvements de toute espèce. Ce n'est qu'après une longue élaboration qu'on est parvenu à en induire les principes, capables de régir tous les mouvements connus, sur la Terre comme dans le Ciel.

A côté des difficultés accumulées par le grand nombre des corps et des actions en présence, il y en avait une autre qui, par bonheur, a sans doute échappé aux fondateurs de la Mécanique : elle provient du mouvement compliqué de la Terre par rapport au trièdre O, x, y, z , de la Mécanique céleste. Ce mouvement, en première approximation, s'obtient en composant :

1° Celui d'entraînement de notre planète autour du Soleil ;

2° Sa rotation autour de la ligne des pôles (en réalité, comme nous le verrons, cette dernière n'a pas une direction rigoureusement fixe par rapport aux étoiles fixes).

Mais alors, en admettant *a priori* qu'il existe des principes communs à tous les mouvements terrestres ou célestes, n'est-il pas à craindre qu'ils ne soient tout à fait masqués dans la Mécanique terrestre, du fait de la présence, dans les équations, des forces correctives provenant de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire des mouvements précédents ?

La difficulté se serait effectivement produite si la rotation de la Terre autour de la ligne des pôles avait été beaucoup plus rapide qu'elle ne l'est réellement.

Pour la grande majorité des phénomènes terrestres, la durée est courte : pendant ce temps, le mouvement d'entraînement de notre planète autour du Soleil peut passer, à un haut degré d'approximation, pour rectiligne et uniforme. Ce mouvement est un mouvement

de translation. Sans troubler les accélérations, on pourra donc passer du trièdre O, x, y, z , de la Mécanique céleste à un trièdre parallèle $O'x'y'z'$ ayant son sommet au centre de la Terre. En outre, la vitesse angulaire de rotation de la Terre est très petite, soit la moitié de celle de la petite aiguille d'une horloge. Pendant la durée du jet d'un projectile, par exemple, le trièdre ayant son origine près du point de chute et ses axes liés à l'écorce terrestre n'a pas le temps de modifier sensiblement sa direction, et son origine décrit, d'un mouvement uniforme, un arc de parallèle qu'on peut confondre sensiblement avec une droite. En première approximation, ce trièdre subit encore, pendant la durée utile, une translation rectiligne et uniforme, ce qui dispense de modifier l'accélération.

C'est grâce à ces circonstances favorables que Galilée a pu, en étudiant la chute des corps, ou des phénomènes connexes (plan incliné, pendule), parvenir avant Newton, d'une manière plus ou moins explicite, aux principes que nous avons précédemment énoncés.

Par contre, dans les phénomènes d'une durée appréciable, l'influence du mouvement de la Terre doit intervenir : elle doit se manifester en particulier dans l'étude prolongée des oscillations d'un pendule, si toutefois il existe vraiment des principes régissant à la fois les mouvements terrestres comme ceux des astres. Foucault a constaté qu'il en est bien ainsi.

16. Mais avant d'aborder les problèmes où il faut tenir compte de la mobilité de notre planète, attachons-nous à étudier les indications données par la chute des corps. D'après l'expérience du tube de Newton, dans le vide, tous les corps tombent également vite : ce dispositif permet d'éliminer la résistance de l'air et les

différences profondes qu'elle établissait entre le mouvement de chute d'une balle de plomb et d'une parcelle de duvet.

Déterminons, à l'aide d'un procédé cinématographique, l'accélération d'un de ces mouvements de chute. Nous trouvons une valeur g , qui non seulement est indépendante de la nature du corps, mais encore est sensiblement constante aux divers points de la surface du globe. Ici encore, nous avons donc obtenu, en faisant intervenir l'accélération, un caractère cinématique commun à tous les mouvements de chute libre. Ce que nous pourrions considérer comme la *cause* du mouvement sera donc intimement lié à l'accélération.

Un des plus beaux titres de gloire de Newton est assurément d'avoir pensé que cette accélération g , précédemment mesurée, se confond avec celle des actions de gravitation, autrement dit que la pesanteur est un cas particulier de l'attraction universelle. Considérons un corps, voisin de l'écorce terrestre : ne va-t-il pas être soumis, comme les astres, à une action de la Terre, et aussi à des actions des autres corps célestes ? Toutefois, dans les conditions où nous nous plaçons, ces dernières seront négligeables. On pourra, en première approximation, tenir compte uniquement de l'action prépondérante de la Terre. Pour vérifier cette hypothèse, il suffit de comparer g à l'accélération lunaire γ : la supposition de Newton sera légitime si l'on vérifie que l'on a

$$\frac{g}{R^2} = \frac{\gamma}{\rho^2},$$

en désignant par R le rayon terrestre, par ρ le rayon moyen de l'orbite lunaire. La vérification est satisfaisante et s'opère au degré d'approximation qu'on peut attendre de ce calcul grossier.

17. Dans le raisonnement qui précède, nous avons implicitement admis que la Terre agit sur les corps placés à sa surface comme le ferait un point unique, placé en son centre. Quelques explications sont ici nécessaires. Lorsque nous avons fait une étude d'ensemble sur le système solaire, nous avons considéré les astres comme des points matériels : étudiant maintenant les mouvements terrestres, nous n'avons plus le droit de faire cette approximation. Tout au plus pourrions-nous réduire les corps terrestres à des points, vis-à-vis de notre planète elle-même, et tant que nous n'essaierons pas de comparer les mouvements de ces corps entre eux.

Ici encore, une circonstance favorable se présente pour éluder la difficulté précédente. Imaginons qu'on ait décomposé la totalité du volume terrestre en un très grand nombre de volumes très petits, et concevons que chacun de ces volumes agisse *isolément* sur un corps voisin du sol de manière à lui communiquer une accélération de la forme $\frac{\mu}{r^2}$, μ étant un coefficient spécifique du volume considéré. Cet isolement est d'ailleurs une supposition purement théorique, et qu'aucun fait expérimental ne peut étayer. Déterminons nos volumes partiels, à l'aide de sphères concentriques à la Terre, supposée elle-même sphérique, et supposons que les courbes déterminées par ces sphères soient homogènes, c'est-à-dire que deux volumes élémentaires égaux d'une même courbe impriment isolément, à un corps équidistant, voisin du sol, des accélérations égales. Ces volumes étant de plus en plus petits et de plus en plus nombreux, composons alors les accélérations qu'ils impriment à ce corps (réduit à un point) : il est classique que l'accélération résultante passe par

le centre de la Terre et pour expression (1)

$$\frac{M}{R^2},$$

où M désigne la somme des coefficients μ relatifs aux divers éléments de volume. Ce fait justifie notre raisonnement du n° 12. Il est intéressant de noter ici que, si on laisse arbitraire la loi de variation de densité des couches sphériques, la loi d'attraction en raison inverse du carré de la distance et celle d'attraction propor-

(1) Soit $d\nu$ l'un des éléments de volume en question. On pose $\mu = \lambda d\nu$, λ étant seulement fonction de la distance au centre, soit a . Pour une couche d'épaisseur da , l'accélération d'un point P situé à une distance R du centre est l'intégrale

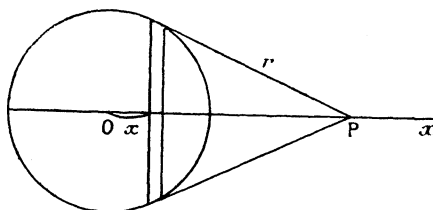
$$\lambda da \int_{-c}^{+R} \frac{\pi a dx}{r^2} \frac{R-x}{r}$$

(décomposez la surface en zones de hauteur dx).

On a d'ailleurs

$$r^2 = R^2 - 2Rx + a^2 \quad \text{et} \quad r dr = -R dx;$$

Fig. 1.



on peut prendre r comme nouvelle variable. Si P est extérieur à la courbe, les limites de l'intégrale deviennent $R - a$ et $R + a$. On obtient

$$\pi a \frac{\lambda da}{R^2} \int_{R-a}^{R+a} \left(1 + \frac{R^2 - a^2}{r^2}\right) dr = \lambda \frac{4\pi a^2 da}{R^2}.$$

Or $4\pi a^2 da$ est justement le volume de la couche, le coefficient de proportionnalité λ est donc le même pour la couche comme pour un de ses éléments. Le théorème annoncé en résulte aisément.

tionnelle à la distance sont les seules pour lesquelles l'action d'une sphère sur un point extérieur équivaut à une action de son centre, suivant une de ces lois (1).

18. Voici donc la pesanteur mise au rang des forces de gravitation, et de ce fait, nous pourrions désormais lui appliquer les principes qui nous ont fourni la synthèse des mouvements du système solaire. Par des mesures précises, opérées à l'aide du pendule, on vérifie bien que g diminue quand on s'éloigne du centre du globe. On constate également des variations avec la latitude, explicables par le mouvement de la

(1) L'équation fonctionnelle qui détermine une fonction $\varphi(r)$ telle que chaque couche sphérique homogène puisse être remplacée par son centre n'est autre que

$$\int_{R-a}^{R+a} \frac{r^2 + R^2 - a^2}{2R^2} \varphi(r) dr = 2a\varphi(R).$$

Nous cherchons à déterminer la fonction $\varphi(r)$ de manière que cette équation soit satisfaite quel que soit R , et quel que soit a . Pour résoudre cette équation, on peut poser

$$R - a = u, \quad R + a = v, \quad r^2 \varphi(r) = \psi(r);$$

elle devient

$$\int_u^v \left(1 - \frac{uv}{r^2}\right) \psi(r) dr = 2(v - u)\psi\left(\frac{u + v}{2}\right).$$

En dérivant par rapport à u et v , on peut éliminer entre les deux équations obtenues le terme contenant une intégrale, et il reste, en revenant aux anciennes notations,

$$\frac{\psi(R - a) - \psi(R + a) - 2\psi(R)}{a^2} = 2 \frac{\psi'(R)}{R}.$$

Faisons tendre a vers zéro. Il nous reste

$$\psi''(R) = 2 \frac{\psi'(R)}{R},$$

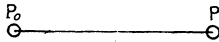
d'où l'on déduit aisément le résultat annoncé.

Terre et par sa forme ellipsoïdale. Mais, même dans un champ d'expériences relativement étendu, ces variations sont imperceptibles.

Pour cette raison, dès qu'on cesse d'assimiler à un point un corps voisin de la Terre, on peut, s'il est de dimensions ordinaires, considérer comme constante en grandeur, direction et sens, *l'accélération prise par un volume partiel de ce corps, jugé réductible à un point*, en supposant qu'à partir de sa position actuelle, ce volume partiel soit subitement isolé du reste du corps, et de l'ensemble des corps avoisinants (atmosphère, support, etc.), pour n'être plus soumis qu'à l'influence de la Terre.

Ici, nous rencontrons une nouvelle difficulté : nos observations ne porteront jamais sur le mouvement d'un point proprement dit, mais sur celui d'une parcelle de matière. Considérons cette parcelle à l'ins-

Fig. 2.



tant t_0 et à l'instant t : c'est seulement par une idéalisation que nous pouvons passer du mouvement de la parcelle au mouvement d'un point, il n'y a pas à vrai dire de vecteur déplacement bien défini pour la parcelle, ce vecteur est simplement astreint à demeurer dans un champ limitatif, correspondant à l'ensemble des valeurs joignant un point intérieur à P_0 (position à l'instant t_0) à un point intérieur à P (position à l'instant t). Le mathématicien admet que, lorsque l'on diminue indéfiniment toutes les dimensions de cette parcelle, tous ces vecteurs possèdent une même limite, et pour appliquer au problème les méthodes de l'analyse, il supposera de plus que le vecteur limite ainsi

obtenu est deux fois dérivable par rapport au temps. Cette méthode sera justifiée *a posteriori* si elle cadre avec les résultats de l'observation : cette dernière ne donne jamais, à proprement parler, ce qu'on est en droit d'appeler un vecteur déplacement, elle définit ce vecteur avec une certaine approximation, mais avec *un voisinage d'ordre zéro* ⁽¹⁾. On postule ici qu'on est en droit de raisonner comme si le voisinage était d'ordre 2 au moins.

19. Un véritable postulat est donc mis en jeu lors de l'idéalisation précédente, lorsqu'on définit par passage à la limite le vecteur déplacement, et qu'on admet l'existence, pour ce vecteur, de dérivées géométriques premières et secondes. Ce postulat est un élément indispensable, pour construire la dynamique des milieux continus. Il élimine la possibilité d'une grande agitation mutuelle de parcelles très petites à l'intérieur d'un volume matériel de faibles dimensions. L'expérience ne nous permettant pas toujours de décider si, oui ou non, cette agitation existe ⁽²⁾, nous étudions au point de vue spéculatif le cas le plus simple, celui où elle n'existerait pas, en pensant que, même si elle

⁽¹⁾ On dit que deux vecteurs sont voisins lorsque leurs composantes sont des fonctions voisines. L'ordre du voisinage de deux vecteurs est l'ordre du voisinage des fonctions qui expriment chaque composante. Deux fonctions peuvent être voisines d'ordre zéro, c'est-à-dire avoir des courbes représentatives très rapprochées, mais dont les tangentes fassent entre elles des angles appréciables. Si ces angles deviennent aussi très petits, on dit qu'il y a *voisinage d'ordre 1*. Dans ce cas, il y a proximité non seulement entre les fonctions, mais aussi entre leurs dérivées premières. Si cette condition est également réalisée pour les dérivées secondes, on dit qu'il y a *voisinage d'ordre 2*, et ainsi de suite.

⁽²⁾ Il y a cependant des cas où cette agitation est reconnue; exemple : *le mouvement brownien*.

existait réellement pour des subdivisions très avancées de la matière, les résultats obtenus conformément au postulat précédent s'appliqueraient à des phénomènes macroscopiques, c'est-à-dire observés moins en détail, la subdivision étant poussée moins loin.

20. Revenons à l'étude de la chute des corps. Si le corps nous paraît de dimensions si petites que sa forme géométrique nous échappe, nous l'assimilons à un point, et nous obtenons une synthèse satisfaisante de tous les mouvements possibles observés en lui imprimant certaines vitesses initiales au moyen de l'équation

$$m \vec{\gamma} = \vec{F}.$$

Ici, nous disposons de la vitesse initiale du mobile; c'est une circonstance nouvelle et un élément de vérification qui nous manquait en Mécanique céleste. Nous pouvons opérer également soit dans le vide, soit dans l'air. Dans ce cas, nous pourrions faire la synthèse du mouvement en admettant que \vec{F} est la résultante de l'action de la pesanteur et d'une certaine résistance, due à l'air environnant qui subit un entraînement, et fonction de la vitesse.

Si le corps est de dimensions appréciables, et *s'il se meut dans le vide*, en se trouvant uniquement soumis à l'action de la pesanteur, nous pourrions lui appliquer le théorème du mouvement du centre de gravité ('). Le raisonnement affectera ici deux formes bien distinctes, suivant qu'on admet la structure atomique de la matière dont il est formé, ou suivant qu'on

(') Nous pouvons maintenant dire, sans inconvénient : « centre de gravité ».

regarde cette matière comme un milieu continu. Dans le premier cas, le problème à traiter relève de la dynamique des systèmes de points matériels : tous les atomes sont soumis à des forces extérieures $\vec{\Phi}$, imprimant à chacun d'eux une accélération g , dirigée suivant la verticale du lieu, et vers le bas, et à des forces intérieures régies par le principe d'égalité de l'action et de la réaction. D'après ces hypothèses, le centre de gravité sera animé, dans le cas le plus général, d'un mouvement parabolique.

Si l'on adopte le second point de vue, celui de la continuité, il faut modifier l'appareil analytique et substituer aux sommes finies des intégrales, aux points matériels des éléments matériels (1). Mais le résultat final est le même que dans le cas précédent.

21. Dans le premier cas, la masse mise en jeu dans les équations du mouvement du centre de gravité sera la somme des masses qui interviennent dans le système des équations qui définissent le mouvement de chaque atome. Dans le second cas, ce système sera remplacé par des équations aux dérivées partielles, dans lesquelles interviendra la densité de volume $\rho(x, y, z)$ s'il s'agit d'un milieu continu à trois dimensions (2). Par un calcul qu'on peut regarder comme limite de celui qui a été opéré dans le cas précédent, on pourra déduire

(1) M. Painlevé utilise dans son enseignement la notion d'élément matériel; il la définit ainsi : une parcelle de matière dont les dimensions sont et restent assez petites pour que les positions, les vitesses et les accélérations de deux points quelconques de l'élément puissent être sensiblement confondues. Nous avons dégagé plus haut, à l'aide de la notion de voisinage, les hypothèses impliquées par une telle définition.

(2) Il faudrait introduire la densité superficielle s'il s'agissait d'une surface flexible, la densité linéaire pour un fil.

encore de cette équation le mouvement du centre de gravité, et la masse mise en jeu sera l'intégrale triple de $\rho(x, y, z)$ étendue au volume matériel considéré.

Il suit de là que l'élément *masse* est un élément additif. A un certain point de vue, la masse est spécifique de la quantité de matière, en ce sens que si deux parcelles s'agrègent, la masse totale est la somme des deux masses primitives. Nous complétons cette idée de la masse en y ajoutant cet énoncé, que nous considérons comme justifié par l'expérience :

La masse est invariante dans toutes les compressions, dilatations et autres transformations subies par le corps, dans lesquelles il n'y a ni gain, ni perte de matière. La loi de Lavoisier étant admise, ces transformations peuvent être non seulement de nature physique, mais encore de nature chimique.

22. Il existe des systèmes matériels dont les éléments semblent rester à distance constante les uns des autres : ce sont les solides. Ce sont eux qui se prêtent le mieux à la vérification du théorème du mouvement du centre de gravité. Appliquons aussi à un solide, se mouvant dans le vide, et soumis à la seule action de son poids, le théorème du n° 11. Ici, les forces extérieures ont une résultante appliquée au centre de gravité. Donc le moment cinétique dans le mouvement autour de ce point demeure constant. Supposons en particulier que ce solide soit de révolution (géométriquement et matériellement) autour d'un axe, et que son mouvement initial autour du centre de gravité consiste en une rotation autour de cet axe : le moment cinétique initial est alors dirigé suivant cet axe et il en sera de même pendant toute la chute. Ce mouvement relatif sera donc une rotation d'axe fixe. Il en sera toujours

ainsi, en particulier si le corps est une sphère formée de couches concentriques homogènes.

(A suivre.)

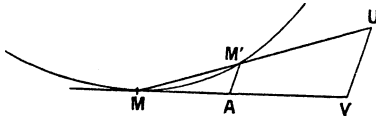
[R1d]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE L'ACCÉLÉRATION
DANS LE MOUVEMENT RELATIF ;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

1. Soient (*fig. 1*) M et M' les positions d'un point

Fig. 1.



matériel aux époques t et $t + \Delta t$. Portons sur la tangente en M à la trajectoire de ce mobile le vecteur

$$\overline{MA} = \bar{v} \Delta t,$$

\bar{v} désignant le vecteur vitesse au temps t . On sait que le vecteur $\overline{AM'}$ est la *dévi*ation et que le vecteur accélération $\bar{\gamma}$, à l'époque t , vérifie l'équation

$$\bar{\gamma} = \lim \frac{2 \cdot \overline{AM'}}{\Delta t^2}.$$

Il en résulte immédiatement que, si $\overline{MV} = \bar{v}$ et $\overline{MU} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \bar{u}$, \bar{u} désignant le vecteur vitesse moyenne,

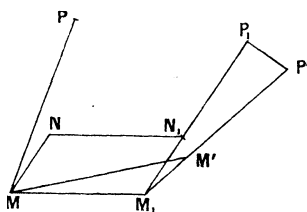
pour l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, on a aussi

$$\bar{\gamma} = \lim_2 \frac{\overline{VU}}{\Delta t} = \lim_2 \frac{\bar{u} - \bar{v}}{\Delta t}$$

quand Δt tend vers zéro.

2. Cela étant, supposons qu'un mobile se déplace sur une courbe C (*fig. 2*), qu'il y soit au point M à

Fig. 2.



l'époque t et au point N à l'époque $t + \Delta t$; en même temps, cette courbe se déplace sans se déformer, de telle façon que le point de cette courbe qui coïncidait avec M à l'époque t occupe la position M_1 à l'époque $t + \Delta t$, la courbe C se confondant alors avec une courbe égale C' , passant par M_1 , et enfin le point N de la courbe C occupe sur C' , à l'époque $t + \Delta t$, la position du point M' . En définitive, le point M aura subi le déplacement $\overline{MM'}$. Pour obtenir ce déplacement, on peut, en premier lieu, soumettre la courbe C à la translation $\overline{MM_1}$ qui l'amène à une position C_1 ; en second lieu, faire subir à C_1 une rotation autour d'un axe passant par M_1 , qui amènera C_1 en C' . Les deux déplacements successifs feront passer N en N_1 , puis en M' .

Soit \bar{v} le vecteur *vitesse absolue* de M sur sa trajectoire MM' ; soit \bar{v}_r le vecteur *vitesse relative* de M sur

la courbe C, et enfin soit \bar{v}_e le vecteur *vitesse d'entraînement* du point de C, coïncidant successivement avec M et M₁; on sait que

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

L'égalité vectorielle

$$\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'},$$

en posant

$$\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \bar{u}, \quad \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \bar{u}_e, \quad \frac{\overline{M_1M'}}{\Delta t} = \bar{\omega},$$

peut s'écrire

$$(1) \quad \bar{u} = \bar{u}_e + \bar{\omega}.$$

Si, en outre, on pose

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta t} = \frac{\overline{M_1N_1}}{\Delta t} = \bar{u}_r,$$

on a encore

$$(2) \quad \bar{u} = \bar{u}_e + \bar{u}_r + (\bar{\omega} - \bar{u}_r).$$

Les quantités \bar{u} , \bar{u}_e , \bar{u}_r , $\bar{\omega}$ sont des vitesses moyennes. En retranchant membre à membre les équipollences (1) et (2), on a

$$(3) \quad \bar{u} - \bar{v} = \bar{u}_e - \bar{v}_e + \bar{u}_r - \bar{v}_r + (\bar{\omega} - \bar{u}_r).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{2}{\Delta t}$ et si l'on fait tendre Δt vers zéro, en vertu de la remarque faite au début, on obtient

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_r + 2 \lim \frac{\omega - u_r}{\Delta t},$$

$\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}_e$, $\bar{\gamma}_r$ désignant les vecteurs accélération absolue, accélération d'entraînement, accélération relative; il nous reste à calculer le dernier terme. Si l'on pose

$\overline{M_1 P_1} = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\Delta t} = \overline{u_r}$, $\overline{M_1 P'} = \frac{\overline{M_1 M'}}{\Delta t} = \overline{\omega}$, on voit que

$$\frac{\overline{\omega} - \overline{u_r}}{\Delta t} = \frac{\overline{P_1 P''}}{\Delta t}.$$

Donc si $\overline{MP} = \overline{v}$, la limite de $\frac{\overline{P_1 P'}}{\Delta t}$ n'est pas autre chose que la vitesse de P autour de l'axe instantané de rotation mené par M. On sait que cette vitesse est équipollente au moment-vecteur de la rotation ω par rapport au point P, soit (ω, P) , ayant pour valeur numérique $\omega v_r \sin(\omega, v_r)$. On a, par suite,

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_r} + 2 \overline{\omega v_r \sin(\omega, v_r)}.$$

Le dernier terme, qui se nomme souvent γ_c pour rappeler le nom de Coriolis qui l'a calculé le premier, est un vecteur perpendiculaire au plan contenant la vitesse v_r et la rotation ω et dirigé dans le sens dans lequel l'extrémité du vecteur $\overline{v_r}$ est entraînée par la rotation instantanée.

[M²1e]

REMARQUES SUR LES JACOBIENS ;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. J'ai eu occasion de faire quelques remarques que je vais signaler parce qu'elles peuvent, je crois, suggérer quelques recherches intéressantes. On appelle *Jacobien* d'un système de quatre quadriques, le lieu des points dont les plans polaires par rapport à ces quadriques se coupent en un point. C'est, en général,

une surface du quatrième ordre. On appelle *Jacobienne* d'un système de trois quadriques le lieu des points dont les plans polaires par rapport à ces quadriques se coupent suivant une droite. C'est, en général, une courbe du sixième ordre, intersection de deux surfaces du troisième ordre qui se coupent, en outre, suivant une cubique gauche.

Les propriétés fondamentales des *Jacobiens* et des *Jacobiennes* étant données dans les ouvrages classiques de Salmon, je n'insiste pas davantage.

2. Lorsque, dans un système de quatre quadriques, il y a un plan double, le Jacobien se décompose en ce plan et une surface du troisième ordre, chaque point de la surface ayant son conjugué sur le plan, de sorte que l'on obtient une représentation de la surface sur le plan. J'ai étudié le cas où les trois quadriques proprement dites ont une cubique gauche commune (*Bull. Soc. math.*, t. 18, 1899). On peut voir que si l'on a trois quadriques ayant un tétraèdre autopolaire commun la surface du troisième ordre correspondant à un plan double est la réciproque de la surface de Steiner; et la représentation sur le plan est celle que Laguerre a donnée de la surface en question (*Bull. Soc. math.*, t. 1, 1873); les points fondamentaux étaient les traces, sur le plan, des arêtes du tétraèdre autopolaire.

Si l'une des quadriques passe par un quadrilatère gauche formé par des arêtes du tétraèdre autopolaire commun à deux autres quadriques, au plan double contenant deux des côtés de ce quadrilatère correspond une surface du troisième degré qui serait la transformée homographique d'un conoïde de Plucker.

Il doit y avoir d'autres cas analogues intéressants.

3. Si l'on considère un système de quatre quadriques passant par six points, le Jacobien est, en général, une surface du quatrième ordre ayant pour asymptotique la cubique des six points et divisant harmoniquement toutes les cordes de cette cubique. Si les six points se confondaient deux à deux, on obtiendrait la décomposition que j'ai signalée au début du paragraphe précédent.

Si les six points sont, trois par trois, sur deux droites le Jacobien n'est plus une surface, mais l'espace tout entier.

Si l'on considère trois quadriques ayant deux génératrices communes, de même système, le lieu des points pour lesquels les plans polaires se coupent suivant une droite n'est plus une courbe, mais une quadrique; si les équations des surfaces sont de la forme

$$A_i YZ + B_i ZX + C_i XT + D_i YT = 0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

cette quadrique a pour équation

$$\begin{vmatrix} XT & -YT & YZ & -ZX \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Si l'on considère quatre quadriques dont trois ont deux génératrices communes, d'un même système, la quatrième étant quelconque, le Jacobien se décompose en deux quadriques.

L'une d'elles ne dépend pas de la quatrième des quadriques données; c'est celle dont je viens de donner l'équation. Il est clair que les plans polaires d'un point de cette surface par rapport à trois quadriques se coupant suivant une droite, les plans polaires par rapport

à ces quadriques et à une quatrième ont un point commun.

La seconde des quadriques, qui constituent le Jacobien complet, a ses points qui se correspondent deux à deux de façon que la droite qui les joint soit divisée harmoniquement par les deux génératrices communes aux trois premières quadriques. Autrement dit, cette quadrique et la quatrième des quadriques de base forment un système qui peut être transformé homographiquement en deux quadriques symétriques par rapport à une droite.

On voit qu'il y a des cas, curieux et variés, de décomposition ou de dégénérescence des Jacobiens. Il doit y en avoir encore d'autres.

[L¹⁸d]

**DÉVELOPPABLES FORMÉES AVEC LES NORMALES
D'UNE QUADRIQUE (1);**

PAR M. L. DE LA ROËRE.

Rappelons d'abord le théorème suivant :

« Les pôles d'un plan par rapport aux quadriques d'un faisceau homofocal sont sur une droite perpendiculaire à ce plan qu'elle rencontre à son point de contact avec la quadrique du faisceau à laquelle il est tangent. »

Soient maintenant trois quadriques homofocales Q, Q_1, Q_2 passant par un point P ; le plan polaire de ce dernier par rapport à la quadrique Q , est le plan

(1) Plusieurs des résultats auxquels conduit l'analyse qui suit se trouvent dans la géométrie à trois dimensions de G. Salmon, mais ils sont obtenus par d'autres considérations.

tangent à cette surface au même point ; or, par définition, ce plan est aussi tangent à la *polaire réciproque* de la quadrique Q par rapport à cette quadrique Q_1 et son point de contact P_1 avec cette polaire réciproque est, par réciprocité, le pôle du plan tangent en P à la quadrique Q ; par application du théorème rappelé, ce point P_1 , étant sur la perpendiculaire en P au plan tangent, la droite PP_1 est la normale en P à la quadrique Q et, par sa construction, cette droite est tangente à la quadrique Q_1 et à la polaire réciproque de la quadrique Q . En répétant le même raisonnement pour chaque point de la ligne de courbure tracée sur la surface Q par son homofocale Q_1 , on voit que la développable formée par les normales de la quadrique Q le long de cette ligne de courbure est circonscrite non seulement à la quadrique Q_1 , mais encore à la polaire réciproque de la quadrique Q par rapport à Q_1 . La deuxième développable qui comprend la normale PP_1 est de même circonscrite à la polaire réciproque de la quadrique Q prise par rapport à l'homofocale Q_2 et la normale PP_1 est ainsi tangente en un point P_2 à cette deuxième polaire réciproque.

Les points P_1 et P_2 sont ainsi les pôles du plan tangent en P à la surface Q par rapport à ses deux homofocales passant en ce point ; or on sait, par un théorème connu, que ces deux points sont les points focaux de la normale, ils sont donc aussi ses points de contact avec la surface des centres principaux de courbure ou *développée* de la quadrique Q ; on en conclut que la ligne de contact d'une développable avec la polaire réciproque qui lui correspond est aussi pour cette dernière une ligne de contact avec la développée ; donc :

Une normale d'une quadrique est tangente aux

deux polaires réciproques de cette surface prises par rapport à ses deux homofocales passant au pied de cette normale; les points de contact sont ses points focaux, et les plans tangents en ces points aux polaires réciproques respectives, les plans principaux qui se coupent suivant cette droite.

Si nous considérons la série des lignes de courbure tracées sur la quadrique Q par ses homofocales Q_1 de même espèce, nous remarquerons que les paramètres de ces dernières surfaces varient d'une manière continue, il en est de même des polaires réciproques correspondantes et de leurs lignes de contact avec la développée, on en conclut que l'enveloppe de ces polaires réciproques est l'une des nappes de la développée; l'autre nappe est de même l'enveloppe des polaires réciproques de la quadrique Q par rapport aux diverses homofocales Q_2 . Il existe en outre une troisième série de polaires réciproques, celles qui sont relatives aux homofocales de la quadrique Q de même espèce que cette dernière : elles correspondent à une troisième nappe de la développée, mais *cette nappe est imaginaire* et nous avons la proposition suivante :

La développée d'une quadrique est l'enveloppe des polaires réciproques de cette surface par rapport à toutes ses homofocales.

Pour particulariser les considérations générales qui précèdent, supposons que la quadrique Q est un ellipsoïde ayant pour équation

$$(1) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

les coefficients satisfaisant à la condition

$$A > B > C,$$

sa polaire réciproque par rapport à une quadrique homofocale est représentée par l'équation

$$(2) \quad \frac{Ax^2}{(A-\lambda)^2} + \frac{By^2}{(B-\lambda)^2} + \frac{Cz^2}{(C-\lambda)^2} = 1;$$

en la dérivant par rapport au paramètre λ , on a

$$(3) \quad \frac{Ax^2}{(A-\lambda)^3} + \frac{By^2}{(B-\lambda)^3} + \frac{Cz^2}{(C-\lambda)^3} = 0;$$

par application de la proposition qui vient d'être établie, la développée de l'ellipsoïde est l'enveloppe des polaires réciproques (2) quand λ varie; par suite, l'élimination de ce paramètre entre les deux dernières équations donnera celle de cette développée (1).

La caractéristique qui correspond à la polaire réciproque de paramètre λ est l'intersection des deux surfaces représentées par ces équations, elle est aussi la ligne de contact de cette polaire réciproque avec la développable qui lui est circonscrite; cette ligne ne peut être réelle que si le cône défini par l'équation (3) est lui-même réel, c'est-à-dire si les trois différences $A - \lambda$, $B - \lambda$, $C - \lambda$ ne sont pas du même signe, condition qui exclut les valeurs de λ donnant les ellipsoïdes homofocaux; ces valeurs de λ correspondent, ainsi que nous l'avons déjà dit, à une nappe imaginaire de la développée.

Le moyen le plus simple pour définir cette développée consiste à employer les coordonnées tangentielles : l'équation (2) devient dans ce système de coordonnées

$$(4) \quad \frac{(A-\lambda)^2}{A} u^2 + \frac{(B-\lambda)^2}{B} v^2 + \frac{(C-\lambda)^2}{C} w^2 = p^2,$$

(1) Cette élimination de λ entre les équations (2) et (3) est aussi le procédé indiqué dans la géométrie de Salmon, mais cet auteur arrive à cette conclusion par une voie toute différente de celle employée ici.

elle est du second degré en λ ; en exprimant que ses deux racines sont égales, on obtiendra comme on sait l'équation de l'enveloppe des surfaces qu'elle représente. En opérant ainsi et en posant pour abrégé

$$\varphi^2 = A - B, \quad \varphi_1^2 = A - C, \quad \varphi_2^2 = B - C,$$

on trouve pour l'équation tangentielle de la développée de l'ellipsoïde

$$(5) \quad \varphi^2 \frac{4\nu^2 \omega^2}{BC} + \varphi_1^2 \frac{\omega^2 u^2}{CA} + \varphi_2^2 \frac{u^2 \nu^2}{AB} = p^2 \left[\frac{u^2}{A} + \frac{\nu^2}{B} + \frac{\omega^2}{C} \right].$$

Un paramètre d'un hyperboloïde homofocal à l'ellipsoïde (1) étant désigné par λ , la développée qui est circonscrite à cet hyperboloïde l'est aussi, comme nous l'avons vu, à la polaire réciproque (2) de même paramètre; ces deux conditions déterminent la développée; en employant les coordonnées tangentielles, cette surface est ainsi définie par l'ensemble de l'équation (4) et de la suivante

$$(6) \quad (A - \lambda)u^2 + (B - \lambda)\nu^2 + (C - \lambda)\omega^2 = p^2;$$

mais elle est mieux représentée par le faisceau tangentiel

$$(7) \quad \frac{1}{A}(A - \theta)(A - \lambda)u^2 + \frac{1}{B}(B - \theta)(B - \lambda)\nu^2 \\ + \frac{1}{C}(C - \theta)(C - \lambda)\omega^2 = p^2,$$

où λ est le même paramètre que dans les équations (4) et (6), c'est-à-dire un paramètre constant pour une même développée, l'autre paramètre θ donnant par sa variation toutes les quadriques véritables ou dégénérées inscrites à cette développée: pour $\theta = \lambda$ et pour $\theta = 0$, on retrouve bien les équations (4) et (6). Les valeurs A, B, C et ∞ de ce paramètre θ correspondent à quatre coniques doubles de la développée

situées respectivement dans les plans principaux et dans celui de l'infini.

Considérons les huit plans isotropes dont les équations sont comprises dans la suivante :

$$(8) \quad \pm \varphi_2 \sqrt{A} x \pm i \varphi_1 \sqrt{B} y \pm \varphi \sqrt{C} z = \varphi \varphi_1 \varphi_2;$$

ils coupent les plans principaux et celui de l'infini suivant des droites réelles ou imaginaires, qui sont les normales aux ombilics de la quadrique : ces huit plans contiennent chacun quatre de ces normales, dont une réelle. On reconnaîtra facilement que leurs coordonnées satisfont à l'équation (7) des développables, quelles que soient les valeurs de λ et de θ ; ils sont donc tous tangents.

On déduit de tout ce qui précède la proposition suivante :

Les développables formées avec les normales d'une quadrique ont chacune quatre coniques doubles situées respectivement dans les plans principaux et dans celui de l'infini; les coniques d'un même plan sont inscrites au quadrilatère des normales aux ombilics contenues dans ce plan, il en est de même des coniques focales de la quadrique.

Ces coniques focales sont d'ailleurs, comme les précédentes, les coniques doubles d'une développable imaginaire correspondant à la ligne de courbure imaginaire tracée sur la surface par sa ligne de contact avec la développable isotrope qui lui est circonscrite.

On reconnaîtra encore que les coordonnées des plans isotropes (8) satisfont à l'équation (5) de la développée et qu'elles annulent les dérivées de cette équation par rapport à u, v, w, p ; on en conclut que ces huit plans isotropes sont des plans tangents multiples de la développée.

Enfin, ces huit plans touchent la développée suivant ses coniques de rebroussement et chacune de ces dernières est inscrite au quadrilatère des normales aux ombilics de son plan.

Ces coniques de rebroussement sont imaginaires; on a facilement leurs équations, tant ponctuelles que tangentielles, par les règles connues.

Les lignes de courbure évitant les ombilics, il est évident que les normales en ces points n'appartiennent à aucune des développables; mais on voit, du moins en ce qui concerne les quadriques, que ces normales aux ombilics sont tangentes à toutes les développables.

CORRESPONDANCE.

M. V. Thébault. — *Sur un précédent article.* — Dans une Note *Sur les triangles isologiques* (*N. A.*, 1918, p. 213), nous avons dit, à propos d'une proposition de M. R. Marchay, que ce théorème semblait spécial aux triangles orthologiques. Il n'en est rien. Nous l'avons généralisé depuis comme suit :

Si par les sommets A, B, C d'un triangle on mène des droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ rencontrant les côtés B'C', C'A', A'B d'un triangle A'B'C' sous l'angle θ , dans le même sens de rotation, et que par A'B'C', on mène les droites $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ rencontrant BC, CA, AB sous l'angle $(\pi - \theta)$, dans le même sens de rotation que θ , les aires $\overline{\alpha\beta\gamma}$, $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$ des triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ déterminés, satisfont à la relation

$$\overline{ABC} \times \overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{A'B'C'} \times \overline{\alpha\beta\gamma}$$

(*Journal de Vuibert*, 1919, p. 88; *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, p. 152).

Cette généralisation d'un théorème de Pilatte (*Annales de Gergonne*, 1811, p. 93), et de la propriété fondamentale des triangles isologiques contient notre question 2416, *N. A.*, 1919, p. 239. Nous avons de plus obtenu ce théorème :

Étant donnés un polygone (P) semblable à un polygone (P'), l'angle de similitude étant θ , un polygone (π), inscrit à (P), semblable à un polygone (π') circonscrit à (P'), l'angle de similitude étant $(\pi - \theta)$ de même sens que θ , on a la relation d'aires

$$(P) \times (P') = (\pi) \times (\pi')$$

(*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, p. 155), qui généralise le suivant (*N. A.*, 1844, p. 27) :

Étant donnés deux polygones (P) et (P') homothétiques, on désigne par (π) un troisième polygone circonscrit au premier et inscrit au second. Sa surface est moyenne proportionnelle entre celles des deux proposés.

QUESTION.

* 2445. (1920, 279). Une ellipse étant donnée, il existe pour chaque tangente deux cercles passant par les foyers et tangents à cette droite. Les points de contact des deux cercles avec la droite sont sur les tangentes à la courbe aux sommets du petit axe; les deux cercles se coupent sous un angle constant.

G. F. et R. B.

[A3e]

UN THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ENTIÈRES;

PAR M. G. CASABONNE.

Une équation algébrique entière à m termes peut toujours être mise sous la forme

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + a_4 x^\gamma + \dots + a_m x^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de x .

M. Landau a posé la question de savoir si, lorsque $\alpha = 1$, l'équation (1) admet toujours une racine dont le module est inférieur à un nombre fixe ne dépendant que du nombre des termes (¹).

Je me propose d'établir le théorème suivant, dont la proposition de M. Landau est un cas particulier :

Toute équation algébrique entière à m termes, de la forme

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + a_4 x^\gamma + \dots + a_m x^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de x , admet toujours une racine de module inférieur ou égal à 2^{m-2} .

(¹) *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (Annales de l'École Normale, 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 198). — Voir aussi, pour cette question, P. MONTEL, Sur un théorème d'Algèbre (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 174, 1922, p. 1220).*

Considérons d'abord l'équation à trois termes

$$(2) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta = 0.$$

L'équation

$$1 + x^\alpha = 0$$

admet α racines dont le module est égal à 1. Soit x' l'une d'elles. Faisons la transformation

$$x = x' + y.$$

L'équation (2) devient

$$1 + (x' + y)^\alpha + a_3(x' + y)^\beta = 0$$

ou

$$1 + x'^\alpha + a_3 x'^\beta + b y + c y^2 + \dots + a_3 y^\beta = 0.$$

Or, par hypothèse, on a

$$1 + x'^\alpha = 0,$$

donc l'équation en y se réduit à

$$a_3 x'^\beta + b y + c y^2 + \dots + a_3 y^\beta = 0.$$

Le produit des β racines de cette équation est égal à $(-1)^\beta x'^\beta$, donc l'une d'elles au moins a un module inférieur ou égal à celui de x' . Soit y' cette racine. On a, par hypothèse,

$$|y'| \leq |x'|;$$

à cette racine y' de l'équation en y correspond, pour l'équation (2), la racine

$$x = x' + y'$$

et l'on a

$$|x| \leq |x'| + |y'| \leq |x'| + |x'|,$$

et, puisque $|x'| = 1$,

$$|x| \leq 2.$$

Supposons, maintenant, la proposition démontrée pour une équation algébrique entière à $m - 1$ termes et prouvons qu'elle est vraie pour une équation ayant un terme de plus.

Soient l'équation à m termes

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \dots + a_{m-1} x^\lambda + a_m x^\mu = 0,$$

et x' la racine de module inférieur ou égal à 2^{m-3} qu'admet, par hypothèse, l'équation à $m - 1$ termes

$$(3) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \dots + a_{m-1} x^\lambda = 0.$$

Posons

$$x = x' + y,$$

et remplaçons x par $x' + y$ dans l'équation (1). On a

$$1 + (x' + y)^\alpha + a_3 (x' + y)^\beta + \dots + a_{m-1} (x' + y)^\lambda + a_m (x' + y)^\mu = 0$$

ou

$$1 + x'^\alpha + a_3 x'^\beta + \dots + a_{m-1} x'^\lambda + a_m x'^\mu + b y + c y^2 + \dots + a_m y^\mu = 0.$$

Par hypothèse,

$$1 + x'^\alpha + a_3 x'^\beta + \dots + a_{m-1} x'^\lambda = 0,$$

puisque x' est racine de l'équation (3); il reste donc

$$(4) \quad a_m x'^\mu + b y + c y^2 + \dots + a_m y^\mu = 0.$$

Cette équation a μ racines dont le produit est égal à $(-1)^\mu x'^\mu$. Donc l'une de ces racines, au moins, a un module inférieur ou égal à celui de x' . Soit y' cette racine. On aura

$$|y'| \leq |x'|.$$

A cette racine y' de l'équation (4) correspond, pour l'équation (1), la racine

$$x = x' + y'$$

et l'on a

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x'| + |y'| \\ &\leq |x'| + |x'|, \end{aligned}$$

et, comme $|x'| \leq 2^{m-3}$ par hypothèse,

$$|x| \leq 2^{m-2} \quad (1).$$

Voici une conséquence de la proposition précédente :

Soit l'équation algébrique entière à m termes

$$(5) \quad A_1 + A_2 X^\alpha + A_3 X^\beta + \dots + A_m X^\mu = 0.$$

Ramenons-la à la forme étudiée

$$(1) \quad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \dots + a_m x^\mu = 0;$$

il suffit, pour cela, de diviser les deux membres par A_1 , puis de poser

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} X = x.$$

A toute racine x de l'équation (1) correspond, pour l'équation (5), la racine

$$X = x \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et, par suite, à la racine de module inférieur ou égal à 2^{m-2} que possède toujours l'équation (1) correspond, pour l'équation (5), une racine de module inférieur ou égal à

$$2^{m-2} \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(1) Dans le cas où $\alpha = 1$ et $m = 3$ ou 4 , la proposition a déjà été établie par M. Landau (*loc. cit.*), qui trouve 2 dans le premier cas et $5\frac{2}{3}$ dans le second, comme limite supérieure du module de la racine de plus petit module.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute équation algébrique entière à m termes

$$A_1 + A_2 X^\alpha + A_3 X^\beta + \dots + A_m X^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de X, admet toujours une racine de module inférieur ou égal à

$$2^{m-2} \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}.$$

**REMARQUES AU SUJET D'UN DES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE
DONNÉS AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1921 (1);**

PAR M. RENÉ THIRY

(Strasbourg).

La deuxième question de l'épreuve de Mécanique

(1) Je me propose de traiter ici, à un point de vue un peu différent, le sujet étudié dans un article précédent par M. G. Bouligand (p. 65). Comme les conclusions semblent tout à fait divergentes, quelques explications complémentaires ne seront sans doute pas inutiles.

Dans son travail, M. Bouligand, en admettant qu'à chaque choc la vitesse du centre de gravité du pendule est augmentée de la quantité constante $V \cdot 10^{-6}$, néglige devant l'unité le rapport de la masse de la balle à celle du pendule. Avec les données de l'énoncé, ce rapport est égal à 10^{-6} ; il est donc naturel de le négliger et l'on arrive ainsi à la conclusion qu'il n'y a pas d'état d'équilibre apparent limite. Dans l'article ci-dessus, au contraire, je me propose de démontrer que si l'on ne fait pas cette approximation, pourtant justifiée, le pendule tend vers une position d'équilibre limite qu'il atteint en un temps fini.

En réalité, ces deux résultats, fort dissemblables en apparence, sont pratiquement très proches l'un de l'autre; comme la suite de

rationnelle proposée au concours d'agrégation en 1921 (1) porte sur la détermination de la vitesse de balles de mitrailleuse qui, frappant à intervalles réguliers un pendule balistique, lui font prendre une position apparente d'équilibre dont l'angle avec la verticale est une donnée du problème (2).

On pouvait facilement traiter le problème tel qu'il était posé, en admettant l'existence de cette position apparente d'équilibre et en raisonnant directement à partir d'elle. Il est cependant intéressant, en restant le plus possible dans les conditions de l'énoncé, de se demander si cette position existe réellement et de rechercher comment varient les élongations du pendule, en supposant que celui-ci parte du repos, par exemple.

Dans le but d'éviter les calculs un peu plus compliqués du mouvement pendulaire exact, nous remplaçons le problème posé par le suivant :

Le centre de gravité G d'un corps solide S, de

l'article le montre, la rapidité avec laquelle le pendule tend vers la position apparente d'équilibre tient à la façon dont la quantité $(1 + 10^{-6})^n$ augmente avec le nombre n des chocs. Or ceci se produit avec une extrême lenteur et bien que, *théoriquement*, l'état d'équilibre soit atteint au bout d'un *temps fini*, ce temps sera tellement considérable qu'aux yeux de l'expérimentateur il apparaîtra comme pratiquement *infini*. En tout cas, il est tel, comme je le dis plus loin, qu'il devient à peu près impossible de négliger par rapport à la masse du pendule celles des balles qui, successivement, viennent faire corps avec lui.

Je suis au surplus tout à fait d'accord avec M. Bouligand sur le rôle essentiel que, dans le phénomène vrai, doivent jouer les résistances passives pour établir, *considérablement plus vite* que la théorie ne le montre, l'état apparent d'équilibre. J'ai néanmoins pensé qu'il y avait intérêt à présenter l'étude théorique exacte, ne serait-ce que pour la méthode de calcul mise en œuvre.

(1) Voir note ci-dessus.

(2) Voir le texte de ce problème dans l'article de M. Bouligand.

masse M , est assujetti à se mouvoir sur une droite horizontale Ox ; ce corps est soumis, de la part du point O , à l'action d'une force attractive, appliquée en G , proportionnelle à la distance et égale à $Mk^2\overline{GO}$. Primitivement, le corps S est au repos en O ; à intervalles réguliers, des balles de mitrailleuse, de masse m , lancées de gauche à droite le long de Ox avec une vitesse V , viennent le frapper. Le choc a lieu à la façon des corps mous, c'est-à-dire qu'immédiatement après lui, le corps et la balle ont la même vitesse; mais nous supposerons cependant que la balle ne pénètre pas dans le corps et que, sous l'action de son poids, par exemple, elle se détache de lui. Nous nous proposerons de déterminer les élongations successives du corps S au moment des différents chocs.

Le problème ainsi posé est très approximativement identique au problème primitif, si l'on admet que les oscillations du pendule balistique restent assez petites pour que l'approximation classique du mouvement pendulaire à faibles amplitudes soit valable.

Nous appellerons x_n et v_n l'élongation et la vitesse du point G immédiatement après le $n^{\text{ième}}$ choc; un calcul élémentaire nous montre qu'immédiatement avant le $(n+1)^{\text{ième}}$ choc, l'élongation et la vitesse seront respectivement devenues égales à

$$\begin{aligned}\bar{x}_n &= x_n \cos \varepsilon + \frac{v_n}{k} \sin \varepsilon, \\ \bar{v}_n &= -x_n k \sin \varepsilon + v_n \cos \varepsilon,\end{aligned}$$

en posant, pour simplifier l'écriture, $\varepsilon = k.t$, et t désignant l'intervalle séparant les différents chocs.

Après le $(n+1)^{\text{ième}}$ choc, l'élongation ne se trouve

pas modifiée, mais la vitesse acquiert brusquement une valeur nouvelle donnée par le théorème de la conservation des quantités de mouvement appliqué au système formé par le corps et la balle et égale à

$$\frac{\bar{v}_n + \lambda V}{1 + \lambda} \quad \left(\text{en posant } \lambda = \frac{m}{M} \right).$$

On a donc les formules de récurrence suivantes :

$$x_{n+1} = x_n \cos \varepsilon + \frac{v_n}{k} \sin \varepsilon,$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{1 + \lambda} [-x_n k \sin \varepsilon + v_n \cos \varepsilon + \lambda V],$$

qui nous permettront de calculer de proche en proche x_n et v_n en fonction de leurs valeurs après le premier choc, valeurs qui sont

$$x_1 = 0, \quad v_1 = \frac{\lambda V}{1 + \lambda}.$$

La résolution de ces formules de récurrence est très facile; en effet, formons la combinaison

$$u_{n+1} = s x_{n+1} + v_{n+1}$$

et cherchons à déterminer le paramètre s de façon que, dans le second membre, x_n et v_n interviennent seulement par l'expression

$$u_n = s x_n + v_n.$$

Un calcul tout élémentaire montre qu'il suffit de prendre pour s une racine de l'équation du second degré

$$(I) \quad s^2(1 + \lambda) - \lambda k s \cot \varepsilon + k^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à

$$k^2[\lambda^2 \cot^2 \varepsilon - 4(1 + \lambda)];$$

nous le supposons négatif (ce qui est largement réalisé avec les données numériques du problème posé); les racines s et s' de l'équation seront donc imaginaires conjuguées et l'on aura

$$u_{n+1} = \alpha u_n + \beta$$

en posant pour un moment

$$\alpha = \frac{\cos \varepsilon}{1 + \lambda} + s \frac{\sin \varepsilon}{k},$$

$$\beta = \frac{\lambda V}{1 + \lambda}.$$

En écrivant cette égalité pour différentes valeurs de n

$$\begin{array}{rcl} 1 & u_n & = \alpha u_{n-1} + \beta, \\ 2 & u_{n-1} & = \alpha u_{n-2} + \beta, \\ \cdot & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \alpha^{n-2} & u_2 & = \alpha u_1 + \beta, \end{array}$$

en les multipliant par les puissances de α mises en regard et en les ajoutant, on a immédiatement

$$u_n = \alpha^{n-1} u_1 + \beta \frac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1},$$

ou encore, en remplaçant u_1 par sa valeur, qui est précisément égale à β ,

$$u_n = \beta \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}.$$

En isolant la partie réelle et la partie imaginaire, il serait facile de tirer de là x_n et v_n .

Le carré du module de la quantité α est égal, en appelant α' la quantité imaginaire conjuguée, à

$$\alpha\alpha' = \left[\frac{\cos \varepsilon}{1 + \lambda} + s \frac{\sin \varepsilon}{k} \right] \left[\frac{\cos \varepsilon}{1 + \lambda} + s' \frac{\sin \varepsilon}{k} \right].$$

Un calcul facile donne alors pour le module de α la

valeur

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}},$$

quantité inférieure à l'unité.

Il s'ensuit que, lorsque le nombre des chocs augmente indéfiniment, α^n tendra vers zéro et que u_n aura une limite

$$u = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

On en conclut que x_n et v_n séparément auront des limites x et v données par les formules

$$s x + v = \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$s' x + v = \frac{\beta}{1-\alpha},$$

la deuxième étant déduite de la première par le changement de i en $-i$.

D'où, par soustraction et après un calcul élémentaire que je ne reproduis pas,

$$(2) \quad x = \frac{\lambda}{2+\lambda} \frac{V}{k} \cot \frac{\varepsilon}{2},$$

formule qui donne l'élongation de la position apparente d'équilibre limite.

La restriction que nous avons faite plus haut en supposant que le discriminant de l'équation (1) était négatif, restriction qui peut encore se mettre sous la forme

$$\sin \varepsilon > \frac{\lambda}{2+\lambda},$$

n'a rien d'essentiel. On vérifierait sans peine que, si elle n'était pas remplie, la quantité α , bien que réelle, serait encore inférieure à 1. Dans ce dernier cas, x_n

tendrait vers sa limite de façon monotone au lieu d'osciller autour d'elle comme cela se présente en général dans le premier cas. Il est du reste vraisemblable que, si l'on cherchait à modifier les données numériques du problème proposé au concours pour rentrer dans ce dernier cas, les oscillations du pendule ne resteraient pas assez petites pour que l'approximation qui nous a conduits à notre nouvel énoncé reste justifiée. Je n'insisterai pas davantage sur ce détail.

Si, au lieu de partir du repos, on était parti de conditions initiales quelconques, le calcul eût été encore valable et la limite eût été la même. En particulier, si l'on avait eu précisément

$$u_1 = \frac{\beta}{1 - \alpha}$$

pendant toute la durée des chocs, x_n serait resté constant et égal à x .

Enfin de la formule (2) on tire la valeur de la vitesse inconnue V , en fonction de k , x , λ , ε , sous la forme

$$V = \frac{2 + \lambda}{\lambda} k x \operatorname{tang} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec les données numériques du problème donné au concours, et en assimilant (vu l'absence d'indications permettant de calculer les moments d'inertie) le pendule balistique à un pendule simple de longueur $l = 10^m$, on a

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \varepsilon = kt = \sqrt{\frac{g}{l}} 10^{-1},$$

$$x = \frac{3\pi}{2000} l, \quad \lambda = 10^{-6};$$

on trouve alors pour V une valeur de l'ordre de 4700 m : s, évidemment trop forte pour que les données correspondent à une expérience réelle.

Il est à remarquer que, si l'on s'en tient à l'approxi-

mation obtenue en remplaçant $\text{tang} \frac{\varepsilon}{2}$ par $\frac{\varepsilon}{2}$, la longueur du pendule n'intervient pas dans le calcul de V. Elle joue cependant un rôle par son ordre de grandeur qui nous permet d'assimiler sans invraisemblance le pendule composé à un pendule simple.

Il est possible encore, toujours avec ces données numériques, de calculer, lorsque la position d'équilibre est à peu près atteinte, de combien le pendule s'en écarte à chaque choc; on trouve que l'espèce de vibration qui se produit est de l'ordre de $\frac{1}{800}$ de l'angle d'écart. L'apparence est donc bien celle d'un véritable équilibre.

Enfin il est possible de s'assurer que, pendant tout le mouvement, l'amplitude à un instant quelconque reste assez faible pour que l'approximation faite au début soit valable (1).

Remarquons cependant, pour terminer, que la façon dont le pendule tend vers sa position d'équilibre dépend de la rapidité avec laquelle α^n tend vers zéro. Or ici ce fait se produit avec une très grande lenteur, car $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$ est très voisin de 1. Il faudra donc un nombre considérable de balles pour que l'équilibre soit à peu près atteint et il paraît difficile que l'on puisse, dans l'expérience véritable du pendule balistique, négliger la masse des balles tirées devant celle du pendule lui-même.

(1) Il y a encore un autre point par lequel le problème schématisé traité dans cet article diffère du problème réel. Nous avons supposé que les chocs sur le corps se faisaient à intervalles régulièrement espacés, alors qu'en toute exactitude il n'en est ainsi que pour les passages des balles successives au point O; mais la correction qui en résulterait n'aurait d'importance que pour des balles animées d'une faible vitesse.

[O2k]

SUR DEUX FAMILLES DE COURBES ORTHOGONALES;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Si l'on écrit, pour une fonction $F(z)$ d'une variable complexe,

$$F(z) = P(x, y) + i Q(x, y),$$

on sait que les courbes

$$P(x, y) = \text{const.}, \quad Q(x, y) = \text{const.}$$

forment deux familles de courbes orthogonales; et le résultat obtenu en posant

$$F(z) = (x + yi)^m = \rho^m (\cos m\omega + i \sin m\omega)$$

est bien connu.

On connaît moins un autre exemple donné par Lamé en 1834 (*Journal de l'École Polytechnique*, 23^e cahier, p. 244; *Journal de Liouville*, 1^{re} série, t. I, p. 82); Lamé ne dit pas expressément qu'il ait obtenu le résultat dont il s'agit par l'application du procédé précédent à une fonction particulière $F(z)$, mais il n'est pas douteux qu'il en soit ainsi, car il signale ce procédé pour la formation de familles de courbes orthogonales et cite l'exemple indiqué ci-dessus.

La séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire se fait simplement, comme on vient de le rappeler, pour la fonction z^m , en introduisant le module et l'argument. Si l'on se rappelle que la recherche de

la fonction primitive de $\frac{1}{z}$, à partir de la fonction primitive de z^m pour une valeur quelconque de m autre que -1 , donne lieu à la formule

$$\lim \frac{z^{m+1} - 1}{m+1} = \text{Log } z \quad (\text{pour } m = -1)$$

ou

$$\lim \frac{z^m - 1}{m} = \text{Log } z \quad (\text{pour } m = 0),$$

on est conduit à prévoir que la même séparation se fera aisément pour $\text{Log } z$ et l'on pourrait l'effectuer en partant de l'égalité précédente; on a directement

$$\text{Log } z = \text{Log } \rho (\cos \omega + i \sin \omega) = \text{Log}(\rho e^{i\omega})$$

ou

$$\text{Log } z = (\text{Log } \rho) + (i\omega).$$

Considérons alors la fonction

$$F(z) \equiv \sum z \text{Log}(z - z_1);$$

en désignant par ρ_1, ρ_2, \dots , et $\omega_1, \omega_2, \dots$ les modules et les arguments des différences $z - z_1, z - z_2, \dots$, on a

$$F(z) \equiv \sum \alpha \text{Log } \rho_1 + i \sum \alpha \omega_1.$$

Si M, M_1, M_2, \dots sont les points qui ont pour affixes z, z_1, z_2, \dots , on voit que les courbes représentées par les équations

$$\sum \alpha \text{Log } M M_1 = \text{const.},$$

$$\sum \alpha \widehat{(x'x, M M_1)} = \text{const.}$$

forment deux familles de courbes orthogonales.

Lamé écrit :

$$\sum \alpha \operatorname{Log} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \text{const.},$$

$$\sum \alpha \operatorname{arc tang} \frac{y-y_1}{x-x_1} = \text{const.}$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnés dans un plan des points fixes A, B, ..., on considère, d'une part, les courbes dont les points vérifient la relation*

$$(1) \quad \overline{MA}^\alpha \times \overline{MB}^\beta \times \dots = \text{const.},$$

les exposants, que l'on peut supposer entiers, étant positifs ou négatifs, et, d'autre part, les courbes dont les points vérifient la relation

$$(2) \quad \alpha \times (x'x, MA) + \beta \times (x'x, MB) + \dots = \text{const.},$$

x'x étant un axe quelconque; on a ainsi deux familles de courbes orthogonales.

Dans la relation (2), la constante est donnée à $k\pi$ près.

2. Dans l'Ouvrage qui a pour titre *Sur une classe remarquable de courbes...*, 1873, Darboux a donné au théorème de Lamé de beaux développements, qu'il a reproduits dans son dernier Ouvrage : *Principes de Géométrie analytique*.

Eu égard aux résultats donnés par Darboux, on doit regarder comme cas normal celui où l'on a $\sum \alpha = 0$, les α étant égaux à 1 ou à -1; on peut alors écrire

$$(3) \quad \frac{MA \times MB \times \dots}{MA' \times MB' \times \dots} = \text{const.},$$

$$(4) \quad (\widehat{MA', MA}) + (\widehat{MB', MB}) + \dots = \text{const.};$$

les segments $A'A$, $B'B$, ... sont des cordes des courbes (4).

Si certains points A' , B' , ... s'éloignent indéfiniment, la constante de la relation (3) tendant vers zéro, on doit supprimer les facteurs correspondants dans cette relation et remplacer dans la relation (4) les angles correspondants par $(x'x, MA)$, ...

3. Le cas le plus simple est celui des deux familles de cercles orthogonaux données par les relations

$$(5) \quad \frac{MA}{MA'} = \text{const.},$$

$$(6) \quad (\widehat{MA', MA}) = \text{const.};$$

si le point A' s'éloigne indéfiniment, on a des cercles concentriques et leurs diamètres.

Si $AA'BB'$ est un parallélogramme, les deux familles de courbes orthogonales

$$(7) \quad MA \times MB = k \cdot MA' \times MB',$$

$$(8) \quad (\widehat{MA', MA}) + (\widehat{MB', MB}) = \text{const.}$$

sont des ellipses de Cassini. Si les points A' et B' s'éloignent indéfiniment, k tendant vers zéro, on obtient des ellipses de Cassini et des hyperboles équilatères :

$$(9) \quad MA \times MB = \text{const.},$$

$$(10) \quad (\widehat{AB, MA}) + (\widehat{AB, MB}) = \text{const.}$$

4. *Cas particulier.* — Soient A, B, C, \dots les sommets d'un polygone régulier de m côtés, O son centre, Ox un axe polaire dirigé suivant OA , a le rayon du cercle circonscrit. Cherchons les équations en coor-

données polaires des courbes définies par les relations

$$(11) \quad \widehat{MA} \times \widehat{MB} \times \dots = \text{const.},$$

$$(12) \quad \left(\widehat{Ox, AM} \right) + (Ox, BM) + \dots = \varphi, \text{ à } k\pi \text{ près.}$$

Soient z_0, z_1, \dots, z_{m-1} les affixes des sommets du polygone, et z l'affixe du point M; si Z est la mesure complexe du vecteur qui a pour origine l'un des sommets et pour extrémité le point M, on a

$$Z = z - z_p,$$

d'où

$$(Z - z)^m = (-1)^m a^m$$

ou

$$Z^m - \dots + (-1)^m (z^m - a^m) = 0.$$

Le produit des Z est donc $z^m - a^m$, ou

$$(\rho^m \cos m\omega - a^m) + i\rho^m \sin m\omega;$$

de là deux conséquences :

D'une part, le carré du produit des distances du point M aux sommets du polygone est

$$P^2 = (\rho^m \cos m\omega - a^m)^2 + \rho^{2m} \sin^2 m\omega$$

ou

$$(13) \quad P^2 = \rho^{2m} - 2a^m \rho^m \cos m\omega + a^{2m};$$

c'est le théorème de Cotes.

D'autre part, si l'on appelle φ la somme des

angles $\left(\widehat{Ox, AM} \right), \dots$, on a

$$(14) \quad \text{tang } \varphi = \frac{\rho^m \sin m\omega}{\rho^m \cos m\omega - a^m}, \quad \left(\frac{\sin \varphi}{\rho^m \sin m\omega} > 0 \right);$$

cette formule peut prendre rang à côté de celle de Cotes.

Il résulte des deux formules précédentes que les équations des courbes de Lamé sont, dans le cas

actuel :

$$(15) \quad \rho^{2m} - 2a^m \rho^m \cos m\omega + a^{2m} = \text{const.},$$

$$(16) \quad \rho^m \sin(\varphi - m\omega) = a^m \sin \varphi,$$

φ étant un paramètre, donné à $k\pi$ près; on peut écrire

$$\frac{\rho^m \cos m\omega - a^m}{\rho^m \sin m\omega} = \text{const.} = \cot \varphi.$$

Pour $m = 2$, on retrouve les ellipses de Cassini qui ont pour foyers les points A et B et les hyperboles équilatères qui ont leur centre au milieu de AB et qui passent en A et B; ces dernières courbes forment un faisceau de coniques.

5. Les courbes de la première famille sont connues depuis longtemps; Serret, qui les a étudiées à divers points de vue, a déterminé directement leurs trajectoires orthogonales (*Journal de Liouville*, t. VIII, p. 498). On a pour les premières courbes

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{-a^m \sin m\omega}{\rho^m - a^m \cos m\omega};$$

on a donc, pour les courbes orthogonales,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\rho^m - a^m \cos m\omega}{a^m \sin m\omega},$$

ou (*Recueil d'exercices* de Tisserand)

$$\frac{d\rho}{d\omega} + \rho \frac{\cos m\omega}{\sin m\omega} = \frac{\rho^{m+1}}{a^m \sin m\omega},$$

ce qui est une équation de Bernoulli; on l'écrit

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho^m}\right)}{d\omega} - \frac{1}{\rho^m} \frac{m \cos m\omega}{\sin m\omega} = -\frac{m}{a^m \sin m\omega}.$$

Cette équation est linéaire, et son intégrale générale est, en désignant la constante arbitraire par $-\frac{1}{\alpha^m} \cot \varphi$,

$$\frac{1}{\rho^m} = \sin m \omega \left(-\frac{1}{\alpha^m} \cot \varphi - \frac{m}{\alpha^m} \int \frac{d\omega}{\sin^2 m \omega} \right),$$

ou bien

$$\frac{\alpha^m}{\rho^m} = \sin m \omega (\cot m \omega - \cot \varphi) - \frac{\sin(\varphi - m \omega)}{\sin \varphi};$$

c'est l'équation (16).

Michaël Roberts a déduit cette équation de la définition par la relation

$$\widehat{(Ox, AM)} + (Ox, BM) + \dots = \varphi;$$

le calcul de l'angle (*Journal de Liouville*, t. X, p. 251) repose sur la formule

$$\text{arc tang} \frac{k \sin x}{1 - k \cos x} = \frac{k}{1} \sin x + \frac{k^2}{2} \sin 2x + \dots$$

Cette formule, où l'on suppose $|k| \leq 1$, $|\text{arc}| \leq \frac{\pi}{2}$, est une des deux formules que l'on obtient en partant du développement

$$\text{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \dots, \quad |z| \leq 1,$$

qui donne la détermination de $\text{Log}(1+z)$, dont l'argument est compris entre $-\pi$ et π , et en faisant

$$z = -k(\cos x - i \sin x), \quad k \leq 1;$$

on a ainsi

$$\begin{aligned} & \text{Log}[(1 - k \cos x) + i \sin x] \\ &= - \left[\frac{k}{1} (\cos x - i \sin x) + \frac{k^2}{2} (\cos 2x - i \sin 2x) + \dots \right], \end{aligned}$$

et, par suite, .

$$\frac{k}{1} \cos x + \frac{k^2}{2} \cos 2x + \dots = -\text{Log} \sqrt{1 - 2k \cos x + k^2},$$

$$\frac{k}{1} \sin x + \frac{k^2}{2} \sin 2x + \dots = \text{arc tang} \frac{k \sin x}{1 - k \cos x},$$

l'arc étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, attendu que son cosinus est positif. Ces formules sont dues à Euler ou à D. Bernoulli; la démonstration indiquée par Poisson (*Journal de l'École Polytechnique*, 19^e cahier, p. 410), ne diffère que par la forme de la précédente.

6. *Vérification géométrique du théorème de Lamé.* — Michaël Roberts vérifie comme il suit le théorème de Lamé. Si MU et MV sont les tangentes en M aux courbes définies par les deux équations

$$\prod \rho_1^\alpha = \text{const.}, \quad \sum \alpha \omega_1 = \text{const.},$$

on a

$$\frac{d\rho_1}{ds} = \cos \widehat{M_1 MU}, \quad \frac{\rho_1 d\omega_1}{ds} = \sin \widehat{M_1 MV};$$

comme on a, selon la courbe envisagée,

$$\sum \alpha \frac{d\rho_1}{\rho_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \alpha \frac{\rho_1 d\omega_1}{\rho_1} = 0,$$

on obtient

$$\sum \alpha \frac{\cos \widehat{M_1 MU}}{\rho_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \alpha \frac{\sin \widehat{M_1 MV}}{\rho_1} = 0;$$

les deux courbes sont donc orthogonales.

[R6]

**INTRODUCTION A L'ETUDE DE LA MÉCANIQUE
ET DE SES PRINCIPES;**

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

(Suite et fin.)

23. En particulier, si les planètes étaient des solides, formés de couches homogènes et sphériques, ou la constance du champ de gravitation dans la portion de l'espace qu'elles occupent à un instant donné, leurs axes de rotation auraient des directions invariables par rapport aux étoiles fixes. En outre, la rotation serait uniforme. Si l'on tient compte du refroidissement de la planète, qui la contracte et diminue son moment d'inertie, la vitesse de cette rotation augmente très lentement, de manière à assurer la constance du moment cinétique dans le mouvement autour du centre de gravité. De plus, les principes de la Mécanique elle-même ont fait prévoir que les planètes sont ellipsoïdales, et non sphériques; dans ces conditions, les actions de gravitation n'ont plus une résultante unique appliquée au centre. Il en résulte des phénomènes de précession et de nutation; en particulier, sous l'action prépondérante du Soleil et de la Lune s'exerçant sur le renflement équatorial terrestre, l'axe de notre planète décrit très lentement un cône voisin d'un cône de révolution. Le phénomène de la précession des équinoxes se trouve ainsi expliqué, et c'est là une confirmation éclatante de la valeur des principes newtoniens.

24. Revenons à la Mécanique terrestre : pour faire

la synthèse des mouvements qui s'y rapportent, il nous faut introduire un nouveau concept, celui des *forces de liaison*. Considérons le mouvement d'un point, ou d'une partie quelconque d'un système, tel qu'il se produit dans le déplacement d'ensemble; isolons par la pensée cette partie du système : les forces de liaison interviennent pour reconstituer son mouvement, extrait sans modifications du déplacement d'ensemble.

Les forces de liaison intéressent les problèmes les plus simples, ceux qui ont été étudiés les premiers en vue de la recherche des lois générales du mouvement, comme celui du pendule simple et du plan incliné. Soit un pendule simple; on peut reconstituer son mouvement, en faisant intervenir, à côté de la pesanteur une force fictive, portée par le fil, et maintenant la masse pesante sur le cercle qu'elle décrit. Il y a là un nouvel élément pour la vérification des principes newtoniens : entre les deux équations de la Dynamique du point qui, dans le plan d'oscillation, déterminent le mouvement, on peut éliminer l'intensité inconnue de la réaction. On obtiendra une égalité exprimant que l'accélération tangentielle est $-g \sin \alpha$. Or les conséquences de cette relation peuvent se vérifier expérimentalement.

Considérons les équations du mouvement d'un système : la recherche systématique de leurs combinaisons indépendantes des forces de liaison nous amènerait à traiter ici le théorème des forces vives et, plus généralement, à développer les méthodes de la Dynamique analytique.

Il est très remarquable que la possibilité se soit offerte d'opérer la synthèse de mouvements de systèmes de nature physique très variable, à l'aide de ces forces fictives. Pour leur donner un sens concret, on a

recours aux propriétés physiques de l'agent de liaison. Si cet agent est un fil flexible, comme dans le problème du pendule, la force de liaison correspondante est une tension. Dans le cas d'un solide interviendront des forces de cohésion, etc. La classification des forces de liaison est intimement liée à celle des états physiques de la matière.

25. Les forces de liaison ont un caractère absolu, c'est-à-dire elles sont indépendantes du système de référence. Soit un pendule simple, dont la masse pesante M oscille sur une circonférence (mouvement normal). A ce mouvement, adjoignons celui d'un mobile fictif M' , obtenu en supposant qu'à un instant donné, la masse se détache du fil. Il n'y a pas de discontinuité pour la vitesse, mais il y a pour l'accélération une variation brusque, vectoriellement égale au quotient, par la masse, de la force de liaison tout à coup disparue.

Or, considérons deux mobiles M et M' qui, à l'instant t , coïncident et possèdent le même vecteur vitesse, propriété d'ailleurs indépendante du système de référence. De leurs accélérations $\vec{\gamma}$ et $\vec{\gamma}'$, par rapport à un premier système de référence, on déduit leurs accélérations $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}'_1$, par rapport à un second, à l'aide du théorème de Coriolis. Dans cette transformation, il faudra faire intervenir la même accélération d'entraînement pour M et pour M' (à cause de leur communauté de position à l'instant t), et également la même accélération complémentaire (vu la coïncidence de leurs vitesses). On a donc

$$\vec{\gamma}'_1 - \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}' - \vec{\gamma}.$$

Mais alors, en appliquant ce résultat au problème du pendule, il est bien établi que la variation brusque de l'accélération est indépendante du système de référence. Il en est donc de même de la force de liaison.

26. Le résultat précédent a une grande importance; dans tous les cas, on peut l'appliquer aux forces intérieures à un système formé de points matériels : il suffit, dans les équations (2) du n° 7, de faire rentrer dans les termes Φ , c'est-à-dire dans les forces extérieures, tout ce qui dépend du trièdre de référence. En opérant ainsi, le principe d'égalité de l'action et de la réaction s'appliquera aux forces intérieures, indépendamment des axes choisis. Il pourra être regardé comme un principe absolu. La masse, définie à l'aide de ce principe, prend elle-même un caractère absolu [ce que nous avons admis plus haut (1)].

27. Pour terminer cet exposé, où nous avons volontairement omis de parler de la confirmation apportée aux principes newtoniens par le phénomène des marées, par certains phénomènes astronomiques extérieurs au monde solaire (étoiles multiples), etc., nous mentionnerons les expériences du gyroscope et du pendule de Foucault.

Le gyroscope consiste essentiellement en un solide de révolution suspendu par son centre de gravité. Dans le mouvement autour du centre de gravité, le moment cinétique est encore constant et, par suite, si ce mouvement est initialement une rotation autour de l'axe de révolution, ce mouvement se continuera indéfini-

(1) Le contenu des n° 25 et 26 est emprunté au Cours de l'École Polytechnique de M. Painlevé.

ment. Ce qui précède suppose d'ailleurs le mouvement rapporté à des directions astronomiquement fixes. Mais alors, si l'appareil est susceptible de rotations de longue durée, on verra la direction de l'axe, pointée initialement vers une étoile, accompagner celle-ci dans son mouvement diurne. Pratiquement, la durée de la rotation peut atteindre dix minutes : pendant ce temps, la Terre tourne environ de deux degrés et demi. L'expérience confirme bien les prévisions ci-dessus.

Mais l'expérience du pendule de Foucault, susceptible de se prolonger pendant plusieurs heures, donne des indications beaucoup plus précises. Soit, en un point O de la surface du globe, Oz la direction d'équilibre du fil à plomb, c'est-à-dire la direction du champ Γ , obtenu en superposant au champ de gravitation celui de la force centrifuge. Dans le plan perpendiculaire en O à Oz , prenons deux autres axes Ox , dans le plan méridien et Oy suivant la tangente au parallèle. Supposons que Oz soit ascendant, que le pendule soit attaché en un point A de Oz , et que la position d'équilibre de la masse pesante M soit justement le point O . Pour les petites oscillations, on peut raisonner comme si le point M demeurait dans le plan xOy , Cherchons dans ce plan la force tangentielle qui sollicite M . Le champ Γ , uniforme et parallèle à Oz , fournit une composante tangentielle d'expression vectorielle

$$mk(O - M),$$

donc l'action isolée ferait décrire au point M une ellipse E de centre O suivant la loi des aires. Mais, au champ Γ , il faut adjoindre la force centrifuge composée, dont l'expression

$$- 2m\vec{O}\Omega\Lambda \frac{dM}{dt}$$

fait intervenir le produit vectoriel (n° II) de la rotation instantanée $\vec{O}\Omega$ du trièdre $Oxyz$ par la vitesse de M relative à ce trièdre. Il faut prendre seulement la projection sur le plan xOy , c'est-à-dire

$$-2m\vec{O}\omega\Lambda\frac{dM}{dt},$$

en appelant ω la projection orthogonale de Ω sur l'axe Oz .

Cette force centrifuge composée serait celle qu'il faudrait introduire si le trièdre $Oxyz$ était animé, par rapport à un trièdre regardé comme fixe, d'une rotation de vitesse angulaire ω autour de Oz . L'ellipse E serait fixe par rapport à ce trièdre qui, par rapport à $Oxyz$, tourne autour de Oz , avec la vitesse angulaire $-\omega$. Nous négligeons ici la force centrifuge, mais cela est légitime, puisqu'elle est de l'ordre de ω^2 .

Nous devons donc réaliser ici la synthèse du mouvement en composant, avec le mouvement elliptique de M , observé pendant une oscillation, une rotation très lente, de vitesse angulaire $-\omega$. La Terre tourne dans le sens rétrograde, donc $-\omega$ est positif. On verra donc le plan d'oscillation tourner dans le sens direct de la Mécanique, c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre. C'est ce que l'expérience confirme ⁽¹⁾ (à condition de se placer dans l'hémisphère boréal, condition nécessaire à la validité du raisonnement précédent).

(1) On pourrait objecter que, si l'on analyse avec quelque précision les petits mouvements d'un pendule sphérique, on peut les réaliser en imprimant à un point animé d'un mouvement elliptique du type précédent un mouvement d'entraînement de rotation : on obtiendrait donc en Dynamique théorique un phénomène analogue, et cela sans mettre en jeu l'influence perturbatrice de la Terre. Toutefois il convient de remarquer que si un tel mouvement est

28. Après cette vue d'ensemble sur les principes de la Mécanique et leur confrontation expérimentale, revenons un instant aux mouvements de notre système solaire. Voici des chiffres qui nous donneront une idée de l'ordre de précision obtenu dans la synthèse mathématique de ces mouvements : entre les résultats de l'observation et ceux du calcul, se manifeste seulement un écart angulaire de 15" pour le mouvement de la Lune en deux siècles et demi. La divergence la plus notable qui ait été enregistrée a trait au mouvement de Mercure; le déplacement réel du périhélie de la planète diffère du déplacement théorique de 43" par siècle. Il reste à l'expliquer : Einstein a proposé une solution du problème, dont le principe semble avoir un champ d'applications très vaste. Sur ce point, nous renverrons le lecteur aux travaux d'Einstein et de ses commentateurs et tout particulièrement à l'Ouvrage de M. Hermann Weyl (*Temps, espace, matière*), et à celui, plus récent, de M. Jean Becquerel (*Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*).

Nos lecteurs remarqueront peut-être que nous n'avons pas fait mention du *principe de l'inertie*. Ce principe est une conséquence pure et simple de l'équation

$$\vec{F} = m\vec{\gamma}.$$

Il suffit de supposer $\vec{F} = 0$. Il vient $\vec{\gamma} = 0$. Donc un

réalisé, on en déduit un autre mouvement possible, symétrique par rapport à un plan vertical. Donc la rotation du plan d'oscillation, suivant les conditions initiales, se produirait tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre. Dans le problème de Foucault, elle se produit toujours dans le sens positif. Il n'y a donc aucune objection possible.

point qui n'est soumis à aucune force est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Ce principe s'applique à tous les systèmes de référence qui sont doués d'une translation rectiligne et uniforme par rapport au trièdre O, x, y, z , c'est-à-dire qui lui correspondent par le groupe de la Cinématique classique.

QUESTIONS.

* 2446. (1920, 279). Si MN est une corde d'une conique tangente en P et Q à deux cercles bitangents à la courbe et ayant leurs centres sur le même axe, les deux segments MN et PQ ont même milieu. G. FONTENÉ.

2447. (1920, 279). Étant donnée, dans le plan, une région limitée par un contour convexe, on peut, d'une infinité de manières, mener deux cordes AC et BD de ce contour, se coupant à l'intérieur de la région considérée et la partageant en quatre régions d'aires données.

Démontrer que la tangente à la courbe, lieu des points de rencontre des deux cordes, est parallèle à la troisième diagonale du quadrilatère ABCD. R. B.

2448. (1920, 280). Étant données deux courbes planes quelconques, une courbe de grandeur invariable se meut dans leur plan commun de manière à avoir avec chacune d'elles une corde commune de longueur constante. Trouver, pour une position de la courbe mobile, le centre instantané de rotation du plan qu'elle entraîne. R. B.

2449. (1920, 319). Un triangle de grandeur invariable ABC prend dans un plan toutes les positions telles qu'il reste homologique à un triangle fixe du même plan. Démontrer qu'il existe un point, entraîné avec le triangle ABC, tel que la

droite, joignant ce point à un point fixe convenablement choisi, passe constamment par le centre d'homologie des deux triangles.

R. B.

2450. (1920, 320). Un quadrangle ABCD, de grandeur invariable, se meut dans un plan de telle manière que les droites, joignant ses sommets à quatre points fixes du même plan, soient constamment concourantes. Démontrer que l'on peut trouver d'une infinité de manières un point, entraîné avec le quadrangle, tel que la droite le joignant à un point fixe passe par le point de concours des quatre premières droites. Les points satisfaisants sont ceux d'une certaine courbe du troisième ordre, et de même les points fixes correspondants.

R. B.

2453. Soit $AB'CA'BC'$ un hexagone plan tel que les angles \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} aient pour somme 2π (il en est alors de même des angles \hat{A}' , \hat{B}' , \hat{C}'). Les centres des cercles $C'AB'$, $A'BC'$, $B'CA'$ sont les sommets d'un triangle dont les angles sont respectivement supplémentaires des angles \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} .

R. B.

2454. Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères ω_a , ω_b , ω_c , ω_d , passant respectivement par chaque sommet A, B, C, D, et par les points situés sur les trois arêtes adjacentes, ont un point commun K (*S. Roberts*, 1880).

Montrer que ce point K est l'inverse (conjugué isogonal), par rapport au tétraèdre $\omega_a\omega_b\omega_c\omega_d$, du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les sommets sont les points communs à trois des sphères sur les faces du tétraèdre ABCD.

V. THÉBAULT.

2455. On considère quatre sphères de centres O_1, O_2, O_3, O_4 , qui admettent un centre radical C, et une sphère (Σ) concentrique à la sphère circonscrite au tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. Montrer que le centre de la sphère inscrite au tétraèdre déterminé par les plans radicaux de la sphère (Σ), respectivement avec les sphères O_1, O_2, O_3, O_4 , coïncide avec le centre radical C.

Application.—Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD, déterminer un point P de l'espace qui soit le centre de la sphère inscrite au tétraèdre dont les sommets sont les projections orthogonales de P sur les faces du tétraèdre ABCD.

V. THÉBAULT.

2456. Soient x, y, z les coordonnées d'un point M d'une courbe gauche, considérées comme fonction de l'arc s de la courbe. Soient respectivement r et r_1 les rayons de courbure et de torsion de la courbe au point M. On a la relation

$$\frac{1}{r^2 r_1} = \pm \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix},$$

le signe dépendant du sens positif de rotation choisi pour définir l'angle de torsion.

R. LEVEUGLE.

2457. On donne une conique, deux points A et A' sur la courbe, un point P dans son plan. Si AM et A'M' sont deux cordes variables de la conique telles que la droite MM' passe au point P, la droite AM et A'M' rencontrent une droite fixe menée par ce point en des points I et I' qui sont en involution sur cette droite.

G. F.

2458. Une épicycloïde cuspidale est engendrée par le roulement d'un cercle sur un cercle de centre ω . Si l'épicycloïde varie, en restant inscrite à un triangle fixe et semblable à elle-même, le lieu du point ω se compose de droites.

R. B.

NOTE.

Ce numéro n'a que trente pages. Les prochains numéros seront augmentés en conséquence.

[Dbcδ]

**IDENTITÉS NOUVELLES
POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI (1);**

PAR M. L. TITS.

L'identité fondamentale qui sert au calcul des nombres de Bernoulli est la suivante

$$f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x),$$

dans laquelle $f(x)$ est un polynome *entier*, x peut prendre une valeur quelconque, zéro par exemple, et les exposants de B doivent, *tous calculs faits*, être remplacés par des indices.

Si $f(x) = x^p(x-1)^q$, on obtient la formule de Stern

$$(B + 1)^p B^q - B^p (B - 1)^q = 0,$$

(1) On a l'habitude, en France, de considérer les nombres de Bernoulli comme les coefficients successifs du développement de $\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}$, par la formule

$$\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = 1 - B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} - \dots$$

D'autres auteurs écrivent au contraire

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_1^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

et, par suite,

$$\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = 1 - B_2 \frac{x^2}{2!} + B_4 \frac{x^4}{4!} - \dots$$

C'est la notation employée dans cet article, et le lecteur est prié de ne pas l'oublier.

qui était jusqu'ici la plus avantageuse pour le calcul des nombres B.

Nous allons la transformer, et en déduire d'autres qui permettent d'abrégier notablement les calculs.

Posons $p = q + 1$. L'identité précédente devient

$$(1) \quad (B + 1)^{q+1} B^q - B^{q+1} (B - 1)^q = 0.$$

Puisque, pour $k > 0$, on a $B_{2k+1} = 0$, la relation (1) peut être remplacée par celle-ci

$$(2) \quad (B + 1)^{q+1} B^q + B^{q+1} (B + 1)^q = 0,$$

ou

$$(2') \quad B^q (B + 1)^q (2B + 1) = 0,$$

car, seuls, les coefficients des B_{2k+1} y sont altérés.

Remplaçons q par $q - 1$ dans (2') et retranchons la nouvelle relation multipliée par 2 de la précédente; il vient

$$(3) \quad B^{q-1} (B + 1)^{q-1} (2B + 1) (B + 2) (B - 1) = 0 \quad (1).$$

Désignons le premier membre par $F(B)$; on voit aisément que

$$F(B) = -B^{2q+1} F\left(\frac{1}{B}\right),$$

ce qui prouve que dans cette relation développée et ordonnée suivant les indices croissants, les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires. C'est là un premier avantage sur la formule de Stern, car le nombre des coefficients à calculer est réduit de moitié. Même, lorsque q est pair, les termes équidistants des extrêmes

(1) Il est important de remarquer qu'il faut, dans ces identités symboliques, effectuer *tous* les produits avant de remplacer les exposants par des indices. Pour qu'un produit symbolique soit nul, il ne faut pas qu'un de ses facteurs le soit.

ont des indices de même parité, et le terme du milieu est nul, de sorte que le nombre des coefficients utiles est réduit au quart, puisque les coefficients des B_{2k+1} ne doivent pas figurer dans les formules, sauf pour B_1 .

Le développement de la relation (3) n'est pas très utile. En effet, si l'on examine attentivement la genèse de cette relation, on observe que les coefficients qui y figurent sont de la forme

$$(C_{q+1}^i + C_q^i) - 2(C_{q-2}^i + C_{q-1}^i),$$

et que, par suite, ils peuvent se calculer *par un triangle analogue à celui de Pascal*. Nous écrivons ci-dessous les premières lignes de ce triangle, en marquant en caractères plus gros les coefficients utiles.

$$(1) \quad \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & -3 & & & \\ 2 & 5 & 0 & -5 & & \\ 2 & 7 & 5 & -5 & & \\ 2 & 9 & 12 & 0 & & \\ 2 & 11 & 21 & 12 & -12 & \\ 2 & 13 & 32 & 33 & 0 & \\ 2 & 15 & 45 & 65 & 33 & -33 \\ 2 & 17 & 60 & 110 & 98 & 0 \\ 2 & 19 & 77 & 170 & 208 & 98 & -98 \\ 2 & 21 & 96 & 247 & 378 & 306 & 0 \end{array}$$

Pour la raison indiquée plus haut, la relation (3) n'est réellement intéressante que si q est pair. C'est pourquoi nous ne porterons notre attention que sur les rangées paires du Tableau. Elles fournissent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 3(B_2 - B_1) &= 2, \\ 5(B_4 - B_2) &= 2B_1 = -1, \\ 9(B_6 - B_4) &= 0, \\ 13(B_{12} - B_6) + 33(B_{10} - B_8) &= 0, \\ 17(B_{16} - B_8) + 110(B_{14} - B_{10}) &= 0, \\ 21(B_{20} - B_{10}) + 247(B_{18} - B_{12}) + 306(B_{16} - B_{14}) &= 0. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une identité qui offre les mêmes avantages pour les valeurs impaires de q , nous partons de l'identité de Stern

$$(B + 1)^{q+3} B^q - (B - 1)^q B^{q+3} = 0.$$

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, nous en déduisons successivement

$$(B + 1)^{q+3} B^q + (B + 1)^q B^{q+3} = 0$$

ou

$$(5) \quad B^q (B + 1)^q (B^2 + B + 1) (2B + 1) = 0;$$

puis, en remplaçant q par $q - 1$ et en retranchant deux fois cette nouvelle égalité,

$$(6) \quad B^{q-1} (B + 1)^{q-1} (B + 2) (2B + 1) (B^2 - 1) = 0.$$

Cette formule présente la même symétrie que la relation (3), et ses coefficients, dont l'expression générale est la suivante

$$(C_{q+3}^i + C_q^i) - 2(C_{q+2}^{i-2} + C_{q-1}^{i-2}),$$

se calculent aisément par un triangle arithmétique, dont voici les premières rangées :

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 5 & 2 & -2 & & \\ 2 & 7 & 7 & 0 & & \\ 2 & 9 & 14 & 7 & -7 & \\ 2 & 11 & 23 & 21 & 0 & \\ 2 & 13 & 34 & 44 & 21 & -21 \\ 2 & 15 & 47 & 78 & 65 & 0 \\ 2 & 17 & 62 & 125 & 143 & 65 & -65 \\ 2 & 19 & 79 & 187 & 268 & 208 & 0 \end{array} \right.$$

(195)

On a ainsi

$$\begin{aligned}7(B_6 - B_2) &= -1, \\11(B_{10} - B_4) + 21(B_8 - B_6) &= 0, \\15(B_{14} - B_6) + 78(B_{12} - B_8) &= 0, \\19(B_{18} - B_8) + 187(B_{16} - B_{10}) + 208(B_{14} - B_{12}) &= 0.\end{aligned}$$

Observons encore cette particularité, que si l'on retranche une ligne du triangle (I) de celle qui a même rang dans le triangle (II), on obtient la ligne suivante de (I). La soustraction des identités (3) et (6) en fournit immédiatement la raison.

Clausen et Staudt ont énoncé, concernant les nombres de Bernoulli, le beau théorème suivant : Si l'on désigne par A_q un nombre entier, et par $2, b, c, \dots, l$ tous les nombres premiers qui surpassent de 1 les diviseurs de q , on a

$$B_q = A_q - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \dots - \frac{1}{l}.$$

Si nous remplaçons dans les égalités trouvées plus haut les nombres B en fonction des nombres A, nous trouvons des égalités qui ne diffèrent des précédentes que par le terme indépendant, et qui sont extrêmement avantageuses pour le calcul des nombres A, parce que ceux-ci sont entiers. Il est inutile d'écrire les premières, car on sait que

$$A_0 = A_2 = A_4 = \dots = A_{12} = 1; \quad A_{2q+1} = 0.$$

Voici les suivantes :

$$\begin{aligned}15(A_{14} - A_6) &= 15; \\17(A_{16} - A_8) + 110(A_{14} - A_{10}) &= -9; \\19(A_{18} - A_8) + 187(A_{16} - A_{10}) + 208(A_{14} - A_{12}) &= -56.\end{aligned}$$

La détermination des termes indépendants n'est

guère laborieuse, et l'on y rencontre cette vérification que le résultat doit être toujours un nombre entier.

[J3a]

SUR UN PROBLÈME PARTICULIER DE VARIATIONS ;

PAR M. GEORGES VALIRON.

Considérons une intégrale de la forme

$$(1) \quad I = \int_a^b f(x, y') dx$$

et supposons que l'on cherche, parmi les courbes $y = \varphi(x)$ joignant deux points, A d'abscisse a , B d'abscisse b , et ayant une tangente en chaque point, celles rendant l'intégrale minimum. En supposant que la fonction $f(x, y')$ admet des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre, on trouve que les courbes Γ répondant à la question doivent vérifier l'équation d'Euler,

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y') = k,$$

k étant une constante (voir le *Traité d'Analyse* de M. Goursat, t. III, p. 554). Il existe d'autres conditions nécessaires, notamment celle de Weierstrass (Goursat, p. 597), et l'on obtient aussi des conditions suffisantes. Je voudrais montrer rapidement ici que l'on a immédiatement, dans le cas particulier de l'intégrale (1), une condition suffisante pour le minimum, plus commode que celle de Weierstrass [et qui coïncide

d'ailleurs avec la condition nécessaire lorsque $f(x, y')$ est une fonction simple].

Soit Γ une courbe extrémale joignant les deux points A, B, c'est-à-dire une courbe vérifiant l'équation d'Euler (2). Si l'on désigne par G une autre courbe $y = \psi(x)$ joignant AB et admettant une tangente dont le coefficient angulaire sera désigné par Y' , on aura

$$(3) \quad \int_a^b (Y' - y') \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y') dx \\ = \int_a^b (Y' - y') k dx = [(Y - y)k]_a^b = 0$$

(y' désigne le coefficient angulaire de la tangente à Γ). La variation de l'intégrale I, lorsqu'on passe de la courbe G à l'extrémale Γ , pourra donc s'écrire sous la forme

$$\int_a^b E(x, y', Y') dx$$

en posant

$$E(x, y', Y') = f(x, Y') - f(x, y') - (Y' - y') \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y').$$

On voit qu'il suffit que, quel que soit Y' , la fonction $E(x, y', Y')$ soit positive tout le long de l'arc d'extrémale Γ joignant AB pour que cet arc donne un minimum, qui est minimum absolu.

La recherche du signe de $E(x, y', Y')$ se ramène à l'étude de la courbe que M. Hadamard appelle la *figurative*. On peut même, ici, introduire une *surface figurative*, ce sera la surface S dont l'équation, dans un système d'axes $Oxyz$, est

$$z = f(x, y),$$

$f(x, y')$ étant la fonction qui entre dans l'intégrale (1). En donnant à x une valeur constante, on obtient

dans S une section plane C_x , qui est la figurative de M. Hadamard. Prenons sur cette courbe le point M_x tel que $y = y'$, y' étant toujours la pente de la tangente à l'extrémale Γ au point d'abscisse x ; la tangente T_x à C_x au point M_x a pour équation, dans le plan C_x ,

$$z - f(x, y') - (y - y') \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y') = 0.$$

L'expression $E(x, y', Y')$ est donc positive et l'est seulement si la courbe C_x est au-dessus de sa tangente T_x , et cela pour chaque point x compris entre a et b . Lorsque x varie de a à b et que y' vérifie l'équation (2) des extrémales, la direction de la tangente T_x reste fixe, parallèle à la direction Δ de pente k du plan zOy . Le point M_x décrit donc une partie du contour apparent Γ' de S parallèlement à la direction Δ . Il suffit que le long de l'arc de Γ' correspondant à l'arc Γ de l'extrémale joignant AB, le contour apparent soit le contour *apparent inférieur* (c'est-à-dire que les tangentes à S parallèles à Δ laissent la surface au-dessus d'elles), pour que l'extrémale donne un minimum absolu.

Il est clair que, en général, le contour apparent inférieur Γ'' , s'il existe, sera formé de plusieurs arcs de courbes, par exemple un arc D'E sera contour apparent inférieur pour x compris entre d et e , puis un arc E'F sera contour apparent pour x compris entre e et f , la tangente T_e relative à la courbe C_e touchant cette courbe en deux points au moins. Au point $x = e$, la valeur de y' aura une discontinuité par saut brusque. A un tel contour Γ'' discontinu correspondra encore une courbe continue Γ formée d'arcs de courbes vérifiant (2) avec la même valeur de k , y' étant discontinu en un nombre fini de points. Or, il est manifeste que

l'intégrale (3) reste nulle lorsque Y' et y' ont un nombre fini de discontinuités pourvu que Y et y soient continus et soient égaux pour a et b et pourvu que $\frac{df}{dy'}$ soit constant. La courbe Γ donne donc encore le minimum absolu des intégrales I correspondant à des courbes joignant ses extrémités lorsqu'on se borne à considérer des courbes sur lesquelles y' est continu ou n'a qu'un nombre fini de discontinuités. Dans un tel cas, une courbe sur laquelle y' serait continu ne pourrait donner le minimum. On voit ainsi apparaître, bien simplement, dans le cas des intégrales de la forme (1), la nécessité où l'on se trouve d'introduire des solutions discontinues pour résoudre certains problèmes de variations.

Lés abscisses a et b étant données, si pour une valeur de la constante k la courbe Γ'' existe, on pourra joindre par une courbe Γ donnant le minimum deux points A et B d'abscisses a et b , dont la différence des ordonnées est égale à

$$\int_a^b y' dx,$$

c'est-à-dire est l'aire σ_k de la portion du plan xOy limitée dans le système d'axes liés à S par Ox , les droites $x = a$, $x = b$, et la projection de Γ'' sur Oxy .

Lorsqu'on fait varier k de $-\infty$ à $+\infty$ (ou entre les limites des valeurs dont est susceptible $\frac{df}{dy'}$ lorsque y' satisfait aux conditions imposées par le problème), l'aire σ_k varie entre certaines limites. Il suffira que la différence des ordonnées de A et B soit comprise entre ces limites pour qu'on soit certain que le problème est possible.

Le lecteur appliquera aisément ces considérations au problème de Newton (Goursat, p. 658) et à des problèmes analogues.

[L'16]

SUR UN THÉORÈME CLASSIQUE DE DANDELIN ;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

La figure relative au théorème de Dandelin sur les sections planes du cône de révolution, que contiennent tous les Traités de Géométrie, nous semble particulièrement suggestive. La méthode employée par Hermary pour déterminer les contacts des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre (¹), appliquée à cette figure, nous a conduit aux résultats suivants dont certains sont peut-être inédits.

1. Considérons un cône de révolution de sommet D coupé par un plan (P) qui, pour fixer les idées, rencontre toutes les génératrices. La section obtenue est une conique (Γ), (ellipse ou hyperbole), dont les sommets S, S' sont situés sur deux génératrices contenues dans un plan avec l'axe du cône et la perpendiculaire DH au plan (P). Les foyers F, F' de cette

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1879, p. 138. Cette méthode nous a conduit déjà à de curieux résultats qui complètent ou généralisent ceux de nos devanciers MM. Neuberg, Königs (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, p. 233-241; 1922, p. 128-134; *Mathesis*, 1922, p. 16-18).

conique sont les contacts, sur le plan (P), de deux sphères de centres I, I_d inscrites au cône. De plus, $SS' = TT'$, T, T' étant les contacts d'une génératrice avec les sphères I, I_d . Enfin les plans (Π), (Π_d), déterminés par les cercles de contact du cône D avec les sphères I, I_d , rencontrent le plan (P) suivant deux droites Δ , Δ' , directrices de la conique (Γ).

Ces résultats sont classiques. Si d , r , r_d désignent la distance Π_d et les rayons des sphères, on a

$$\overline{SS'}^2 = \overline{TT'}^2 = d^2 - (r_d - r)^2,$$

et

$$\overline{FF'}^2 = d^2 - (r_d + r)^2.$$

Le petit axe BB' de l'ellipse, ou l'axe non transverse de l'hyperbole, est donc tel que

$$(1) \quad \overline{BB'}^2 = \overline{SS'}^2 - \overline{FF'}^2 = 4rr_d \quad (1).$$

2. Soit une génératrice quelconque DM du cône limitée à la conique (Γ) en M, qui touche en T, T' les sphères I, I_d . Le plan (p), tangent au cône suivant DM, a pour trace sur le plan (P) une tangente t à (Γ) en M.

Une sphère étant inscrite dans un dièdre, si l'on ferme le dièdre dans le sens convenable, de manière à *écraser* la sphère, les points de contact de la sphère avec les faces du dièdre viennent en coïncidence. En rabattant le plan (p) autour de t , sur le plan (P), de manière à *écraser* la sphère I, la génératrice DTM tourne autour de M et le contact T de DM avec la sphère vient coïncider avec le foyer F. Cette génératrice prend donc une position

$$D_1MF \quad \text{et} \quad D_1F = DT = \text{const.},$$

(¹) Cette relation a été obtenue autrement par M. J. Neuberger (*Mémoire sur le tétraèdre*, p. 23).

lorsque M varie sur la conique (Γ) . Le rabattement D_1 de D décrit par suite une circonférence fixe (Σ) , de centre F , de rayon DT .

Pareillement, si l'on rabat le plan (p) autour de t , sur le plan (P) de façon à *écraser* la sphère I_d , on obtient une circonférence (Σ') , de centre F' , de rayon DT' , lieu du rabattement D_2 de D sur le plan (P) .

Remarques. — Lorsque le point M varie sur la conique (Γ) , la somme ou la différence des rayons des circonférences (Σ) , (Σ') est égale à

$$DT' \pm DT = TT' = SS',$$

suivant que (Γ) est une hyperbole ou une ellipse.

Si (Γ) est une parabole, (Σ') dégénère en une droite à l'infini perpendiculaire à l'axe de la courbe; (Σ) a pour centre le foyer de cette parabole.

Dans les rabattements du sommet D , l'angle (DM, t) se rabat en vraie grandeur suivant deux angles égaux

$$(t, MF) = (t, MF') = (t, DM).$$

Ainsi apparaît cette propriété fondamentale des coniques :

La tangente en un point quelconque bissecte l'angle des rayons vecteurs en ce point.

Enfin si δ désigne le pied de la perpendiculaire $D\delta$ sur t , $D\delta = \delta D_1 = \delta D_2$. Le triangle D_1DD_2 est rectangle en D ; H est un point de SS' , et

$$\overline{HD_1} \cdot \overline{HD_2} = \overline{DH}^2 = \text{const.},$$

lorsque M décrit (Γ) . Les deux circonférences (Σ) , (Σ')

se correspondent dans une inversion de centre H et de module \overline{DH}^2 (1).

Les propriétés précédentes s'appliquent à un tétraèdre ABCD. Les angles trièdres de ce solide sont en effet circonscrits chacun à un cône de même sommet que ces angles, lequel est coupé par la face opposée suivant une conique (Γ). On retrouve ainsi cette propriété due à Hermary et à M. Neuberg :

Si l'on rabat en D_1, D_2, D_3 et D'_1, D'_2, D'_3 le sommet D d'un tétraèdre ABCD autour des arêtes BC, CA, AB sur le plan (P) de la face ABC, de façon à écraser les sphères inscrite I et exinscrite I_a , les centres des cercles $D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3$ coïncident avec les foyers F, F' de (Γ), c'est-à-dire avec les contacts des sphères I, I_a sur le plan (P).

3. La conique (Γ) étant donnée, il existe une infinité de cônes de révolution qui contiennent cette conique. Le lieu du sommet D de ces cônes est une focale (Γ') de (Γ). Si r, r_a désignent encore les rayons des sphères I, I_a inscrites au cône variable D qui touchent le plan (P) de (Γ), le produit rr_a reste constant et égal au carré de la moitié du petit axe BB' de (Γ), d'après la relation (1).

Cette remarque suffit à déterminer l'enveloppe de l'axe DII_a du cône variable [enveloppe qui n'est autre que (Γ')], et à montrer que la sphère de diamètre II_a passe en S, S', sommets de (Γ). On en conclut aussi que les projections orthogonales de S, S' sur II_a décrivent une circonférence concentrique à (Γ).

A chaque position du cône D correspondent deux

(1) Nous avons déjà signalé cette inversion, ainsi que M. Neuberg. Le module donné ici est peut-être nouveau.

circonférences (Σ) , (Σ') , de centres fixes F , F' , dont la somme ou la différence des rayons reste constante et égale au grand axe SS' de (Γ) .

Lorsque D est en F , (Σ) se réduit à son centre F , (Σ') a pour rayon SS' et se confond avec le *cercle directeur* de centre F' . Si D est en F' , (Σ) est l'autre cercle directeur. (Σ) , (Σ') sont alors les cercles directeurs de la conique (Γ) avec leur propriété fondamentale d'être les lieux géométriques des symétriques des foyers F , F' par rapport à une tangente variable.

Ces cercles (Σ) , (Σ') sont peut-être nouveaux; ils constituent en tout cas une extension de la notion de *cercles directeurs* des coniques.

4. Pour terminer cette Note, voici une démonstration très simple, de théorèmes sur le tétraèdre, qui apparaît nettement sur la figure relative au théorème de Dandelin. Désignons par I , I_a , I_b , I_c , I_d , I_1 , I_2 , I_3 les centres des sphères inscrite, exinscrites dans les trièdres tronqués et des combles d'un tétraèdre $ABCD$. En joignant deux par deux ces huit centres on détermine 28 droites.

Soient ω le milieu du segment Π_d par exemple et α , β , γ , δ les projections orthogonales de ce point sur les plans des faces BCD , CDA , DAB , ABC du tétraèdre. δ coïncide avec le centre de la conique (Γ) , section plane du cône D inscrit au trièdre de même sommet, par le plan de la face ABC . α , β , γ , qui appartiennent aux génératrices de contact du cône D avec les plans des faces du trièdre de sommet D , sont situés dans un plan équidistant des plans (Π) , (Π_d) déterminés par les contacts des sphères I , I_d sur le cône. Or, (Π) , (Π_d) rencontrent le plan ABC suivant les directrices de la conique (Γ) , droites également distantes de δ . Le

plan $\alpha\beta\gamma$ contient donc aussi le point δ . De plus, ce plan $\alpha\beta\gamma\delta$, parallèle aux plans (Π) , (Π_d) , est perpendiculaire à la droite $D\Pi_d$. D'où ces théorèmes obtenus par le calcul ou moins directement par leurs auteurs :

Les points milieux des 28 droites qui joignent deux par deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient les arêtes du tétraèdre (BELTRAMI, *N. A.*, 1863, p. 336).

Les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un de ces points milieux sur les plans des faces du tétraèdre sont dans un même plan (SARTIAUX, *N. A.*, 1867, p. 367).

Les plans qui contiennent les projections du milieu de la droite de deux centres est d'ailleurs perpendiculaire à cette droite (FONTENÉ, *N. A.*, 1909, p. 57).

[O'8a]

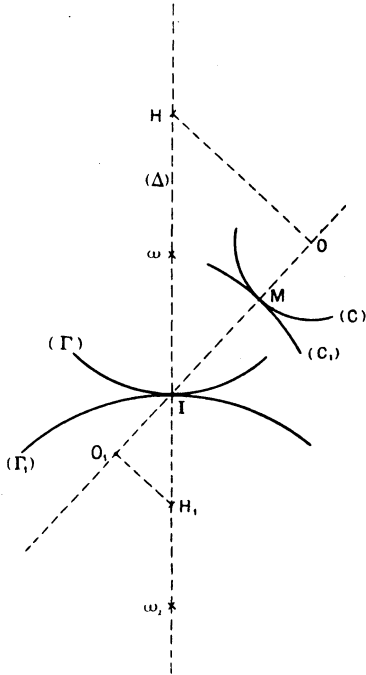
A PROPOS DE LA FORMULE D'EULER-SAVARY ;

PAR M. JOSEPH PÉRÈS.

Il y a bien des manières d'établir la formule, dite d'Euler-Savary, qui détermine le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe, invariable de forme et se déplaçant dans son plan ⁽¹⁾. J'indique ici une démonstration, qui m'a paru assez intéressante.

⁽¹⁾ Signalons en particulier la démonstration de M. Kœnigs (*Bull. des Sc. math.*, 1907) qui justifie d'abord, par un raisonnement direct très élégant, la *construction* de Savary.

Fixons d'abord les notations. Soit (P) un plan qui se meut en glissant sur un plan fixe (P_1) et soient (Γ_1) et (Γ) la base et la roulante du mouvement. A un instant donné, ces deux courbes se touchent au centre



instantané de rotation correspondant, I ; nous nommerons (Δ) leur normale commune en I , ω , et ω leurs centres de courbure. Une courbe (C) du plan (P) enveloppe, dans le plan (P_1) , une courbe (C_1) et, à l'instant considéré, ces deux courbes se touchent en des points tels que M , IM étant normale commune en M à (C) et (C_1) ; nous nommerons O et O_1 les centres de courbure de (C) et (C_1) en M .

Envisageons alors une règle qui, à chaque instant, est disposée suivant IM , un point bien déterminé de cette règle (le milieu par exemple) étant en I ; étudions le mouvement de cette règle par rapport à (P) et par rapport à (P_1) .

Il est évident, d'après les propriétés les plus simples du centre instantané de rotation, que les centres instantanés correspondants sont en H et H_1 , points de rencontre de (Δ) avec les normales en O et O_1 à la règle. Soient, à l'instant considéré, α et α_1 , les vitesses angulaires de la règle par rapport à (P) et par rapport à (P_1) , soit ζ la vitesse angulaire de (P) par rapport à (P_1) , soit enfin V la vitesse du point I sur (Γ) ou sur (Γ_1) . On a

$$V = \overline{IH} \cdot \alpha = \overline{IH_1} \cdot \alpha_1,$$

et ces formules ont lieu en grandeur et en signe, pourvu que l'on ait choisi le sens positif des rotations, le sens positif sur (Δ) et, pour mesurer V , le sens positif convenable. On peut donc écrire

$$V = \frac{\alpha}{\frac{1}{\overline{IH}}} = \frac{\alpha_1}{\frac{1}{\overline{IH_1}}} = \frac{\zeta}{\frac{1}{\overline{IH_1}} - \frac{1}{\overline{IH}}},$$

ce qui montre que la quantité

$$\frac{1}{\overline{IH_1}} - \frac{1}{\overline{IH}}$$

(dont on retrouve ainsi la signification cinématique simple) est indépendante de la courbe (C) choisie.

En prenant pour courbe (C) la courbe (Γ) , il vient enfin, d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\overline{IH_1}} - \frac{1}{\overline{IH}} = \frac{1}{\overline{I\omega_1}} - \frac{1}{\overline{I\omega}}$$

et il suffit de prendre sur IM un sens positif et de nommer θ l'angle des deux directions positives choisies sur IM et (Δ) pour en conclure la relation d'Euler-Savary :

$$\cos \theta \left(\frac{I}{IO_1} - \frac{I}{IO} \right) = \left(\frac{I}{I\omega_1} - \frac{I}{I\omega} \right).$$

**ÉTUDE D'UN PROBLÈME PARTICULIER
OU INTERVIENT LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT ;**

PAR M. R. THIRY

(Strasbourg).

1. C'est un fait bien connu que les lois ordinaires du frottement sont insuffisantes pour expliquer les phénomènes naturels et qu'on est exposé, en les appliquant aux équations générales de la mécanique, à des impossibilités ou à des indéterminations (¹).

Le présent article ne prétend donc pas signaler quelque chose de nouveau, mais simplement reprendre ces faits déjà connus sur un exemple dont le développement analytique peut présenter quelque intérêt.

2. Le problème que nous considérons est le suivant :

Un corps solide pesant est en contact par deux de ses points A et B avec deux droites fixes Ox et Oy (Oy vertical et dirigé vers le haut, Ox horizontal), le long desquelles les points peuvent glisser avec

(¹) Voir pour les références, APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 123.

frottement. Le coefficient de frottement f est le même pour les deux droites et a une valeur inférieure à l'unité. Les données du problème sont symétriques par rapport au plan xOy et les liaisons sont bilatérales. Le solide est lâché sans vitesse initiale en une position telle que A et B soient sur les parties positives des axes. Nous nous proposons d'étudier s'il y a équilibre ou mouvement.

Pour traiter ce problème, deux méthodes se présentent à nous; nous pouvons chercher les conditions pour qu'il y ait équilibre, ou celles pour qu'il y ait mouvement. Dans un grand nombre de cas simples, ces deux études se complètent, les inégalités trouvées s'excluent mutuellement et l'on arrive ainsi à une solution satisfaisante du problème.

Or, précisément ici il n'en est pas ainsi.

3. Étudions tout d'abord les *conditions pour qu'il y ait équilibre*. C'est là un problème très simple dont la solution est tout à fait classique (¹). Nous supposons (pour avoir un cas précis de figure, mais cette restriction n'a rien d'essentiel) que l'angle aigu de la droite AB dans sa position initiale avec la verticale est compris entre l'angle de frottement φ et son complément $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Nous considérerons alors les droites issues de A et de B faisant respectivement avec les normales à Ox et à Oy en ces points des angles égaux à $\pm \varphi$. Ces quatre droites formeront un quadrilatère. S'il y a équilibre, les réactions de Ox et de Oy se coupent à l'intérieur du quadrilatère et la verticale du point G, centre de gravité du corps, doit passer par leur point

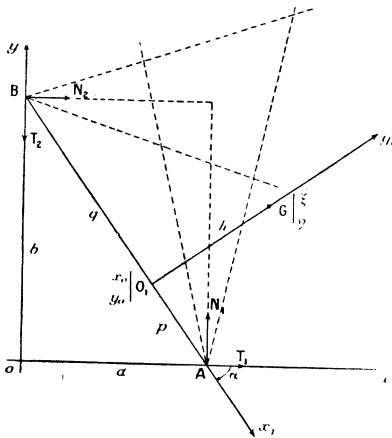
(¹) Voir également le Traité de M. Appell, t. I, p. 305.

de rencontre. Inversement, si la verticale de G traverse le quadrilatère, on peut transporter le poids le long de sa propre direction en un point D intérieur au quadrilatère et le décomposer en deux forces suivant DA et DB, forces qui seront détruites par les réactions de Ox et de Oy .

Il semble donc assuré que la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que la verticale de G traverse le quadrilatère en question.

4. Cherchons au contraire les *conditions pour qu'il y ait mouvement*. Pour cela nous attacherons au corps solide deux axes de coordonnées O_1x_1 et O_1y_1 ,

Fig. 1.



l'axe O_1x_1 coïncidant en position et en direction avec BA, le centre de gravité G se trouvant sur O_1y_1 . (fig. 1) (1).

(1) De telle sorte que l'angle $x_1O_1y_1$ ait même sens que l'angle xOy .

Nous poserons

$$\overline{O_1A} = p, \quad \overline{O_1B} = q$$

(ce qui entraîne $p > q$ et $\overline{BA} = l = p - q$)

$$\overline{O_1G} = h, \quad \widehat{Ox, O_1x_1} = \alpha \quad \left(\text{ici } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \right).$$

Soient de plus x_0 et y_0 les coordonnées du point O_1 , et ξ et η celles de G par rapport au premier système d'axes.

Les formules de transformation de coordonnées s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = y_0 + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Les conditions géométriques exprimant que A et B sont sur Ox et Oy se traduisent par les équations

$$\begin{aligned} 0 &= y_0 + p \sin \alpha, \\ 0 &= x_0 + q \cos \alpha, \end{aligned}$$

et les formules (1) peuvent s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} x = (x_1 - q) \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = (x_1 - p) \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

En particulier, on aura

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = -q \cos \alpha - h \sin \alpha, \\ \eta = -p \sin \alpha + h \cos \alpha. \end{cases}$$

On en déduira pour la vitesse et l'accélération de G

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = [q \sin \alpha - h \cos \alpha] \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{d\eta}{dt} = [-p \cos \alpha - h \sin \alpha] \frac{d\alpha}{dt}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = [q \sin \alpha - h \cos \alpha] \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \xi \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = [-p \cos \alpha - h \sin \alpha] \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \eta \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2. \end{cases}$$

Si nous appelons T_1, N_1, N_2, T_2 les projections sur les axes Ox et Oy des réactions en A et B (*fig. 1*), le théorème du mouvement du centre de gravité, celui des moments des quantités de mouvement autour du centre de gravité, joints aux lois du frottement donneront les équations

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} m[-l \sin \alpha - \eta] \alpha'' - m \xi \alpha'^2 = T_1 + N_2, \\ m[-l \cos \alpha + \xi] \alpha'' - m \eta \alpha'^2 = N_1 + T_2 - mg, \\ mk^2 \alpha'' = (l \cos \alpha - \xi) N_1 + \eta T_1 - \xi T_2 + (l \sin \alpha + \eta) N_2, \\ T_1 = \varepsilon_1 f N_1, \\ T_2 = \varepsilon_2 f N_2, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles k désigne le rayon de giration du corps autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure mené par le centre de gravité et ε_1 et ε_2 des quantités égales à ± 1 .

Si nous éliminons entre ces équations T_1, N_1, T_2, N_2 , nous aurions une équation différentielle fournissant α en fonction de t ; on sait, d'après les théorèmes d'existence, qu'une telle équation admet une solution bien déterminée si l'on se donne à l'avance les valeurs initiales de α et de α' . Dans le cas qui nous occupe, la valeur initiale de α' est nulle puisqu'on part du repos.

Mais la solution ainsi fournie par les équations (6) ne sera acceptable au point de vue mécanique que si les composantes tangentielles des réactions qu'elles permettent de calculer après coup sont dirigées en sens contraire des vitesses des points A et B. Or le sens de ces vitesses au départ dépend évidemment du signe de α'' (puisque ici α' est nul) et l'on voit immédiatement que ces conditions de validité mécanique s'expriment par les deux inégalités

$$(7) \quad \alpha'' T_1 < 0, \quad \alpha'' T_2 > 0.$$

En appelant a et b les longueurs OA et OB, respec-

tivement égales à $l \cos \alpha$ et $-l \sin \alpha$, on aura les équations, valables à l'instant initial,

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} -m\alpha''(\eta - b) = T_1 + N_2, \\ +m\alpha''(\xi - a) = N_1 + T_2 - mg, \\ mk^2\alpha'' = -(\xi - a)N_1 + \eta T_1 - \xi T_2 + (\eta - b)N_2 \quad (1), \\ T_1 = \varepsilon_1 f N_1, \\ T_2 = \varepsilon_2 f N_2, \end{array} \right.$$

et si l'on peut déterminer ε_1 et ε_2 de façon que ces équations entraînent les inégalités (7), on sera assuré que, tout au moins pendant le début du mouvement, la solution correspondante tirée des équations différentielles (6) sera acceptable au point de vue mécanique.

Un calcul facile permet de résoudre le système (8), je pense qu'il est inutile d'en transcrire les détails; on trouve tous calculs faits

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -g \frac{\Delta}{k^2 + \Sigma}, \\ N_1 &= \frac{mg}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2} \frac{H}{k^2 + \Sigma}, \\ N_2 &= \frac{mg}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2} \frac{K}{k^2 + \Sigma}, \\ T_1 &= \varepsilon_1 f N_1, \\ T_2 &= \varepsilon_2 f N_2, \end{aligned}$$

en posant pour abrégier

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2) \Sigma &= [\xi - a - \varepsilon_1 f \eta][\xi - a - \varepsilon_2 f(\eta - b)] \\ &\quad + [-\varepsilon_2 f \xi + \eta - b][\varepsilon_1 f(\xi - a) + \eta - b], \\ (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2) \Delta &= (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2) \xi - \varepsilon_1 f b - a, \\ H &= k^2 - (\eta - b)(\varepsilon_2 f \xi - \eta + b), \\ K &= -\varepsilon_1 f k^2 + (\eta - b)(\xi - a - \varepsilon_1 f \eta). \end{aligned}$$

(¹) On pourrait mettre dans ces équations des indices zéro pour préciser qu'il s'agit des valeurs initiales de α , α'' , T_1 , N_1 , T_2 , N_2 ; mais comme il ne sera plus question par la suite que de ces valeurs initiales, on peut supprimer les indices sans crainte de confusion.

Avec ces notations, les inégalités (7), débarrassées des facteurs positifs, prennent la forme

$$- \varepsilon_1 \cdot \Delta \cdot H < 0,$$

$$- \varepsilon_2 \cdot \Delta \cdot K > 0.$$

On voit donc que la validité des solutions dépend, en même temps que du choix des ε , de la position du point G par rapport à la droite $\Delta = 0$ et aux hyperboles $H = 0$ et $K = 0$. Il n'y a donc qu'à étudier le régionnement correspondant aux différents cas possibles.

On obtient, suivant les signes de ε_1 et de ε_2 ; quatre droites Δ qui sont, comme on le vérifie facilement, les quatre verticales issues des sommets du quadrilatère rencontré au paragraphe 3. On obtient aussi quatre hyperboles ayant une asymptote commune $\eta = b$ et pour seconde asymptote respectivement les côtés du quadrilatère en question.

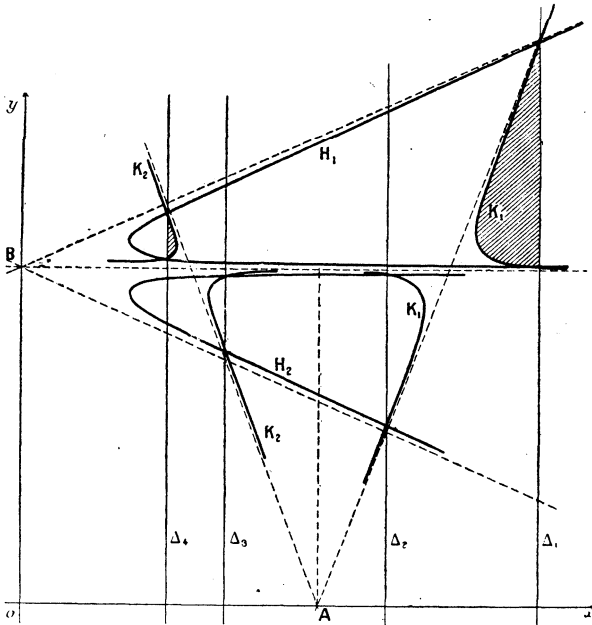
Les deux hyperboles H et K relatives à des valeurs données de ε_1 et ε_2 se coupent sur la droite Δ correspondante et le cercle $k^2 + \Sigma = 0$ passe également par ces deux points. Les points d'intersection de ces deux hyperboles ne sont pas nécessairement réels, mais ils le sont certainement, pour toutes les combinaisons de signe des ε si le rayon de giration k est assez petit.

En se plaçant dans ce cas et en se bornant à ce qui se passe à droite de l'axe Oy , on a la disposition indiquée dans la figure 2. Je note dans le tableau ci-dessous la correspondance des signes des ε avec les diverses courbes tracées.

	ε_1 .	ε_2 .			
I.....	+	+	Δ_1	H_1	K_1
II.....	+	-	Δ_2	H_2	K_1
III.....	-	-	Δ_3	H_2	K_2
IV.....	-	+	Δ_4	H_1	K_2

La discussion de réionnement dans chacun des quatre cas signalés dans ce tableau ne présente aucune difficulté de principe, mais comme elle est assez longue

Fig. 2.



je n'en donne pas le détail, qu'on rétablira facilement et qui met en évidence les particularités suivantes :

Si le point G se trouve en dehors des deux droites extrêmes Δ_1 et Δ_4 , le mouvement est possible et pour un seulement des quatre cas. Ceci est normalement ce que l'on devait attendre d'après les résultats du paragraphe 3.

Si le point G est entre les droites Δ_1 et Δ_4 , en général pas de mouvement possible, à moins qu'il ne se trouve

dans l'une ou l'autre des régions couvertes de hachures sur la figure 2.

Pour ces régions, deux mouvements sont possibles (les mouvements I et II pour la région de droite, III et IV pour la région de gauche).

§. En résumé, cette étude met donc en évidence des dispositions possibles du corps en question pour lesquelles trois éventualités, toutes trois également acceptables au point de vue mécanique, sont à envisager : deux mouvements différents ⁽¹⁾ et l'état d'équilibre.

Remarquons enfin pour terminer que ces particularités se présentent même pour de faibles valeurs du coefficient de frottement sous la seule condition que le rayon de giration k soit suffisamment petit.

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES
(CONCOURS DE 1919).**

**SOLUTION DE LA QUESTION
DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES ;**

PAR M. J. LEMAIRE.

1. *On donne un trièdre t de sommet A. Soient P, Q, R les projections orthogonales d'un point quel-*

(1) Si l'on étudie d'un peu plus près les deux mouvements possibles quand le centre de gravité est dans la région de droite par exemple, on trouve que pour ces deux mouvements, la composante normale de la réaction au point B est dirigée dans deux sens différents.

conque M sur les plans des faces de ce trièdre, AM' la droite menée par A , perpendiculairement au plan PQR ; soient P', Q', R' les projections orthogonales du point M' sur les plans des faces du même trièdre. Démontrer que le plan $P'Q'R'$ est perpendiculaire à AM . Les deux droites AM et AM' sont dites réciproques l'une de l'autre par rapport au trièdre t ; peuvent-elles être confondues?

2. On donne un tétraèdre T , de sommets A_1, A_2, A_3, A_4 , et un point M ; on construit la droite A_1M_1 réciproque de A_1M par rapport au trièdre $A_1(A_2A_3A_4)$ de sommet A_1 ; on construit de même la droite A_2M_2 réciproque de A_2M par rapport au trièdre $A_2(A_1A_3A_4)$, etc. Démontrer que les quatre droites $A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4$ concourent en un point M' .

Les deux points M et M' sont dits réciproques l'un de l'autre par rapport au tétraèdre T ; peuvent-ils être confondus?

3. Démontrer que les projections orthogonales des points M et M' sur les faces du tétraèdre sont des points situés sur une même sphère.

4. Si M se déplace sur un plan P quelconque, M' se déplace sur une surface qui passe par les six arêtes de T . Montrer que cette surface contient trois autres droites qui s'appuient chacune sur deux arêtes opposées de T et qui sont dans un même plan P' . Montrer que si l'on remplace le plan P par le plan P' , le plan P' est remplacé par le plan P .

5. Le tétraèdre T étant supposé régulier, on porte sur les deux arêtes opposées A_1A_2 et A_3A_4 des longueurs égales $A_1\alpha$ et $A_2\beta$, toutes deux de A_1 vers A_2

et de A_3 vers A_4 , ou toutes deux dans le sens opposé. On suppose que M décrive la droite $\alpha\beta$; quel est alors le lieu du milieu de MM' ?

1, 2 et 3. — Les trois premières parties de la question sont implicitement traitées, d'une façon élémentaire, dans la Géométrie de Rouché (*Géométrie dans l'espace*, septième édition, page 648). On peut aussi les établir comme il suit : de ce qu'il passe par quatre points une sphère et une seule, il résulte qu'il existe une quadrique de révolution et une seule, ellipsoïde allongé ou hyperboloïde à deux nappes, ayant un foyer donné, et tangente à quatre plans.

Désignons par (Σ) la quadrique de révolution, de foyer M , qui touche les plans formant le tétraèdre (T) : $A_1A_2A_3A_4$. Le plan isogonal au plan A_1A_2M par rapport au dièdre A_1A_2 passe au second foyer M' de (Σ) ; il en est de même des autres plans analogues : ces six plans ont donc un point commun. Deux tels points sont *reciproques*, ou *inverses*, par rapport au tétraèdre.

Pour qu'un point coïncide avec son inverse, il faut et il suffit qu'il soit commun aux bissecteurs de trois dièdres, intérieurs ou extérieurs, du tétraèdre, n'appartenant pas à un même trièdre : il y a donc en général huit tels points, qui sont les centres des sphères tangentes aux quatre plans, et ce nombre peut, comme on sait, se réduire à sept, six ou cinq.

Les projections des deux points inverses M et M' , foyers de (Σ) , sur les plans des faces de (T) , sont sur une même sphère (S) , ayant pour centre le milieu de MM' , et pour rayon le demi-axe focal de la quadrique.

Les produits des distances de M et M' aux plans

tangents à (Σ) , et en particulier aux plans des faces du tétraèdre, sont égaux; si x, y, z, t sont les coordonnées normales de M par rapport à (T) , x', y', z', t' celles de M' , on voit aisément que, suivant que x et x' sont, ou non, de même signe, il en est de même de y et y' , z et z' , t et t' , de sorte que, dans tous les cas, les coordonnées de deux points inverses satisfont aux relations

$$xx' = yy' = zz' = tt',$$

et réciproquement.

De ce qui précède, il résulte, en revenant aux notations de la première partie de l'énoncé, que si AM est une droite issue du sommet d'un trièdre, cette droite détermine, avec les arêtes, trois plans dont les isogonaux, par rapport aux dièdres correspondants, ont une droite commune, qu'on peut appeler la droite *reciproque*, ou *inverse*, de la première par rapport au trièdre.

Deux points quelconques, M et M' , de deux telles droites sont les foyers d'une quadrique de révolution tangente aux plans formant le trièdre, et sont inverses par rapport au tétraèdre constitué par ces trois plans et par un plan tangent arbitraire de la quadrique.

Considérons le cercle passant par les projections P, Q, R de M sur les plans des faces du trièdre; comme il appartient à la sphère (S) relative aux points M et M' , ainsi qu'à la sphère de diamètre AM , son plan est perpendiculaire à la droite des centres de ces sphères, laquelle joint les milieux de MM' et de MA , par suite aussi à la droite AM' .

Le plan $P'Q'R'$, déterminé par les projections de M' sur les plans des faces du trièdre, est de même perpendiculaire à AM ; il y a réciprocity entre les droites inverses AM et AM' . Pour que AM coïncide avec son

inverse AM' , il faut et il suffit que cette droite appartienne à deux plans bissecteurs de deux dièdres, intérieurs ou extérieurs, du trièdre; il y a donc quatre droites confondues avec leurs inverses, ce sont les bissectrices du trièdre.

Reprenant les notations de la deuxième partie, nous voyons qu'il suit de ce qui précède que les droites réciproques de A_1M , A_2M , A_3M , A_4M , par rapport aux trièdres correspondants de (T) , concourent au point M' inverse de M .

4. Examinons la position de M' quand M varie dans l'espace. D'abord, quand M n'appartient à aucun des plans formant le tétraèdre (T) , son inverse M' est parfaitement déterminé, et unique.

Tout point du plan de l'une des faces a pour inverse le sommet opposé à cette face; et l'inverse d'un sommet est indéterminé sur le plan de la face opposée. Si M appartient à une arête, son inverse est indéterminé sur l'arête opposée.

Transformée d'une droite : supposons que M parcourt une droite donnée (D) , les plans A_2A_3M' , A_3A_4M' , A_4A_2M' forment des faisceaux homographiques deux à deux, de sorte que M' décrit une cubique gauche (Δ) ; comme au point où (D) coupe le plan de chaque face de (T) correspond le sommet opposé, cette cubique est circonscrite au tétraèdre.

Si (D) rencontre une arête A_1A_2 , (Δ) se décompose en l'arête opposée A_3A_4 et en une conique située dans le plan isogonal au plan (A_1A_2D) par rapport au dièdre A_1A_2 , et passant en A_1 et A_2 .

Si (D) coupe deux arêtes opposées, la cubique se décompose en ces deux arêtes et une troisième droite qui les rencontre.

Transformée d'un plan : si M décrit un plan (P) , son inverse décrit une surface (Π) ; à une droite (D) correspond d'ailleurs une cubique gauche (Δ) ; (Π) et (D) ont autant de points communs que (P) et (Δ) , c'est-à-dire trois, de sorte que (Π) est une surface du troisième degré.

Comme au point où (P) coupe une arête de (T) correspond un point indéterminé de l'arête opposée, la surface (Π) contient les six arêtes du tétraèdre. Q et R désignant les points où (P) coupe deux arêtes opposées, à la droite QR du plan correspond sur (Π) une autre droite rencontrant aussi ces deux arêtes : la surface (Π) possède trois droites analogues.

Soient L, L', L'' les trois droites de (P) analogues à $QR, \Lambda, \Lambda', \Lambda''$ les droites correspondantes de (Π) . Les droites L et L' ayant un point commun, leurs inverses ont en commun le point inverse; $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ se coupent donc deux à deux; et comme les trois droites de (P) se coupent deux à deux en trois points distincts, il en est de même des trois droites de (Π) , qui se coupent deux à deux aux points inverses des précédents; donc $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ sont dans un même plan (P') et il y a évidemment réciprocité entre les deux plans : au plan (P') correspond une surface (Π') qui contient les trois droites L, L', L'' du plan (P) .

Si (P) est le plan de l'infini, la surface inverse (Π) devient une surface du troisième ordre particulière, qui est le lieu des foyers des paraboloides de révolution tangents aux plans des faces du tétraèdre, c'est-à-dire des points dont les projections sur ces plans appartiennent à un même plan.

5. Considérons un tétraèdre Θ dans les arêtes opposées sont égales deux à deux; on voit fort aisément

que ses faces sont égales, ainsi que ses hauteurs, et par suite aussi les quatre angles que font deux arêtes opposées avec les faces qu'elles joignent respectivement; toute droite joignant les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à ces arêtes, et est un axe de symétrie pour le tétraèdre; signalons aussi l'égalité des dièdres ayant pour arêtes deux arêtes opposées de Θ . $A_1 A_2 A_3 A_4$ étant un tel tétraèdre, prenons pour sens positif, sur $A_1 A_2$, le sens de A_1 vers A_2 , et sur $A_3 A_4$, le sens de A_3 vers A_4 , et soient sur ces droites deux points α et β tels que

$$\overline{A_1 \alpha} = \overline{A_3 \beta};$$

si le plan isogonal de $A_3 A_4 \alpha$ par rapport au dièdre $A_3 A_4$ coupe en α' l'arête $A_1 A_2$, les produits $\overline{\alpha P_1} \cdot \overline{\alpha' P_1}$ et $\overline{\alpha P_2} \cdot \overline{\alpha' P_2}$ des mesures algébriques des distances des points α et α' aux plans des faces opposées à A_1 et A_2 sont égaux; par suite, $A_1 A_2$ faisant avec ces plans des angles égaux, on a aussi

$$\overline{\alpha A_2} \cdot \overline{\alpha' A_2} = \overline{\alpha A_1} \cdot \overline{\alpha' A_1};$$

α et α' sont donc isotomiques par rapport à $A_1 A_2$; de même les points analogues β et β' sur $A_3 A_4$.

K et L étant les milieux de $A_2 A_3$ et $A_1 A_4$, la droite KL , perpendiculaire commune à ces arêtes, est un axe de symétrie pour le tétraèdre, donc pour α et β' , α' et β , de sorte que les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, qui sont inverses par rapport à Θ , sont symétriques par rapport à KL .

Le dièdre $A_1 A_4$ étant son propre symétrique par rapport à ce même axe, les plans isogonaux relativement à ce dièdre qui déterminent sur $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ deux points inverses M et M' sont, eux aussi, symétriques

par rapport à KL. Par conséquent, les points M et M' le sont eux-mêmes, la droite MM', quand M décrit $\alpha\beta$, reste perpendiculaire à KL, et le lieu du milieu de MM' est cette droite KL.

Ces conclusions s'appliquent en particulier au tétraèdre régulier.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad (x^2 + x) \frac{dy}{dx} + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0;$$

on pose

$$\cancel{x^2 - x + z^2 - z + 2z^2 - 2z}$$

$$y \rightsquigarrow x = \frac{1}{z}.$$

1° Former l'équation différentielle (E) à laquelle satisfait la fonction z de la variable x quand y est solution de l'équation différentielle (1).

2° Intégrer l'équation (E) et déduire de la solution générale de cette équation celle de l'équation (1).

3° Deux axes rectilignes Ox , Oy étant tracés dans un plan, montrer que les courbes intégrales de l'équation (1) passent toutes par deux points fixes A et B, à distance finie.

II. Les axes Ox , Oy , Oz étant rectangulaires :

1° Quelle est la courbe décrite, quand on fait varier t , par le point P de coordonnées

$$x_1 = \cos t,$$

$$y_1 = -\sin t,$$

$$z_1 = 1.$$

Que peut-on dire de la droite OP?

2° Soit (C) la courbe décrite, quand on fait varier t , par le point M de coordonnées

$$x = 1 + \frac{3}{2} \operatorname{tang}^2 t, \quad y = -\operatorname{tang}^3 t, \quad z = \frac{1}{\cos^3 t}.$$

Calculer les quantités directrices de la tangente MT à (C) au point M et vérifier que, pour toute valeur de t , MT est parallèle à OP.

3° Soit M' le point où la tangente MT perce le plan xOy . Calculer les coordonnées de M' en fonction de t . Montrer que M' décrit une parabole (π) et que MM' est normale à cette parabole en M'.

4° Construire la projection (C') de la courbe (C) sur le plan xOy .

5° Des résultats établis, que peut-on conclure :

α . Quant à la nature de (C) ?

β . Quant à la relation géométrique qui existe entre (C') et la parabole (π) ?

Peut-on déduire de là une définition géométrique simple de la courbe (C) ?

Indications pour la solution. — I. On trouve pour z l'équation

$$(x^2 + x)z'_x = 1 + z$$

et l'on en déduit pour y

$$y = \frac{x^2 + K}{x - K}.$$

II. La parabole (π) a l'équation

$$y^2 = 2x.$$

La courbe (C) est une hélice tracée sur le cylindre de génératrices parallèles à Oz et de section droite la développée de la parabole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer, pour $n = -1, 0, 1, 2$, la valeur de l'intégrale

$$\varphi(n) = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{nx^2 + 2x + 1}}.$$

2° Montrer que si n augmente indéfiniment par valeurs positives, $\varphi(n)$ a pour limite zéro.

Quelle est la partie principale de $\varphi(n)$ par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{n}$?

Que peut-on dire de la différence entre $\varphi(n)$ et sa partie principale ?

Indications :

$$1^\circ \quad \varphi(-1) = 0,785; \quad \varphi(0) = 0,504; \quad \varphi(1) = 0,404; \\ \varphi(2) = 0,368.$$

2° En écrivant l'intégrale sous la forme

$$\varphi(n)\sqrt{n} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{nx} + \frac{1}{nx^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

et en développant au second membre, on constate que $\varphi(n)$ a pour partie principale $\frac{L_2}{\sqrt{n}}$ et que l'on a

$$\varphi(n) = \frac{L_2}{\sqrt{n}} - \frac{11}{16n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\theta}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

(Caen, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Soit C la courbe d'intersection de deux surfaces S_1 et S_2 représentées, avec des axes rectangulaires d'origine O , par

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

1° Nature des surfaces S_1 et S_2 .

2° Construire les projections de C sur les plans $y = 0$ et $x = 0$.

3° Aire de la projection sur $x = 0$.

4° Volume et aire des diverses faces du solide limité par S_1 et S_2 .

5° m désignant la projection sur $z = 0$ d'un point M et θ étant l'angle xOm , exprimer en fonction de θ les coordonnées d'un point M de C .

6° On suppose que C est la trajectoire d'un point M mobile sous l'action d'une force F et que la vitesse angulaire de Om est une constante ω . Montrer que la force F rencontre une droite fixe parallèle à Oz.

7° On suppose que le point M de masse 1, non pesant, est mobile sans frottement sur C sous l'action d'une force dirigée de M vers O et d'intensité $k^2 \cdot OM$. Équation différentielle du mouvement, en supposant qu'à l'instant initial le mobile soit en O et que la vitesse initiale soit $2\lambda ak$. Nature du mouvement suivant la valeur de λ .

8° On suppose, dans 7°, $\lambda = \sqrt{2}$. Intégrer.

9° On suppose $\lambda = 2$. Trouver la loi du mouvement et la force exercée par C sur le point.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y'(y^3 - 3xy^2 - x^3) + y(y^2 + xy + x^2) = 0.$$

Construire la courbe

$$x = \frac{t^2}{(t-1)^3} e^{\frac{1-4t}{t(t-1)}}, \quad y = \frac{t^3}{(t-1)^3} e^{\frac{1-4t}{t(t-1)}}.$$

Nombre de points où la tangente est parallèle aux axes.

Points sur les axes, et tangentes en ces points.

Étude des branches infinies.

(Lyon, juillet 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Établir la formule de Cauchy qui transforme une certaine intégrale double étendue à une aire plane en une intégrale curviligne relative au contour de cette aire.

II. Une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires a pour équation $y = f(x)$. En un point quelconque M de C, on mène la normale MN et la perpendiculaire MH à Oz, N et H étant sur cet axe. On demande de trouver les équations des courbes C, pour lesquelles on a

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 + 2a \left(\frac{OH}{a} \right)^n \cdot MH,$$

a représentant une longueur donnée, n une constante.

On examinera en particulier le cas de $n = 1$; on tracera sommairement celle des courbes C qui passe par le point M_1 de l'axe Ox d'abscisse 1, et l'on calculera l'aire comprise entre la courbe et le segment OM_1 .

III. L'axe Oz étant la verticale descendante, on réalise la parabole d'équation

$$x^2 = 2pz.$$

Un élément matériel pesant de masse m est lancé sur la courbe qu'il ne peut quitter, la vitesse de passage au sommet étant v_0 .

1° Déterminer les quadratures qui permettent de calculer le mouvement de l'élément; quelle est l'allure de ce mouvement?

2° Quelle est la pression de la masse m sur la courbe?

3° Si l'élément est simplement posé sur la convexité de la courbe et est lancé à partir du sommet suivant la tangente, quelles sont les vitesses v_0 acceptables pour qu'il ne quitte pas la courbe; cas particulier où $v_0 = \sqrt{pg}$.

4° On suppose que la courbe, au lieu d'être fixe, tourne autour de son axe avec la vitesse angulaire constante ω ; reprendre, dans ce cas, la première question, indiquer la nature de la pression de la masse sur la courbe et la marche du calcul qui donnerait cette pression.

Solution. — II. L'équation différentielle des courbes C est

$$xy' - y = \frac{x^n}{a^{n-1}};$$

lorsque n est différent de l'unité, sa solution générale est

$$y = Cx + \frac{x^n}{(n-1)a^{n-1}};$$

dans le cas où $n = 1$, elle est

$$y = Cx + x \log |x|.$$

La courbe particulière a pour équation

$$y = x \log |x|$$

et l'aire demandée est égale à $-\frac{1}{4}$.

III. — 1° L'équation de l'énergie cinétique est

$$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0;$$

en exprimant v en fonction de z , elle donne

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2z}{p+2z}(2gz + v_0^2 - 2gz_0);$$

dans le cas du problème, $z_0 = 0$ et le mouvement a toujours lieu dans le même sens.

En projetant les forces et l'accélération sur la normale, on obtient la réaction

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - mg\sqrt{\frac{p}{p+2z}} = m(v_0^2 - gp)\sqrt{\frac{p}{(p+2z)^3}};$$

elle est nulle si $v_0 = \sqrt{gp}$, et dans ce cas la masse décrit librement la parabole comme un projectile. Si v_0 est supérieur à \sqrt{gp} , la masse supposée placée sur la convexité de la courbe la quitte dès le sommet.

2° Lorsque la parabole tourne autour de son axe, l'étude du mouvement relatif conduit à l'équation

$$v^2 - v_0^2 = 2(g + \omega^2 p)(z - z_0)$$

et les circonstances du mouvement sont analogues aux précédentes. On obtient la réaction en calculant l'accélération par le théorème de Coriolis; la composante de la réaction suivant la tangente au parallèle est

$$N_1 = 2m\omega v\sqrt{\frac{p}{p+2z}}$$

et sa composante suivant la normale au méridien est, en supposant $z_0 = 0$,

$$N_2 = m[v_0^2 - gp + 4\omega^2 z(p+z)]\sqrt{\frac{p}{(p+2z)^3}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la parabole d'équation

$$x^2 + 4y - 4 = 0$$

et la portion AB de cette parabole comprise dans l'angle positif des coordonnées.

Déterminer l'aire du secteur OAB, les coordonnées du centre de gravité de cette aire supposée homogène et la longueur de l'arc AB.

Calculer une valeur approchée de l'abscisse d'un point M de cet arc tel que la droite OM partage l'aire du secteur en deux parties équivalentes.

Indications : aire = $\frac{4}{3}$; arc = $\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})$; coordonnées du centre de gravité : $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{5}$; abscisse du point M : 1,192.

(Nancy, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation différentielle

$$(e) \quad 4x^2y(xy' - y) + x^4 - y^4 = 0.$$

1° Y effectuer le changement de variables défini par

$$x^2 = u, \quad y^2 = v.$$

On est conduit à une nouvelle équation différentielle entre u et v que l'on intégrera.

2° En déduire que la solution générale de (e) peut s'exprimer par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = at \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{cases}$$

où a est une constante arbitraire. Construire l'une des courbes représentées par les équations (1). Montrer qu'elle peut être engendrée de la façon suivante : sur une droite variable issue de $A(a, 0)$, on porte à partir du point P, où cette droite rencontre Oy, une longueur PM ou PM' :

$$PM = PM' = PO.$$

Les points M et M' décrivent la courbe en question.

3° Déterminer le volume engendré par la surface de la boucle de la courbe en tournant autour de son axe de symétrie.

II. Un point matériel pesant M, de masse m , est suspendu à un point fixe O par un fil élastique, de masse négligeable, exerçant sur M une force attractive proportionnelle à son allongement et égale en valeur absolue à

$$m\omega^2(x - a), \quad \text{pour } x \geq a,$$

x étant la longueur du fil à l'instant envisagé et a sa longueur à l'état naturel.

Déterminer le mouvement du point M sur la verticale du point O.

Examiner en particulier le cas où, après avoir tiré verticalement sur le fil de manière à lui donner une longueur l , on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Discuter en supposant l'action du fil nulle pour $x < a$.

Solution. — I. 1° Le changement de variables indiqué conduit à l'équation

$$4u^2 \frac{dv}{du} = 4uv - u^2 + v^2,$$

que l'on intègre en posant $v = \tau u$: on trouve

$$u = k \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^2, \quad v = k\tau \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^2.$$

2° On retrouve les formules indiquées en posant

$$\tau = t^2, \quad k = a^2.$$

Les courbes obtenues sont des strophoïdes homothétiques par rapport à l'origine, point double commun, admettant pour asymptotes les droites $x + a = 0$.

3° Le volume demandé est égal à $\frac{2\pi a^3}{3}(3L_2 - 2)$.

II. Pour $x \geq a$, on obtient un mouvement vibratoire simple, de période $\frac{2\pi}{\omega}$, le centre étant la position d'équilibre du point M.

Si $|a - l|$ est $\leq \frac{2g}{\omega^2}$, le mouvement est représenté par la formule

$$x = \left(a + \frac{g}{\omega^2} \right) (1 - \cos \omega t) + l \cos \omega t.$$

Si $|a - l|$ est $> \frac{2g}{\omega^2}$, on obtient alternativement le mouvement vibratoire représenté par la formule précédente et le mouvement vertical d'un point pesant. ●

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_{3,9}^4 \frac{\sqrt{x^2+2}(x+3)(x^2+2,2x-5,09) + x(3-x)(x+0,1)^2}{\sqrt{x^2+2}(9-x^2)(x+0,1)^2} dx$$

à 10^{-2} près. (On pourra calculer d'abord l'intégrale indéfinie.)

Solution. — L'intégrale indéfinie est, à une constante additive près,

$$\begin{aligned} & A L |3 - x| + B L |x + 0,1| \\ & - \frac{C}{x + 0,1} + L \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| \\ & - \frac{3}{\sqrt{11}} L \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 2} + 3 - \sqrt{11}}{x + \sqrt{x^2 + 2} + 3 + \sqrt{11}} \right|, \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{10,51}{9,61}, \quad B = A - 1, \quad C = -\frac{5,3}{3,1}.$$

On achèvera le calcul au moyen des tables.

(Dijon, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne les expressions

$$x = 3r \sin \varphi - r \sin 3\varphi,$$

$$y = 3r \cos \varphi - r \cos 3\varphi;$$

on demande de trouver la forme de la courbe, lieu du point de coordonnées (x, y) par rapport à des axes rectangulaires, lorsque φ varie. Montrer que cette courbe est

une épicycloïde, lieu d'un point d'une circonférence de rayon r , roulant sans glisser sur une circonférence de rayon $2r$. Indiquer la position de ces circonférences par rapport aux axes de coordonnées.

Trouver la longueur S de l'arc parcouru par M , lorsque φ varie de la valeur 0 à la valeur α . Trouver l'aire totale enfermée par la courbe.

II. Chercher la solution de l'équation différentielle

$$ay'' = 2$$

(a étant une constante) qui s'annule pour $x = 0$, et dont la dérivée prend alors la valeur λ . Construire la courbe (C) représentant, en axes rectangulaires, la variation de cette fonction. Montrer que si λ varie, les courbes (C) restent égales entre elles.

En un point M de coordonnées (x, y) passe une courbe (C) correspondant à une valeur convenable du paramètre λ . Calculer, en fonction de x, y, a , le coefficient angulaire de la tangente Mt à cette courbe.

Déterminer une courbe (C') telle qu'en chaque point M' sa tangente $M't'$ soit symétrique par rapport à Mx , parallèle à Ox , de la tangente $M't$ à la courbe (C) qui passe par le même point M' . Indiquer la forme des diverses courbes C'.

Indications sur la solution. — I. La courbe est une épicycloïde à deux rebroussements, engendrée par un point M d'un cercle de rayon r roulant sans glisser sur un cercle de rayon $2r$. Le point M coïncide avec le point de contact P des deux cercles, lorsque ce point P vient sur l'axe Oy , ce qui donne les deux rebroussements. L'angle φ est égal à

$$\varphi = (\text{OP}, \text{O}y).$$

On trouve immédiatement

$$ds^2 = 36r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2,$$

d'où S sans difficultés.

Pour l'aire, on peut prendre la différentielle de l'aire

balayée par le rayon vecteur :

$$\frac{1}{2} (x dy - y dx) = -6r^2(1 - \cos 2\varphi) d\varphi.$$

L'aire totale est

$$12\pi r^2.$$

II. La solution demandée est manifestement

$$y = \frac{x^2}{a} + \lambda x.$$

Le coefficient angulaire m de la parabole passant par le point (x, y) est

$$m = \frac{y}{x} + \frac{x}{a}.$$

La courbe (C') est définie par l'équation différentielle

$$y' = -\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{a}\right),$$

dont la solution s'écrit

$$y = -\frac{x^2}{3a} + \frac{\mu}{x} \quad (\mu = \text{const.}).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 1}{(x-1)^2(x^2+1)^2},$$

les éléments simples étant des fractions ayant pour dénominateurs respectifs des puissances de binômes du premier degré, réels ou imaginaires.

Chercher celle des primitives de $f(x)$ qui tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment.

II. Calculer à un millième près la valeur de l'intégrale définie :

$$\int_0^2 \frac{t+1}{t^2+1} dt.$$

Indications. — I. La décomposition de la fraction rationnelle est

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1+i}{(x-i)^2} + \frac{1-i}{(x+i)^2}$$

et la primitive s'annulant à l'infini est

$$\frac{-3x^2 + 4x - 3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

II. La valeur de l'intégrale définie est

$$\frac{1}{2} L5 + \text{arc tang } 2 = 1,912.$$

(Lille, juillet 1920.)

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *La loi de répartition canonique. On démontrera que c'est la loi de répartition la plus probable dans l'extension en phase de N systèmes dont l'énergie totale est fixée. Le nombre N est supposé très grand.*

II. *En déduire la relation de Boltzmann entre l'entropie et la probabilité.*

III. *Signification physique des coefficients de la loi de répartition canonique.*

IV. *Généraliser les raisonnements précédents au cas où les équations de la mécanique ne sont plus valables.*

On supposera que, dans ce cas, la probabilité pour que le point représentatif d'un système se trouve dans l'extension en phase $d\Phi$ soit égale à $\varphi d\Phi$.

φ est une fonction des coordonnées et des moments définissant la position de l'élément d'extension en phase $d\Phi$,

fonction qu'on laissera indéterminée. (Elle se réduit à une constante dans la première partie de la question.)

FORMULES. — *Première partie.* — Probabilité d'une répartition telle que n_1 systèmes se trouvent dans l'élément d'extension en phase $d\Phi_1$, n_2 dans $d\Phi_2$, ..., n_m dans $d\Phi_m$,

$$(1) \quad P = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!};$$

la formule de Stirling

$$(2) \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donne, en négligeant les grandeurs petites,

$$(3) \quad \log P = \text{const.} - \sum n \log n.$$

On partira de la formule (3).

Quatrième partie. — La formule (1) doit être remplacée par

$$(1') \quad P = \varphi_1^{n_1} \varphi_2^{n_2} \dots \varphi_m^{n_m} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

On en déduira la formule

$$(3') \quad \log P = \text{const.} - \sum n (\log n - \log \varphi + 1).$$

On remplacera la sommation par une intégration et l'on cherchera la répartition la plus probable.

Pour établir la relation de Boltzmann, on supposera l'extension en phase permise invariable.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On rappelle que les polynômes de Legendre (n entier > 0) sont définis par la formule

$$(1) \quad P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n.$$

Il est évident qu'un polynôme entier en μ , de degré p , peut être exprimé comme une combinaison linéaire de P_0, P_1, \dots, P_p . On propose d'effectuer explicitement ce

développement pour le polynôme μ^p , sous la forme

$$(2) \quad \mu^p = a_0 P_0(\mu) + a_1 P_1(\mu) + \dots \\ + a_n P_n(\mu) + \dots + a_p P_p(\mu).$$

1° Déterminer a_p en comparant les termes en μ^p .

2° Calculer les autres coefficients en utilisant la formule connue

$$(3) \quad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

On aura besoin d'effectuer des intégrales du type

$$J_{p,n} = \int_{-1}^{+1} \mu^p P_n(\mu) d\mu.$$

a. $J_{p,p}$ se déduit du paragraphe (1°) (calcul de a_p).

b. $J_{p,n} = 0$ si $p - n$ est impair.

c. Pour $p - n =$ entier pair, former une relation de récurrence entre $J_{p,n}$ et $J_{p-2,n}$, en utilisant l'équation différentielle de Legendre :

$$(4) \quad \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \right] + n(n+1)P_n = 0.$$

On multipliera cette équation (4) par μ^p , et l'on intégrera entre -1 et $+1$. En utilisant deux fois l'intégration par parties du premier terme, on trouvera

$$(5) \quad n(n+1)J_{p,n} = p(p+1)J_{p,n} - p(p-1)J_{p-2,n},$$

formule qui ramènera le calcul de $J_{p,n}$ à celui de $J_{n,n}$.

En déduire la valeur explicite des coefficients dans la formule (2).

(Strasbourg, juin 1922.)



[B2a]**TRANSFORMATIONS LINÉAIRES, VOLUMES ET DÉTERMINANTS;**

PAR M. GEORGES BOULIGAND,

Professeur à l'Université de Poitiers.

1. C'est Leibniz qui, le premier, a rencontré la notion de déterminant, en étudiant le problème de l'élimination de n inconnues entre $n + 1$ équations linéaires : la solution s'obtient en annulant un polynome entier et homogène des coefficients de ces équations. Les termes de ce polynome peuvent se déduire de l'un d'eux par une loi, aujourd'hui bien connue, et que Leibniz a dégagée. Un peu plus tard, Cramer donna la règle générale de résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. Depuis cette époque, les déterminants ont été étudiés, sous diverses appellations, par les plus grands géomètres : Bezout, Laplace, Vandermonde, Lagrange, Gauss, Cauchy et Jacobi en développèrent la théorie : c'est d'ailleurs par ces trois derniers qu'a été consacrée la détermination actuelle de *déterminant* ⁽¹⁾.

Au point de vue didactique, les plus grands progrès sont dus à Cauchy, qui a développé les propriétés fondamentales des déterminants en partant de la notion de *fonction alternée*. Pour ma part, je trouve qu'un tel point de vue s'impose, à l'heure actuelle, dans tout enseignement qui prétend donner une formation scientifique. Mais à lui seul, il ne suffit pas à satisfaire

(¹) Cf. *Encyclopédie des Sciences mathématiques*. t. I, vol. 1, fasc. 1.

l'esprit d'un élève, qui, s'intéressant à la genèse des notions, chercherait, non pas à vérifier que les déterminants possèdent les perfections requises pour la résolution des systèmes du premier degré, mais bien à trouver d'une manière naturelle le mécanisme de cette résolution, et à forger les instruments de calcul aptes à l'enregistrer simplement.

C'est à ce désir bien légitime que je vais m'efforcer de répondre ici. Je montrerai dans ce but que *la notion de volume d'un parallélépipède fournit la clef de la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues*. Je ferai voir ensuite que ce volume est une forme trilinéaire alternée, et serai ainsi ramené au point de vue de Cauchy.

Pour la clarté de l'exposition, nous aurons à rappeler la définition et les propriétés élémentaires des transformations linéaires. Aux propriétés qui sont invariantes par ces transformations, on donne le nom de *propriétés linéaires*, pour bien les désigner des *propriétés métriques*, invariantes par le groupe plus restreint des similitudes. Par des considérations participant exclusivement de la géométrie linéaire, nous définirons *la notion de volume*, en nous bornant au cas du parallélépipède, et laissant au lecteur le soin de généraliser par application du processus classique du Calcul intégral.

Une telle étude est intéressante en elle-même. Elle offrira en outre l'avantage de lier cette notion de volume à celle du déterminant. On connaît la méthode, adoptée dans tous les cours de Mathématiques spéciales, qui consiste à poser *a priori* cette dernière notion, à l'appliquer à la résolution des systèmes, pour retrouver plus tard, par une sorte de hasard providentiel, la possibilité d'écrire le volume d'un

tétraèdre ou d'un parallélépipède sous forme de déterminant! Il semble qu'il ne soit pas inutile de rechercher quelque amélioration dans l'exposition de toutes ces questions.

La méthode que nous allons développer ici même s'étendra immédiatement au cas d'un nombre quelconque de dimensions. Nous ne prendrons $n = 3$ que pour faciliter notre exposé.

2. Soient O, A, B, C quatre points non situés dans un même plan. Un vecteur \vec{OM} quelconque est décomposable, d'une seule façon, suivant les droites OA, OB, OC. Cette décomposition peut se traduire par une égalité vectorielle de la forme

$$(1) \quad \vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC},$$

où x, y, z sont des quantités scalaires, qu'on nomme *coordonnées* de M dans le système de vecteurs fondamentaux $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$. Contentons-nous de rappeler que, si l'on fait un changement de vecteurs fondamentaux, les formules de transformation des coordonnées sont linéaires.

3. Deux points M et M' se correspondent par une *transformation linéaire* lorsque les coordonnées de M' s'expriment linéairement à l'aide des coordonnées de M. Si cette propriété a lieu lorsque M est rapporté à un système déterminé de vecteurs fondamentaux, et M' à un autre système, elle subsiste par toute modification apportée à ces deux systèmes. Bien entendu, nous supposons que les formules de passage des coordonnées de M à celles de M' sont de forme telle qu'à chaque point M', elles fassent correspondre

un point M et un seul. La condition impliquée par cette hypothèse sera sûrement remplie si nous nous plaçons dans les conditions du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Supposons toujours que les quatre points O, A, B, C ne soient pas dans un même plan, et qu'une transformation linéaire leur fasse correspondre justement les quatre points O', A', B', C' non situés eux-mêmes dans un même plan. En appelant M' le transformé de M , l'égalité*

$$(1) \quad \vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$$

entraînera la suivante :

$$(2) \quad \vec{O'M'} = x\vec{O'A'} + y\vec{O'B'} + z\vec{O'C'}$$

Le lecteur déduira aisément ce théorème de la définition générale donnée plus haut. Il y rattachera non moins facilement les corollaires suivants :

1° Une transformation linéaire change deux vecteurs équipollents en deux vecteurs équipollents, ou, si l'on préfère, une translation en une autre translation. Il y a donc conservation des relations de parallélisme.

2° Il y a aussi conservation des rapports segmentaires sur une même droite. Grâce à ce fait une homothétie se changera en une homothétie de même rapport. Cette remarque s'applique en particulier à la symétrie par rapport à un point.

3° Les transformations linéaires forment un groupe, à cause de l'invariance de x, y, z dans le passage de la relation (1) à la relation (2), quand O et O', A et A', B et B', C et C', M et M' veulent bien se correspondre.

À ce groupe on donne le nom de *groupe linéaire*. Il admet comme sous-groupe celui des translations.

Toute transformation de ce dernier devient, par le jeu d'une transformation linéaire quelconque, une autre transformation du même sous-groupe. On exprime ce fait en disant que le sous-groupe des translations est *invariant* dans le groupe linéaire.

4. Occupons-nous, dans cet ordre d'idées, de définir le *volume*, en excluant de nos raisonnements toute considération métrique. Au nombre qui mesure le volume d'un domaine, nous entendons imposer les conditions suivantes :

Condition I. — Si un domaine est décomposé en deux domaines partiels contigus et sans partie commune, le *volume* du domaine total est la somme des *volumes* des deux domaines partiels.

Condition II. — Si deux domaines se déduisent l'un de l'autre par translation, ils ont le même *volume*.

Condition III. — Le *volume* d'un parallélépipède construit sur trois vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} est une fonction continue de ces vecteurs.

Représentons provisoirement par

$$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$$

le *volume* qu'il s'agit de définir, lorsque le domaine est le parallélépipède construit sur \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} . Nous devons attribuer la même signification aux deux symboles

$$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) \text{ et } (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} + \lambda \vec{OA}),$$

car, en passant du premier au second, on ajoute et on retranche au parallélépipède initial deux domaines

déduits l'un de l'autre par translation de \vec{OA} (condition II). Plus généralement, nous devons avoir

$$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC} + \lambda \vec{OA} + \mu \vec{OB})$$

quels que soient les scalaires λ et μ . Nous devons donc regarder comme *équivalents* tous les parallélépipèdes ayant en commun les arêtes \vec{OA} et \vec{OB} , l'arête \vec{OC} pouvant avoir une direction quelconque et étant assujettie seulement à avoir son extrémité C dans un plan fixe parallèle à OAB. Remarquons que le sens du trièdre OABC sera respecté par toutes les modifications ainsi permises pour le point C. Par trois transformations successives du type précédent, nous pourrons ramener un parallélépipède OABC à un parallélépipède équivalent OA'B'C' ayant ses arêtes parallèles à des directions données. Cette réduction se fera de manière que OA' et OA soient du même côté du plan OBC et ainsi de suite.

Considérons maintenant deux parallélépipèdes OABC et O'A'B'C' tels qu'on ait

$$\vec{O'A'} = \lambda \vec{OA}, \quad \vec{O'B'} = \mu \vec{OB}, \quad \vec{O'C'} = \nu \vec{OC},$$

où λ, μ, ν désignent tout d'abord des nombres positifs. Les arêtes seront donc deux à deux parallèles et de même sens. Si λ, μ, ν sont rationnels, chacun des deux parallélépipèdes pourra être constitué par juxtaposition de parallélépipèdes qui se déduisent les uns des autres par des translations. Mais alors, en vertu des conditions I et II, nous aurons nécessairement

$$(3) \quad \frac{(\vec{O'A'}, \vec{O'B'}, \vec{O'C'})}{(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})} = \lambda\mu\nu.$$

Pour que le volume soit une fonction continue des trois vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , il est nécessaire que cette relation subsiste lorsque λ , μ , ν ne sont plus rationnels. Nous avons même intérêt, pour permettre l'application, au calcul des volumes, des opérations algébriques, à introduire des conventions de signe telles que la formule (3) soit vérifiée quels que soient les nombres réels λ , μ , ν . Ceci implique une nouvelle condition (*condition IV*) qu'il est nécessaire d'adjoindre aux précédentes pour définir le volume algébrique. Nous considérerons donc à l'avenir que notre définition du volume consiste dans l'ensemble des conditions I, II, III, IV.

§. THÉORÈME. — On a, en grandeur et en signe,

$$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}' + \vec{OC}'') = (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}') + (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}'').$$

En effet, les trois parallélépipèdes qui interviennent ici ont en commun les arêtes \vec{OA} et \vec{OB} . Soit \vec{OC} la résultante de \vec{OC}' et \vec{OC}'' . Grâce à la possibilité de déplacer C, C', C'' chacun dans un plan parallèle à OAB, nous pouvons substituer à chacun de ces points sa projection sur un axe Oz issu de O, projection faite parallèlement au plan OAB. Il y a dès lors communauté de direction entre toutes les arêtes de même rang dans nos divers parallélépipèdes et la proposition devient évidente. C. Q. F. D.

Corollaire. — On a, plus généralement,

$$\begin{aligned} & (\vec{OA}, \vec{OB}, k' \vec{OC}' + k'' \vec{OC}'') \\ & = k' (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}') + k'' (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}''). \end{aligned}$$

En résumé, le volume sera une fonction linéaire des vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} pris isolément. Soient

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)$$

les composantes de \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} dans un système vectoriel fondamental qu'il est inutile d'expliciter. Le volume sera une fonction trilinéaire des trois séries de variables

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \text{ et } (c_1, c_2, c_3).$$

6. THÉORÈME. — *Le volume est une fonction alternée des trois vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} .*

Autrement dit, si l'on intervertit deux de ces vecteurs, le volume change de signe en conservant sa valeur absolue. En effet, d'après une transformation justifiée plus haut, nous avons :

$$\begin{aligned} (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) &= (\vec{OA}, \vec{OB} + \vec{OC}, \vec{OC}) \\ &= (\vec{OA}, \vec{OB} + \vec{OC}, -\vec{OB}) \\ &= (\vec{OA}, \vec{OC}, -\vec{OB}) \\ &= -(\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OB}). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Considérons toutes les permutations effectuées sur \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} : les substitutions qui les réalisent forment un groupe, celles qui comprennent un nombre pair de transpositions feront prendre au volume la valeur $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$, celles qui comprennent un nombre impair de transpositions lui feront prendre la valeur opposée.

7. Nous sommes donc conduits, d'une manière toute

naturelle, à la recherche d'une forme trilinéaire des trois séries de variables

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

possédant la propriété d'*alternance*. Seules de telles expressions seront propres à fournir l'expression d'un volume $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$.

Or toute forme trilinéaire des trois séries de variables précédentes est une somme de termes tels que

$$\lambda_{ijk} a_i b_j c_k,$$

où i, j, k sont égaux chacun à l'un des nombres 1, 2, 3. Exprimons les conditions d'*alternance* : il faut traduire l'identité entre la forme précédente et celles qui s'en déduisent par les permutations de classe paire a, b, c , et aussi le fait qu'elle est identiquement opposée à celles qui s'en déduisent par les permutations de classe impaire. Nous nous appuierons à cet effet sur la propriété suivante :

8. THÉORÈME. — *Considérons une substitution conduisant à une nouvelle permutation des a, b, c : elle fournit une nouvelle forme trilinéaire. Pour obtenir dans celle-ci le terme semblable à un terme de la forme initiale, il suffit d'opérer sur le système d'indices du coefficient de ce dernier la substitution précédente.*

En effet, toute substitution se ramène à une suite de transpositions. Il nous suffit donc de montrer, par exemple, que si l'on intervertit les b et les c , le terme

semblable au terme de l'ancienne forme

$$\lambda_{ijk} a_i b_j c_k$$

sera, dans la nouvelle,

$$\lambda_{ikj} a_i b_j c_k,$$

et, en effet, du terme $\lambda_{ijk} a_i b_j c_k$ de l'ancienne forme, on déduit immédiatement par la substitution un terme en $a_i c_j b_k$. Pour obtenir le terme semblable au terme primitif, il faut donc bien intervertir les indices i et k .

CONSÉQUENCE. — Les λ_{ijk} sont des fonctions alternées de la disposition des indices i, j, k . Cela se déduit immédiatement du théorème précédent : en effet, pour écrire que deux expressions sont identiques, ou identiquement opposées, nous devons écrire que les termes semblables ont des coefficients égaux ou opposés. Le théorème est donc démontré.

De là il résulte aussi que les seuls λ non nuls sont ceux où tous les indices i, j, k sont différents.

En résumé, il reste en facteur, dans l'expression d'une forme trilinéaire et alternée, et par suite de

$$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}),$$

un coefficient λ indéterminé, ce qui est naturel, puisque l'unité de volume n'a pas été spécifiée.

9. DÉFINITION. — On appelle *déterminant* d'ordre trois une forme trilinéaire alternée des trois séries de variables

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

dont les coefficients λ sont fixés par la condition

$$\lambda_{123} = 1.$$

Le calcul d'un déterminant résulte de la théorie précédente : c'est une somme de produits partiels

$$\lambda_{ijk} a_i b_j c_k$$

obtenus en prenant un terme et un seul dans chaque colonne (et dans chaque ligne) et en faisant $\lambda_{ijk} = \pm 1$ suivant la parité de la permutation des i, j, k . Du théorème établi au n° 8, résulte immédiatement la possibilité d'inverser le rôle des lignes et des colonnes sans changer la valeur du déterminant.

10. *Principe de la résolution d'un système de trois équations du premier degré à trois inconnues.*

— Le système

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

est équivalent à une égalité vectorielle

$$x \vec{OA} + y \vec{OB} + z \vec{OC} = \vec{OD}.$$

D'après le corollaire du n° 5, nous déduisons de là

$$\begin{aligned} & (x \vec{OA} + y \vec{OB} + z \vec{OC}, \vec{OB}, \vec{OC}) \\ &= x (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) + y (\vec{OB}, \vec{OB}, \vec{OC}) + z (\vec{OC}, \vec{OB}, \vec{OC}); \end{aligned}$$

les deux derniers termes sont nuls. Nous avons donc

$$(4) \quad x (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = (\vec{OD}, \vec{OB}, \vec{OC}).$$

La règle de Cramer s'obtient donc sans douleur par cette méthode. Ainsi, non seulement, nous avons précisé la notion de volume, mais nous avons montré que celle de déterminant n'en est qu'une dépendance, et que la première suffirait à la théorie des systèmes

cient constant par un déterminant. En définitive, la forme proposée pourra donc s'écrire

$$\sum \lambda_{ijk} \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix},$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons ijk des indices 1, 2, 3, 4, 5.

De ce théorème, qui se généralise aisément pour n et p quelconques, nos lecteurs déduiront sans peine la règle de développement d'un déterminant suivant les éléments d'une rangée. Ils y rattacheront également la règle de Laplace, en vertu de laquelle on peut écrire, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = \sum (-1)^N \begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_p & c_q & c_r \\ d_p & d_q & d_r \\ e_p & e_q & e_r \end{vmatrix},$$

où les indices i, k, p, q, r pris dans leur ensemble constituent une permutation des entiers 1, 2, 3, 4, 5, la sommation étant étendue à toutes les combinaisons i, k de ces indices deux à deux, et l'exposant N représentant le nombre des inversions de la permutation

$$i \ k \ p \ q \ r.$$

12. Revenons aux transformations linéaires. La notion de déterminant nous permet d'en compléter la théorie par une proposition importante.

THÉORÈME. — *Si l'on fait une transformation linéaire, un volume V se change en un nouveau*

volume V' qui est le produit de V par le déterminant de la transformation.

Supposons qu'aux vecteurs \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , correspondent respectivement par notre transformation les vecteurs $\vec{O'A'}$, $\vec{O'B'}$, $\vec{O'C'}$, tels que

$$\begin{aligned}\vec{O'A'} &= \alpha_1 \vec{OA} + \beta_1 \vec{OB} + \gamma_1 \vec{OC}, \\ \vec{O'B'} &= \alpha_2 \vec{OA} + \beta_2 \vec{OB} + \gamma_2 \vec{OC}, \\ \vec{O'C'} &= \alpha_3 \vec{OA} + \beta_3 \vec{OB} + \gamma_3 \vec{OC}.\end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$(\vec{O'A'}, \vec{O'B'}, \vec{O'C'})$$

est la forme $\lambda\Delta$ en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Pour déterminer λ , servons-nous de la transformation identique, pour laquelle $\vec{O'A'} = \vec{OA}$, $\vec{O'B'} = \vec{OB}$, $\vec{O'C'} = \vec{OC}$ et $\Delta = 1$; il vient

$$(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}) = \lambda$$

et l'on a bien finalement

$$(\vec{O'A'}, \vec{O'B'}, \vec{O'C'}) = \Delta \cdot (\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}).$$

C. Q. F. D.

A cette proposition on peut rattacher aisément le théorème de la multiplication de deux déterminants.

Remarquons, en outre, que le théorème précédent nous permet de conclure à l'existence de deux sous-groupes remarquables du groupe linéaire :

1° Le sous-groupe des transformations linéaires dont le déterminant Δ est positif;

2° Le sous-groupe, intérieur au précédent, des transformations linéaires dont le déterminant Δ est égal à $+1$. Toutes ces transformations conservent les volumes en grandeur et en signe.

Toute transformation de l'un de ces sous-groupes devient, par l'effet d'une transformation linéaire quelconque, une autre transformation du même sous-groupe. Nous aurons donc obtenu ainsi deux nouveaux sous-groupes invariants.

[J2a]

UN THÉORÈME DU CALCUL DES PROBABILITÉS;

PAR M. A. GULDBERG,

Professeur à l'Université de Christiania.

La probabilité d'un événement E est p , celle de l'événement contraire est q ; on fait μ épreuves dans les mêmes conditions. Le nombre d'arrivées le plus probable des E est, d'après le théorème de Bernoulli, μp (voir J. BERTRAND, *Calcul des Probabilités*, p. 71).

Dans un Mémoire ⁽¹⁾ intéressant, mais peu connu, M. T.-C. Simmons a établi le théorème :

« Si le nombre d'arrivées le plus probable de l'évé-

(1) *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 26, p. 290.

nement E , dont la probabilité est p , est dans μ épreuves un , il est plus probable que le nombre d'arrivées de E soit *plus petit* que *plus grand* que un . »

M. Simmons énonce aussi son théorème de la manière suivante :

« Si un événement doit arriver b fois et ne doit pas arriver a fois, $a > b$, dans les mêmes conditions, et si on fait μ épreuves, où μ est un multiple de $(a + b)$, la probabilité pour que l'événement arrive un nombre de fois plus petit que $\mu \frac{b}{a+b}$ est plus grande que la probabilité pour que l'événement arrive un nombre de fois plus grand que $\mu \frac{b}{a+b}$. »

M. Simmons a seulement réussi à établir ce théorème dans le cas où $b = 1$. Son analyse est assez compliquée et longue (33 pages); il pense que le théorème est vrai pour toutes les valeurs de $b < a$. Le théorème de M. Simmons est, il me semble, intéressant et mérite d'être connu. Peut-être un jeune géomètre en pourra-t-il donner la démonstration complète.

Dans les lignes qui suivent, je me permets de faire quelques remarques qui se rattachent à ce problème.

Soit x une quantité pouvant prendre les valeurs distinctes positives x_1 avec la probabilité p_1 , x_2 avec la probabilité p_2 , ..., x_k avec la probabilité p_k , en sorte que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

La valeur moyenne m de la quantité x est définie par l'expression

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k.$$

Soient x'_1, x'_2, \dots, x'_r les valeurs de la quantité x

qui sont plus petites que m et p'_1, p'_2, \dots, p'_r les probabilités correspondantes, et soient $x''_1, x''_2, \dots, x''_t$ les valeurs de la quantité x qui sont plus grandes que m et $p''_1, p''_2, \dots, p''_t$ les probabilités correspondantes. La valeur moyenne relative aux valeurs de la quantité x qui sont $< m$ est définie par l'expression

$$m_1 = \frac{p'_1 x'_1 + p'_2 x'_2 + \dots + p'_r x'_r}{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_r}.$$

La valeur moyenne relative aux valeurs de la quantité x qui sont $> m$ est définie par l'expression

$$m_2 = \frac{p''_1 x''_1 + p''_2 x''_2 + \dots + p''_t x''_t}{p''_1 + p''_2 + \dots + p''_t}.$$

Soit

$$M_1 = \sum_1^r p'_i (m - x'_i),$$

la sommation est étendue aux valeurs de x , qui sont $< m$, et soit

$$M_2 = \sum_1^t p''_i (x''_i - m),$$

la sommation est étendue aux valeurs de x , qui sont $> m$.

On a

$$M_2 = M_1$$

car

$$M_2 - M_1 = \sum_1^k p_i (x_i - m) = \sum_1^k p_i x_i - m = 0.$$

De l'égalité

$$\sum_1^r p'_i (m - x'_i) = \sum_1^t p''_i (x''_i - m)$$

ou

$$m \sum_1^r p'_i - \sum_1^r p'_i x'_i = \sum_1^t p''_i x''_i - m \sum_1^t p''_i$$

on tire, si

$$(1) \quad m - m_1 < m_2 - m,$$

l'inégalité

$$(2) \quad \sum_1^r p'_i > \sum_1^t p''_i.$$

On a ainsi la proposition suivante :

« Si la différence entre la valeur moyenne m de la quantité x et la valeur moyenne relative m_1 aux valeurs de x plus petites que m est plus petite que la différence entre la valeur moyenne relative m_2 aux valeurs de x plus grandes que m et la valeur moyenne m de x , la probabilité pour que la quantité x prenne une valeur plus petite que m est plus grande que la probabilité que x prenne une valeur plus grande que m . »

Si le signe d'inégalité en (1) est renversé, le signe d'inégalité (2) est renversé. Si

$$m - m_1 = m_2 - m$$

on a

$$\sum_1^r p'_i = \sum_1^t p''_i.$$

[K'2e]

SUR LE THÉORÈME DE MORLEY;

PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Le théorème de Morley, peu connu en France, est un des plus jolis qui soient en géométrie élémen-

taire. Il paraît avoir été donné par son auteur vers 1900, qui l'a obtenu comme conséquence de résultats relatifs à la cardioïde (le lieu du foyer d'une telle courbe, inscrite à un triangle fixe, se compose de neuf droites) (1). Ce théorème est le suivant :

Soit ABC un triangle quelconque; menons les trisectrices de ses angles; soit D le point de rencontre des trisectrices de \hat{B} et de \hat{C} , voisines du côté BC; soient E et F les points analogues. Le triangle DEF est équilatéral.

De nombreuses démonstrations en ont été données par la géométrie élémentaire, par la géométrie projective, par la trigonométrie, par la géométrie analytique. La plupart sont assez compliquées. Celle que voici, obtenue par divers géomètres, se recommande par sa brièveté. Elle est malheureusement d'un caractère artificiel.

LEMME. — *Soit ABC un triangle quelconque. Marquons sur la bissectrice de l'angle \hat{A} un point I, intérieur au triangle, tel que l'on ait*

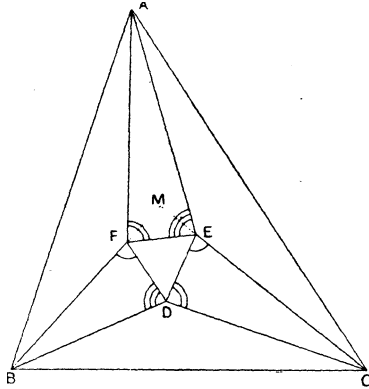
$$\hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Le point I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

La démonstration est immédiate.

(1) Voir trois Mémoires de F.-G. Taylor et W.-L. Marr; de F.-G. Taylor; de W.-L. Marr dans les *Proceedings of the Edinburgh mathem. Society*, 1913-1914, p.p. 119, 132 et 136; voir aussi *Periodico di Matematiche*, 1921, p.p. 220 et 291.

Cela posé, partons d'un triangle équilatéral DEF, et sur ses côtés, extérieurement au triangle, construisons



(voir la figure) trois triangles AEF, BFD, CDE, tels que l'on ait les égalités d'angles suivantes :

$$\widehat{BFD} = \widehat{CED} = \alpha, \quad \widehat{CDE} = \widehat{AFE} = \beta, \quad \widehat{AEF} = \widehat{BDF} = \gamma,$$

α, β, γ satisfaisant aux relations

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma = 240^\circ,$$

$$(2) \quad 30^\circ \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 120^\circ$$

et étant d'ailleurs quelconques.

Soient FM' et EM'' les prolongements de BF et CE.

On a

$$\widehat{M''EF} = \widehat{M'FE} = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha < 90^\circ,$$

d'après (1). FM' et EM'' se rencontrent donc en un point M et le triangle MEF est isocèle. Il en résulte évidemment que le point D est sur la bissectrice de l'angle \widehat{BMC} .

On a d'ailleurs

$$\widehat{BDC} = 360^\circ - 60^\circ - \beta - \gamma = 300^\circ - \beta - \gamma$$

et

$$\widehat{BMC} = 180^\circ - 2\widehat{MEF} = 180^\circ - 2(120^\circ - \alpha) = 2\alpha - 60^\circ.$$

On a donc

$$\widehat{BDC} = 90^\circ = \frac{\widehat{BMC}}{2},$$

car cela revient à

$$300^\circ - \beta - \gamma = 90^\circ + \alpha - 30^\circ,$$

c'est-à-dire à (1).

Donc, en vertu du lemme, D est le centre du cercle inscrit au triangle BMC. On a par conséquent

$$\widehat{CBD} = \widehat{DBF}, \quad \text{et de même} \quad \widehat{DBF} = \widehat{FBA}.$$

BD et BF sont donc les deux trisectrices de \widehat{ABC} . De même CD et CE celles de \widehat{BCA} , AE et AF celles de \widehat{CAB} .

D'autre part, on a

$$\widehat{CAB} = 3(180^\circ - \beta - \gamma) = 3(\alpha - 60^\circ),$$

$$\widehat{ABC} = 3(\beta - 60^\circ),$$

$$\widehat{BCA} = 3(\gamma - 60^\circ).$$

Par conséquent, α, β, γ n'étant assujettis qu'à satisfaire à (1) et à (2), on peut faire en sorte que le triangle ABC soit semblable à un triangle donné *a priori*. Cela suffit évidemment à démontrer le théorème de Morley.

Je ne donnerai pas d'autres démonstrations, laissant

au lecteur le plaisir d'en chercher une qui ne mérite pas le même reproche que la précédente.

2. Chaque angle a six trisectrices, si l'on étend convenablement le sens de ce mot. Par exemple, celles de l'angle \widehat{BAC} sont, outre AE et AF, deux droites inclinées à 120° sur AE et deux droites inclinées à 120° sur AF. On peut se proposer d'étudier la configuration formée par l'ensemble des trisectrices.

On trouve qu'elles donnent lieu en tout à 18 triangles équilatéraux qui ont entre eux des relations assez remarquables. Il est nécessaire, pour étudier convenablement la configuration, de raisonner en *géométrie dirigée*. Je n'y insiste pas davantage, car si ces recherches de caractère combinatoire sont attrayantes à poursuivre, l'exposition en est lourde.

[O'5h]

SURFACE DONT TOUS LES POINTS SONT DES OMBILICS;

PAR M. J. LEMAIRE.

Soient A et B deux points quelconques de la surface (S); considérons la sphère qui lui est tangente en A et qui passe en B, leur courbe commune est une ligne de courbure pour chacune d'elles; les surfaces, tangentes en A, se touchent donc aussi en B, et la normale à (S) en B coupe la normale en A au centre O de la sphère, et $OA = OB$. Si M est un autre point arbitraire de (S), la normale en M doit couper de même les deux

normales précédentes, donc passer en O, et de plus

$$OM = OA = OB;$$

la surface (S) est donc nécessairement une sphère.

[R9b]

SUR LES PROBLÈMES DE CHOC AVEC FROTTEMENT ;

PAR M. J. SOULA.

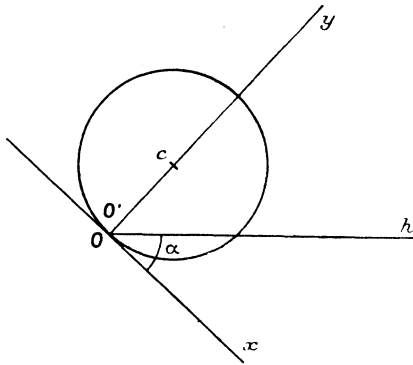
Il est bien connu que les problèmes de dynamique dont les données comportent des liaisons avec frottement peuvent conduire à des impossibilités ou à des indéterminations (1).

On doit s'attendre à des difficultés du même ordre quand on traite des problèmes de choc avec frottement. Je voudrais donner un exemple de problème de ce genre que les lois admises ne permettent pas de traiter. Il a fait l'objet d'une composition d'examen où les données étaient numériques et telles que la solution que je donne au paragraphe II convenait. Je montre qu'il y a au moins une autre solution tout aussi acceptable que la première et que, dans d'autres cas, il n'y a pas de solution. Cette façon de choisir mon exemple montrera bien que les cas où l'application des lois du frottement et des percussions ne donne pas de résultats doivent être considérés comme très généraux.

(1) Cf. dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, l'intéressant exemple donné par M. Thiry.

I. Le disque C , très mince, homogène, de masse M , de rayon R , tombe d'un mouvement de translation rectiligne dans un plan vertical. Il rencontre un clou cylindrique, horizontal, normal au plan du disque. Le clou est de rayon négligeable, les corps sont mous, il y a frottement (coefficient f).

La figure montre la position des axes de coordonnées Ox et Oy ; O est le clou, O' est le point du disque qui



est en O au moment du choc. Oz est normal au plan de la figure et dirigé vers l'arrière, Cz' parallèle à Oz passe par le centre C du disque.

La rotation instantanée du disque autour de Cz' , par rapport à des axes de direction fixe, sera désignée par ω , les projections sur les axes de la vitesse de C seront désignées par X et Y , la projection sur Ox de la vitesse de O' sera désignée par V_x . L'angle de Ox avec l'horizontale Oh sera α , la vitesse de translation du disque avant le choc sera V_0 , la percussion normale appliquée au disque sera N . On a : $\alpha > 0$, $V_0 > 0$, $N > 0$.

La percussion tangentielle sera $\pm Nf$, portée par Ox . On sait qu'il faut prendre $+Nf$ si la vitesse de O' est

•
négative pendant la durée du choc et $-Nf$ dans le cas contraire.

II. Au début du choc $V_x = X + R\omega = V_0 \sin \alpha$ est positif. Il est naturel de mettre le problème en équation en supposant *a priori* que V_x garde le signe positif, c'est ce que nous allons faire tout d'abord.

Soient X_0, Y_0, ω_0 les valeurs initiales de X, Y, ω . Les mêmes quantités, après le choc, seront ici désignées par X'_1, Y'_1, ω'_1 .

L'équation des moments par rapport à Cz' , les équations relatives au centre de gravité sont :

$$(1) \quad \begin{cases} 2Nf = -MR(\omega'_1 - \omega_0), & M(X'_1 - X_0) = -Nf, \\ & M(Y'_1 - Y_0) = N. \end{cases}$$

Exprimons que les corps sont mous : la vitesse de O' après le choc est tangente au disque, d'où

$$(2) \quad Y'_1 = 0.$$

Réolvons

$$(3) \quad \begin{cases} X'_1 = X_0 + fY_0, & Y'_1 = 0, & \omega'_1 = \omega_0 + \frac{2fY_0}{R}, \\ & & N = -MY_0. \end{cases}$$

La vitesse V_x doit rester positive pour que les équations conviennent. Il est nécessaire, sinon suffisant, qu'elle soit positive ou nulle à la fin du choc. Or, $V_x = X + R\omega$, on a donc la condition

$$X_1 + R\omega_1 = X_0 + R\omega_0 + 3fY_0 \geq 0.$$

Or

$$X_0 = V_0 \sin \alpha, \quad Y_0 = -V_0 \cos \alpha, \quad \omega_0 = 0;$$

on a la condition

$$(4) \quad f \leq \frac{\tan \alpha}{3}.$$

Si cette condition est vérifiée, il est d'usage d'admettre que la solution donnée par les formules (3) est satisfaisante.

III. Nous allons maintenant nous occuper du cas où l'inégalité (4) n'est pas vérifiée. Si le problème peut être traité, c'est que pendant la durée du choc la vitesse V_x change de signe. Nous devons diviser la durée du choc en plusieurs périodes et nous calculerons les valeurs de X , Y , ω à la fin de chaque période. A la fin de chaque période $X + R\omega = V_x$ est nul et change de signe; toutefois, à la fin de la dernière période, c'est Y qui sera nul (puisque les corps sont mous) et non plus V_x qui devra avoir un signe convenable.

Nous devons nous demander si le problème ainsi posé peut avoir une solution en prenant un nombre convenable de périodes. Si plusieurs solutions sont possibles, il sera assez naturel de prendre le nombre minimum de périodes. C'est ce que nous venons de faire quand (4) est vérifiée, mais aucune nécessité logique ne nous impose ce choix.

Occupons-nous d'abord de la première période en supposant qu'il y en a plusieurs. Je désignerai par N_1 la fraction de percussion normale relative à cette période, je veux dire que si n est la réaction normale, si la période va du temps t_0 au temps t_1 , je pose

$$N_1 = \int_{t_0}^{t_1} n dt,$$

X_1 , Y_1 , ω_1 désigneront les valeurs de X , Y , ω à la fin de la première période. On a alors

$$(5) \quad \begin{cases} 2N_1 f = -M R(\omega_1 - \omega_0) & M(X_1 - X_0) = -N_1 f, \\ M(Y_1 - Y_0) = N_1 & X_1 + R\omega_1 = 0; \end{cases}$$

d'où

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{2X_0 - R\omega_0}{3}, \quad Y_1 = \frac{X_0 + R\omega_0}{3f} + Y_0, \\ \omega_1 = -\frac{2X_0 - R\omega_0}{3R}, \quad N_1 = \frac{M(X_0 + R\omega_0)}{3f}. \end{array} \right.$$

IV. Supposons *a priori* que le choc ne comprenne que deux périodes. Écrivons les équations relatives à la deuxième période avec des notations dont le sens se devine aisément. Les vitesses à la fin de la période seront X'_2, Y'_2, ω'_2 , les accents ayant pour but de rappeler que le calcul est fait en supposant que la période est la dernière :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2N'_2 f = MR(\omega_2 - \omega_1), \quad M(X'_2 - X_1) = N'_2 f, \\ M(Y'_2 - Y_1) = N'_2, \quad Y'_2 = 0; \end{array} \right.$$

d'où

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} X'_2 = X_1 - fY_1, \quad Y'_2 = 0, \quad \omega'_2 = \omega_1 - \frac{2fY_1}{R}, \\ N'_2 = -MY_1. \end{array} \right.$$

La condition à vérifier est ici

$$X'_2 + R\omega'_2 \leq 0 \quad \text{ou} \quad X_1 + R\omega_1 - 3fY_1 \leq 0,$$

et, en tenant compte du calcul du paragraphe III,

$$(4) \quad Y_1 \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad f \leq \frac{\tan \alpha}{3}.$$

Nous retrouvons l'inégalité du paragraphe II et nous pouvons en conclure :

Si (4) est vérifiée, le problème peut être résolu soit avec une, soit avec deux périodes et les solutions sont distinctes.

Si (4) n'est pas vérifiée, le problème ne peut être résolu ni avec une, ni avec deux périodes.

V. Plaçons-nous maintenant dans le cas de trois périodes. Les équations de la première période ont été écrites au paragraphe III.

Les équations de la deuxième se déduisent de celles de la première en échangeant f en $-f$ et en augmentant tous les indices d'une unité. Ces équations résolues sont donc

$$(9) \quad \begin{cases} X_2 = \frac{2X_1 - R\omega_1}{3}, & Y_2 = -\frac{X_1 + R\omega_1}{3f} + Y_1, \\ \omega_2 = -\frac{2X_1 - R\omega_1}{3R}, & N_2 = -\frac{M(X_1 + R\omega_1)}{3f}, \end{cases}$$

ce qui donne, en tenant compte de (5),

$$(10) \quad X_2 = X_1, \quad Y_2 = Y_1, \quad \omega_2 = \omega_1, \quad N_2 = 0.$$

La dernière équation exprime que, pendant la deuxième période, la réaction du clou sur le disque reste nulle, le disque effectuerait une sorte de bond infiniment petit vers le haut; c'est un résultat qu'il n'y a pas de raison d'écarter.

La troisième période étant la dernière, ses équations seront

$$(11) \quad \begin{cases} -2N'_3 f = MR(\omega'_3 - \omega_2); & M(X'_3 - X_2) = -N'_2 f; \\ M(Y'_3 - Y_2) = N'_2, & Y'_3 = 0. \end{cases}$$

La solution se déduit de (8) en changeant f en $-f$ et en augmentant les indices d'une unité. Il faudra donc ici que

$$X'_3 + R\omega'_3 \geq 0, \quad \text{ou} \quad X_2 + R\omega_2 + 3fY_2 \geq 0, \quad \text{ou} \quad Y_2 \geq 0$$

et, d'après (10),

$$(4) \quad Y_1 \geq 0, \quad f \leq \frac{\text{tang } \alpha}{3}.$$

La solution est toujours inacceptable si (4) n'est pas vérifiée.

VI. Supposons que la $n^{\text{ième}}$ période soit la dernière.
Il faut que l'inégalité

$$(12) \quad (-1)^n (X'_n + R\omega'_n) \leq 0$$

soit vérifiée.

Les équations des $(n-1)$ premières périodes se déduisent aisément de (5) et (6). Pour la $p^{\text{ième}}$ il suffit de changer f en $(-1)^{p-1}f$ et $X_1, Y_1, \omega_1, X_0, Y_0, \omega_0$ en $X_p, Y_p, \omega_p, X_{p-1}, Y_{p-1}, \omega_{p-1}$. De même que nous avons eu (10), nous obtiendrons

$$X_1 = X_2 = \dots = X_{n-1}, \quad Y_1 = Y_2 = \dots = Y_{n-1}, \quad \omega_1 = \dots = \omega_{n-1}.$$

Les équations de la $n^{\text{ième}}$ période se déduiront de (1) et (2) par le changement de X'_1, Y'_1, ω'_1 en X'_n, Y'_n, ω'_n et de f en $(-1)^{n-1}f$.

Donc

$$X'_n + R\omega'_n = X_{n-1} + R\omega_{n-1} + 3(-1)^{n-1}fY_{n-1}.$$

Or

$$X'_{n-1} + R\omega'_{n-1} = 0,$$

et l'inégalité (12) devient

$$Y_{n-1} \geq 0, \quad \text{ou} \quad Y_1 \geq 0, \quad \text{ou} \quad f \leq \frac{\text{tang } z}{3}.$$

Si donc (4) n'est pas vérifiée, il y a impossibilité.

VII. On pourrait peut-être se demander si les équations qui conviennent pendant une partie du choc ne seraient pas celles du roulement. Il est certain qu'au début il y a glissement puisque la vitesse de O' n'est pas nulle. Si, par la suite, le roulement s'établissait elle serait nulle; on aurait

$$X + R\omega = 0, \quad Y = 0,$$

et le début du roulement ne pourrait être que la fin

d'une des périodes que nous avons envisagées. Mais alors l'équation $Y = 0$ étant vérifiée, nous serions amenés à dire que le choc est terminé. D'ailleurs, ces équations ne peuvent être simultanément vérifiées que si

$$f = \frac{\text{tang } z}{3},$$

et il n'y a pas lieu d'insister sur ce cas.

Nous pouvons conclure de cette discussion que les solutions que l'on donne parfois aux problèmes de choc avec frottement n'ont pas grande valeur théorique. Dans des cas très précis, on pourra cependant garder des formules que l'expérience justifierait.

[P'3b]

SUR UN THÉORÈME DE LIOUVILLE ;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

Dans un récent article (1), M. Paul Montel a donné une démonstration, aussi originale que simple, de ce théorème classique :

La seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics est la sphère.

Il m'a semblé intéressant de rattacher, à cette proposition, un théorème célèbre de Liouville :

Les seules transformations conformes de l'espace à trois dimensions sont les similitudes, les inversions,

(1) *Nouv. Ann. de Math.*, octobre 1922, p. 21.

et celles qui naissent de leur composition, toujours réductibles d'ailleurs, sinon à une similitude, du moins à une similitude (qui peut se réduire à la transformation identique) suivie d'une inversion.

En effet, l'hypothèse de conformité entraîne successivement la conservation des systèmes triples orthogonaux, celle des lignes de courbure et, par suite, celle des ombilics. D'après le théorème précédent, il y aura donc aussi conservation des sphères (sauf réduction à des plans).

La démonstration s'achève alors ainsi : un système triple orthogonal composé, dans chaque famille, de plans parallèles, donnera naissance ou bien à un système de même nature, ou bien à un nouveau système triplement orthogonal dont chaque famille est constituée par des sphères.

Dans le premier cas, la transformation conforme cherchée est nécessairement une similitude.

Dans le second cas, deux sphères d'une même famille font entre elles un angle nul. Elles sont donc tangentes. L'une des familles est formée de sphères dont l'ensemble constitue un faisceau : toutes ces sphères sont donc tangentes en un même point O . Leurs trajectoires orthogonales sont les cercles tangents en O à la ligne des centres. On en conclut que les sphères des deux autres familles passent aussi par le point O , et que chacune de ces familles est formée, comme la précédente, de sphères tangentes en O . Une inversion de pôle O transforme alors ce triple système de sphères en un triple système de plans, qui correspond au système triple initial (de même nature) par une similitude. La transformation étudiée peut donc s'obtenir en composant cette similitude avec l'inversion précédente.

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Étudier par la méthode graphique la fonction dynamique du régulateur à action directe.

2° Déterminer approximativement en partant de l'équation

$$\rho \cdot g \cdot H = uv \cos \alpha - u_1 v_1 \cos \alpha_1$$

la vitesse de régime et le rendement d'une roue Pelton.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une poutre horizontale de longueur $2l$ est encastree à son extrémité A et repose sur un appui de même niveau à son extrémité B. Elle supporte en son milieu une charge verticale unique P. Calculer les réactions aux appuis, le moment d'encastrement. Donner, en fonction de x , l'expression du moment fléchissant, et l'ordonnée y de la fibre élastique. (On appelle x la distance comptée à partir de l'appui encastree, positivement vers l'autre appui.) Où est obtenu le maximum du moment fléchissant (en valeur absolue), et donner la valeur de ce maximum.

SOLUTION. — Appelons R, R' les réactions en A et B et M le moment d'encastrement en A compté positivement dans le sens de AB vers la verticale descendante. On a les égalités statiques

$$\begin{aligned} R + R' &= P, \\ M &= l(2R' - P) = l(P - 2R). \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'expression du moment fléchissant en un point d'abscisse x , est, en tenant compte de la valeur de M en fonction de R :

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} Rx + l(P - 2R) & (0 \leq x \leq l), \\ Rx + l(P - 2R) - P(x - l) & (l \leq x \leq 2l). \end{cases}$$

En intégrant deux fois l'équation d'équarrissage et tenant compte de l'encastrement en A et de ce que la fibre élastique n'est pas cassée en son milieu (on néglige ainsi l'effet de l'effort tranchant)

$$-EIy = \begin{cases} \frac{1}{6} R \cdot x^3 + l(P - 2R) \frac{x^2}{2} & (0 \leq x \leq l), \\ \frac{1}{6} R \cdot x^3 + l(P - 2R) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} P(x-l)^3 & (l \leq x \leq 2l). \end{cases}$$

En exprimant que la poutre passe par B, c'est-à-dire que pour $x = 2l$, y est nul, on obtient la valeur de R :

$$\frac{4}{3} R \cdot l^3 + 2l^3(P - 2R) - \frac{1}{6} Pl^3 = 0,$$

d'où

$$R = \frac{11}{16} P, \quad R' = \frac{5}{16} P, \quad M = -\frac{3}{8} Pl.$$

En revenant à l'expression du moment fléchissant et remplaçant R par sa valeur,

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \frac{1}{16} P(11x - 6l) & (0 \leq x \leq l), \\ \frac{1}{16} P(-5x + 10l) & (l \leq x \leq 2l), \end{cases}$$

il varie linéairement de $-\frac{6}{16} P \cdot l$ à $\frac{5}{16} P \cdot l$ pour x variant de 0 à l et de $\frac{5}{16} P \cdot l$ à 0 pour x variant de l à $2l$. Son maximum en valeur absolue est donc atteint à l'encastrement et c'est $\frac{3}{8} P \cdot l$.

(Lille, juillet 1920.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1^o Question de cours. — Définir l'aire d'une surface courbe, et calculer cette aire quand

les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface sont exprimées en fonction de deux paramètres.

2° Problème. — Soient Ox , Oy , Oz trois axes de coordonnées rectangulaires. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces S telles que le point O soit équidistant d'un point quelconque M de l'une des surfaces S et du point d'intersection de la normale N en M à la surface S avec le plan xOy . Trouver et définir géométriquement une intégrale complète. Intégrer le système différentiel des caractéristiques et les définir géométriquement. Une courbe caractéristique peut-elle être ligne asymptotique ou ligne de courbure d'une surface S ?

SOLUTION DU PROBLÈME. — Avec les notations habituelles, l'équation aux dérivées partielles cherchée est

$$(1) \quad (p^2 + q^2)z + 2(px + qy) - z = 0.$$

D'après les propriétés élémentaires de la parabole, une surface S dépendant de deux paramètres, donc une intégrale complète de l'équation (1), est formée par des cylindres paraboliques admettant le point O comme foyer et dont les génératrices sont parallèles au plan xOy , ou par les paraboloides de révolution de foyer O et dont l'axe est dans le plan xOy . On vérifie ces deux résultats ou on les trouve directement sur le système différentiel définissant les caractéristiques de l'équation (1). Sur le même système, on voit que ces caractéristiques sont des paraboles pouvant être définies comme les sections des cylindres paraboliques par les plans passant par la directrice de la section droite contenant Oz . Donc, sauf dégénérescence, une courbe caractéristique ne peut être ligne asymptotique d'une surface (S) et, si elle est ligne de courbure, c'est nécessairement une parabole dont le plan contient Oz , de foyer O et dont l'axe est dans le plan xOy .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}.$$

2° Soit l'équation linéaire du second ordre

$$(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 5x\sqrt{1-x^2}.$$

Sachant que l'équation privée du second membre admet comme intégrale particulière un polynôme, trouver l'intégrale générale de l'équation complète.

SOLUTION. — 1° L'intégrale proposée est d'un type classique pour le calcul par la méthode des résidus. Chacune des trois déterminations de la fonction de variable complexe

$$\frac{1}{(1+z)\sqrt[3]{z^2(1-z)}}$$

est une fonction uniforme, si l'on fait une coupure sur l'axe réel entre les deux points $z=0$ et $z=1$. Et l'intégrale de l'une de ces fonctions uniformes est nulle sur un chemin qui entoure la coupure et le point $z=-1$. Donc l'intégrale de la fonction considérée le long d'un lacet entourant les deux points $z=0$ et $z=1$ est égale à $-2\pi iR$, R désignant le résidu de la même fonction $z=-1$. D'où, après une réduction simple, la valeur $\frac{2^{\frac{2}{3}}\pi}{\sqrt{3}}$. La même intégrale peut d'ailleurs se ramener à une intégrale de différentielle rationnelle par le changement de variable :

$$\frac{x}{1-x} = t^3.$$

2° Par substitution d'un polynôme à coefficients indéterminés, on obtient de suite une première intégrale de l'équation sans second membre :

$$4x^3 - 3x.$$

Une seconde intégrale de la même équation est donnée par deux quadratures dont l'une est immédiate, et une intégrale particulière de l'équation complète est donnée par la méthode de variation des constantes. D'où l'intégrale générale

$$y = A(4x^3 - 3x) + B(4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2},$$

A et B sont des constantes d'intégration.

La forme des intégrales indéfinies à calculer par la méthode précédente, ou même la forme de l'équation proposée, conduisent au changement de variable

$$x = \sin t, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

L'équation transformée

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 9y = \frac{5}{2} \sin 2t$$

admét comme intégrale générale

$$y = A \cos 3t + B \sin 3t + \frac{1}{2} \sin 2t.$$

(Lille, juillet 1920.)

1° ÉPREUVE THÉORIQUE. — On considère un système d'axes rectangulaires : 1° Vérifier que les surfaces intégrales S de l'équation aux dérivées partielles (E) du premier ordre :

$$(E) \quad (1 + p^2 + q^2)(bx - ay) - (px + qy - z) \\ [p(b - y) - q(a - x)] = 0,$$

jouissent de la propriété suivante : sur une surface (S) les courbes (C) le long desquelles le plan tangent à (S) demeure à une distance constante de l'origine sont aussi les courbes de contact des cônes circonscrits à (S), ayant leur sommet sur la droite (D) :

$$(D) \quad \begin{cases} x = a, \\ y = b. \end{cases}$$

2° Montrer, sans calculs, que l'équation (E) admet comme intégrale complète une famille de cônes ayant leur sommet sur (D) et que les courbes (C) relatives à toutes les surfaces intégrales de (E) sont les courbes d'un complexe. Achever l'intégration de (E). Que peut-on dire encore des courbes (C) ?

3° Transformer l'équation (E) par la transformation définie par les relations

$$x' = p, \quad y' = q, \quad z' = px + qy - z.$$

La nouvelle équation (E') que l'on obtient ainsi est linéaire. Intégrer (E') et montrer quelle est la relation géométrique entre la congruence caractéristique de cette équation et l'intégrale complète de (E) précédemment trouvée.

SOLUTION. — 1° Les deux familles de lignes envisagées dans l'énoncé sont définies par les relations

$$d \frac{(\rho x + qy - z)^2}{1 + \rho^2 + q^2} = 0, \quad (a - x) d\rho + (b - y) dq = 0,$$

l'équation (E) est la condition de compatibilité entre ces deux relations.

2° Les cônes ayant leur sommet sur (D) et circonscrits aux sphères de centre O forment l'intégrale complète demandée. Les courbes (C) sont caractéristiques de (E); ce sont des cercles, lignes de courbure des surfaces (S).

3° L'équation (E') est

$$(1 + x'^2 + y'^2)(bp' - aq') - z'[x'(b - q') - y'(a - x')] = 0;$$

sa congruence caractéristique est constituée par des courbes planes, polaires réciproques des cônes précédemment considérés.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer à 10^{-3} près l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dz}{x^4 - \sqrt{1,153} x^2 + 1}$. On calculera d'abord l'intégrale $\int \frac{z^2 dz}{z^4 - \sqrt{1,153} z^2 + 1}$ prise le long d'un contour formé d'un demi-cercle de centre O et d'une partie de l'axe des x .

SOLUTION. — En posant $2 \cos \alpha = \sqrt{1,153}$, on trouve

$$\frac{\pi}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

que l'on calcule par les tables.

(Dijon, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. x étant la variable indépendante et y la fonction inconnue, on considère l'équation

$$(1) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

et l'on demande :

(A) Quelle relation doit exister entre P et Q pour que l'équation (1) admette deux intégrales linéairement distinctes dont l'une est la dérivée de l'autre, et d'intégrer dans ce cas l'équation;

(B) D'exprimer dans la même hypothèse, à l'aide d'une même fonction arbitraire, les couples de fonctions P et Q satisfaisant à la relation demandée ci-dessus;

(C) Si l'équation (1) peut admettre, dans les conditions de (A) deux couples d'intégrales y_1 et y_1' , y_2 et y_2' , tels que y_1 , et y_2 soient linéairement distinctes.

II. Étant donnée l'équation

$$(2) \quad (1+x^2)(1-x^2)^2 y'' - 4x(1-x^2)y' + (1-3x^2)y = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^4)^2 e^x,$$

vérifier que l'équation sans second membre possède la propriété énoncée au paragraphe (A) et intégrer complètement l'équation (2).

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — I. (A) On doit avoir

$$(3) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad y'' + P(x)y'' + Q(x)y' = 0,$$

ou les conditions équivalentes

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad P'(x)y' + Q'(x)y = 0.$$

On en tire aisément la condition demandée

$$Q'P'' - P'Q'' + Q'^2 - PP'Q' + QP'^2 = 0,$$

et, pour y , la valeur

$$(4) \quad y = ce^{-\int \frac{Q'}{P} dx};$$

le cas où $\frac{P'}{Q}$ serait constant ($y = ce^{kx}$) doit être exclu.

(B) Les relations (3) donnent immédiatement P et Q exprimés à l'aide de la seule arbitraire y (le cas de $y = ce^{kx}$ étant toujours exclu).

(C) Soit

$$y_2 = k_1 y_1 + k_2 y_1';$$

on doit avoir

$$y_2' = k_1 y_1' + k_2 y_1'' = c_1 y_1 + c_2 y_1',$$

d'où

$$c_1 y_1 + (c_2 - k_1) y_1' - k_2 y_1'' = 0.$$

On en conclut aisément que P et Q doivent être constants et, cette condition étant vérifiée, on obtiendra une infinité de couples répondant à la question. Si les racines de l'équation caractéristique sont distinctes il faudra prendre

$$y_1 = \alpha_1 e^{r_1 x} + \beta_1 e^{r_2 x}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{r_1 x} + \beta_2 e^{r_2 x},$$

avec

$$\alpha_1 \beta_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \beta_2 \neq 0, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0;$$

si ces racines sont égales,

$$y_1 = e^{rx}(\alpha_1 + \beta_1 x), \quad y_2 = e^{rx}(\alpha_2 + \beta_2 x),$$

$$\beta_1 \neq 0, \quad \beta_2 \neq 0, \quad \alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0.$$

II. La vérification n'offre pas de difficultés et la fonction y de l'égalité (4) est

$$c \sqrt{1-x^2}.$$

On en déduit la solution générale de l'équation proposée

$$y = \frac{e^x(1-x)^2}{\sqrt{1-x^2}} + c_1(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - c_2 x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer par la méthode des résidus, en utilisant des rectangles dont un côté est parallèle à l'axe des quantités réelles, les intégrales suivantes prises le long de l'axe des quantités réelles, a désignant une quantité complexe $\alpha + i\beta$ dont la partie réelle α est

comprise entre 0 et 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}(1+e^{2x})}{(1+e^x)(1+e^{3x})} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)^2}.$$

INDICATIONS. — Pour la première intégrale on intégrera le long du rectangle de hauteur 2π et de base $-l, +l$ sur l'axe réel et l'on fera tendre l vers l'infini. On obtient ainsi :

$$I = \frac{2\pi}{3 \sin a\pi} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{(1-4a)\pi}{6} \pi + 1 - a \right\}.$$

Pour la seconde intégrale on trouvera de même (rectangle de hauteur 4π)

$$I = \frac{2(1-2a)\pi}{\sin 2a\pi}.$$

(Nancy, juin 1920.)

ERRATUM.

Page 179, ligne 5, après la première parenthèse, *au lieu de — lire =.*

[L²11 d]

SUR LES SYSTÈMES DE QUADRIQUES AYANT MÊMES PROJECTIONS DE LEURS LIGNES DE COURBURE SUR UN PLAN PRINCIPAL COMMUN ;

PAR M. D'OCAGNE.

1. Soit

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

(avec $A = a^2$, $B = \pm b^2$, $C = \pm c^2$, et, suivant l'habitude, $a > b > c$ dans le cas de l'ellipsoïde) l'équation d'une quadrique rapportée à ses axes.

En vertu du théorème de Dupin, ses lignes de courbure sont données par ses intersections avec les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} + \frac{z^2}{C + \lambda} = 1,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'équation des projections de ces lignes de courbure sur l'un ou l'autre des plans de projection, Oxy par exemple,

$$\frac{x^2(A - C)}{A(A + \lambda)} + \frac{y^2(B - C)}{B(B + \lambda)} = 1.$$

Le moyen le plus simple de trouver l'enveloppe de ces lignes est de former leur équation en coordonnées plückériennes

$$\frac{u^2 A(A + \lambda)}{A - C} + \frac{v^2 B(B + \lambda)}{B - C} = 1.$$

Elle définit un faisceau tangentiel comprenant

(pour $\lambda = -C$) la section même de la quadrique, et
 (pour $\lambda = \infty$) la conique dégénérée formée par le système de deux points

$$u^2 \frac{A}{A-C} + v^2 \frac{B}{B-C} = 0,$$

c'est-à-dire par les points à l'infini des droites

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{B(A-C)}{A(C-B)}},$$

qui ne sont autres que les traces, sur le plan principal considéré, des plans cycliques diamétraux perpendiculaires à ce plan. Autrement dit : *les projections des lignes de courbure de la quadrique sur un de ses plans principaux sont données par les coniques inscrites dans le losange formé par les tangentes à la section principale contenue dans ce plan, menées par les ombilics situés sur cette section* (1).

2. Chacune des coniques inscrites dans ce losange peut être prise pour section principale d'une quadrique ayant pour ombilics les points de contact de cette conique avec les côtés du losange. Pour chacune de ces quadriques les projections des lignes de courbure sur le plan principal considéré seront donc les mêmes. Étudions le système de quadriques ainsi obtenu.

Voyons d'abord comment les longueurs des axes de chacune d'elles sont géométriquement déterminées, et, pour que la construction en soit réelle, plaçons-nous dans le cas d'un ellipsoïde dont on projette les lignes

(1) Nous avons donné une démonstration géométrique de ce théorème dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, (1^{er} sem. 1921, p. 1640).

Reste à trouver le demi-axe b dirigé suivant Oy . Le plan cyclique diamétral intérieur à l'angle xOz ayant pour trace la médiane OM du triangle OST , toute la question se réduit à déterminer le point B situé sur OM de l'ellipse dont les demi-axes sont OA et OC , problème bien facile à résoudre. En effet, si la perpendiculaire à Ox menée par M rencontre en M' la droite SP' , OM' est le diamètre du cercle principal correspondant au diamètre OM de l'ellipse; si donc ce diamètre OM' rencontre ce cercle principal en B' , la perpendiculaire abaissée de B' sur Ox donne sur OM le point B cherché.

On a ainsi les trois demi-axes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ de l'ellipsoïde d'ombilic P (1).

Pour nous rendre compte de la façon dont varie le demi-axe OB avec la position de l'ombilic P sur la tangente ST , nous ferons la remarque que voici :

On a

$$\frac{OB}{OM} = \frac{OB'}{OM'} = \frac{OP'}{OM'}$$

Or, la similitude des triangles rectangles $OP'P_0$ et $OM'M_0$ donne

$$\frac{OP'}{OM'} = \frac{P_0P'}{OM_0}$$

Donc

$$\frac{OB}{OM} = \frac{P_0P'}{OM_0}$$

Le demi-axe OB varie donc, à un facteur constant près, comme l'ordonnée P_0P' du cercle décrit sur OS pour diamètre.

Lorsque le point P vient en H , pied de la perpendiculaire abaissée de O sur ST , les points P' et P'' se con-

(1) La construction ici donnée fournit la solution de la question posée par nous sous le n° 2369 (1918, p. 399).

fondent aussi avec ce point; en ce cas $a = c$ et, par suite, nécessairement $a = b = c$. Il est, au reste, facile de vérifier qu'on a bien, en ce cas, $OB = OH$. En effet, la dernière égalité écrite donne alors

$$\frac{OB}{OM} = \frac{H_0 H}{OM_0}.$$

Mais, d'après la similitude des triangles rectangles OHH_0 et OMM_0 , on a

$$\frac{OH}{OM} = \frac{H_0 H}{OM_0}.$$

Il en résulte bien que, dans ce cas,

$$OB = OH.$$

3. Étudions maintenant l'enveloppe des quadriques du système. Posant $OS = h$, $OT = k$, $ST = l$, prenons comme paramètre variable le rapport $\frac{TP}{PS} = \rho$. Nous avons immédiatement

$$OP_0 = \frac{\rho h}{1 + \rho}, \quad P_0 S = \frac{h}{1 + \rho}, \quad OP_1 = \frac{k}{1 + \rho},$$

puis

$$\begin{aligned} OA^2 &= OP_0 \cdot OS = \frac{\rho h^2}{1 + \rho}, \\ OB^2 &= \frac{OM^2 \cdot P_0 P_1^2}{OM_0^2} = \frac{OM^2 \cdot OP_0 \cdot P_0 S}{OM_0^2} \\ &= \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{\rho h}{1 + \rho} \cdot \frac{h}{1 + \rho} = \frac{\rho l^2}{(1 + \rho)^2}, \\ OC^2 &= OP_1 \cdot OT = \frac{k^2}{1 + \rho}. \end{aligned}$$

L'équation de l'ellipsoïde correspondant est donc

$$(1) \quad (1 + \rho) \frac{x^2}{h^2} + (1 + \rho)^2 \frac{y^2}{l^2} + \rho(1 + \rho) \frac{z^2}{k^2} = \rho,$$

ou

$$\rho^2 \left(\frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} \right) + \rho \left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{2y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} - 1 \right) + \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{l^2} = 0;$$

dont l'enveloppe est donnée par

$$\left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{2y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} - 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{l^2} \right) \left(\frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} \right) = 0$$

ou

$$(2) \quad \left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{z^2}{k^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{2y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} \right) + 1 = 0.$$

Cette surface du quatrième ordre présente des particularités intéressantes, et tout d'abord celle d'admettre une *double génération par un système de deux coniques*. En effet, l'équation précédente peut s'écrire *ad libitum*

$$(2') \quad \left(\frac{z^2}{k^2} - \frac{x^2}{h^2} - 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{l^2} \right) = 0$$

ou

$$(2'') \quad \left(\frac{x^2}{h^2} - \frac{z^2}{k^2} - 1 \right)^2 - 4 \left(\frac{z^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} \right) = 0.$$

Si l'on fait soit $y = \mu x$ dans (2'), soit $y = \nu z$ dans (2''), le premier membre se décompose en un produit de deux facteurs du second degré, et, par suite, on peut dire que *la section de l'enveloppe par tout plan passant soit par Oz, soit par Ox, se compose de deux coniques*.

En particulier, si l'on fait $z = 0$ dans (2''), on obtient

$$\left(\frac{x^2}{h^2} - 1 \right)^2 - 4 \frac{y^2}{l^2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{h^2} - 1 - \frac{2y}{l} \right) \left(\frac{x^2}{h^2} - 1 + \frac{2y}{l} \right) = 0,$$

système des deux paraboles d'axe Oy, ayant pour som-

metts, sur cet axe, les points $y = \pm \frac{l}{2}$, que nous appellerons U et U', passant en outre par S et son symétrique S' par rapport à O, et dont, par suite, si V et V' sont sur Oy les points $y = \pm l$, les tangentes en S et S' sont respectivement VS et VS' pour l'une, V'S et V'S' pour l'autre.

De même, faisant $x = 0$ dans (2'), on voit que la section de l'enveloppe par le plan Oyz se compose des deux paraboles de sommets U et U', et passant par T et T' où les tangentes sont VT et VT' pour l'une, V'T et V'T' pour l'autre.

La surface offre donc en S et S' d'une part, T et T' de l'autre des points doubles où les tangentes sont situées sur des cônes du second degré admettant évidemment pour plans principaux ceux qui, passant par leurs sommets, sont communs à toutes les quadriques du système. On en déduit immédiatement que les cônes des tangentes en S et S' sont coupés par le plan Oyz suivant l'ellipse dont les axes sont TT' et VV', et les cônes des tangentes en T et T' par le plan Oxy suivant l'ellipse dont les axes sont SS' et VV'.

4. Nous ferons encore la remarque que voici : chaque quadrique du système, d'équation (1), touche l'enveloppe de ce système suivant la courbe définie, en plus de cette équation, par sa dérivée relativement à ρ , c'est-à-dire par

$$\frac{x^2}{h^2} + 2(1 + \rho)\frac{y^2}{l^2} + (1 + 2\rho)\frac{z^2}{k^2} = 1.$$

Or, l'élimination de $\frac{z^2}{k^2}$, d'une part, de $\frac{x^2}{h^2}$, de l'autre, entre cette dernière équation et (1) donne

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{l^2} = \frac{\rho^2}{(1 + \rho)^2}$$

et

$$\frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} = \frac{1}{(1+\rho)^2},$$

ellipses homothétiques, par rapport au centre O, respectivement de celle de sommets S, S', V, V', d'une part, T, T', V, V', de l'autre, que nous venons de trouver comme définissant les cônes des tangentes aux points doubles T et T', d'une part, S et S', de l'autre.

D'ailleurs, on voit que les demi-axes de l'une sont égaux à OP₀ suivant Ox, TP suivant Oy, et ceux de l'autre, à OP₁ suivant Oz et PS suivant Oy.

Quant à la projection de la courbe de contact de la quadrique et de son enveloppe, sur le plan Oxz, elle est donnée par

$$\frac{z^2}{k^2} - \frac{x^2}{h^2} = \frac{1-\rho}{1+\rho},$$

hyperbole ayant pour asymptotes les traces, sur ce plan, des plans diamétraux cycliques, et qui se réduit à ce système de deux droites pour $\rho = 1$, c'est-à-dire pour le cas où l'ombilic P se confond avec le milieu M de ST.

[O'2a]

**SUR LA FORMULE D'HOLDITCH
ET LES APPLICATIONS QU'ON PEUT EN DÉDUIRE ;**

PAR M. RAYMOND ESTÈVE,
Professeur au Lycée de Toulouse.

ÉTABLISSEMENT DE LA FORMULE. — Soit à résoudre le problème suivant :

Une droite ABC se déplace dans un plan de façon

que trois de ses points décrivent trois courbes fermées $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ et que la droite décrive un angle total $2k\pi$. Trouver la relation qui existe entre les aires limitées par les trois courbes.

Soient $x = f(t), y = g(t)$ les équations paramétriques de la courbe $\Gamma_A, f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions périodiques du paramètre t dont la période commune est T .

Prenons sur la droite mobile un sens positif, soit le sens ABC. Désignons par φ l'un quelconque des angles de Ox avec AC. Si x, y sont les coordonnées de A, x_1, y_1 celles de B, et x_2, y_2 celles de C, on a, en supposant les axes rectangulaires et en posant $\overline{AB} = l$ et $\overline{BC} = l'$,

$$\begin{cases} x_1 = x + l \cos \varphi, \\ y_1 = y + l \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1 + l' \cos \varphi, \\ y_2 = y_1 + l' \sin \varphi. \end{cases}$$

Lorsque t varie de t_0 par exemple à $t_0 + T$, le point A décrit entièrement la courbe Γ_A ; les courbes décrites par B et C se fermeront, à condition que φ soit une fonction de t telle que l'on ait

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul.

A un sens de parcours f_A du point A sur la courbe Γ_A correspondent un sens de parcours f_B du point B sur Γ_B et un sens de parcours f_C du point C sur Γ_C . Posons

$$S_A = \int_{f_A} x dy, \quad S_B = \int_{f_B} x_1 dy_1, \quad S_C = \int_{f_C} x_2 dy_2.$$

Si, par exemple, Γ_A est une courbe sans points doubles, on sait que S_A est l'aire de cette courbe,

affectée du signe *plus* ou *moins* suivant le sens de parcours f_A .

Nous allons établir la formule suivante, dite « formule d'Holditch » :

$$S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

On a

$$\begin{cases} x = x_1 - l \cos \varphi, & \begin{cases} x_2 = x_1 + l' \cos \varphi, \\ y_2 = y_1 + l' \sin \varphi; \end{cases} \\ y = y_1 - l \sin \varphi, \end{cases}$$

$$dy = dy_1 - l \cos \varphi d\varphi, \quad dy_2 = dy_1 + l' \cos \varphi d\varphi;$$

$$x dy = x_1 dy_1 - l dy_1 \cos \varphi - l x_1 \cos \varphi d\varphi + l^2 \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$x_2 dy_2 = x_1 dy_1 + l' dy_1 \cos \varphi + l' x_1 \cos \varphi d\varphi + l'^2 \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Multipliant les deux membres de la première des deux égalités précédentes par l' , les deux membres de la deuxième par l et ajoutant membre à membre les égalités obtenues, on a

$$l' x dy + l x_2 dy_2 = (l + l') x_1 dy_1 + ll' (l + l') \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Or,

$$\overline{AB} = l, \quad \overline{BC} = l', \quad \overline{CA} = -(l + l').$$

On obtient

$$(1) \quad \overline{BC} \cdot x dy + \overline{CA} \cdot x_1 dy_1 \\ + \overline{AB} \cdot x_2 dy_2 + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cos^2 \varphi d\varphi = 0.$$

En intégrant,

$$\overline{BC} \int_{t_0}^{t_0+\Gamma} x dy + \overline{CA} \int_{t_0}^{t_0+\Gamma} x_1 dy_1 \\ + \overline{AB} \int_{t_0}^{t_0+\Gamma} x_2 dy_2 \\ + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2k\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = 0,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0 \\ \text{(formule d'Holditch).} \end{array} \right.$$

Remarque I. — Supposons que le point A doive parcourir α fois la courbe Γ_A pour que les courbes Γ_B et Γ_C se ferment; de ce fait, α est le plus petit nombre entier positif pour que l'on ait

$$\varphi(t + \alpha T) = \varphi(t) + 2k\pi \quad (k \text{ entier quelconque}).$$

Intégrons la relation (1) de t_0 à $t_0 + \alpha T$; nous aurons

$$\begin{aligned} \overline{BC} \int_{t_0}^{t_0 + \alpha T} x \, dy + \overline{CA} \int_{t_0}^{t_0 + \alpha T} x_1 \, dy_1 \\ + \overline{AB} \int_{t_0}^{t_0 + \alpha T} x_2 \, dy_2 \\ + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2k\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 0. \end{aligned}$$

D'où la nouvelle formule :

$$(3) \quad \alpha \cdot \overline{BC} \cdot S_A + \overline{CA} \cdot S_B + \overline{AB} \cdot S_C + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Remarque II. — Intégrons la relation (1), de t_0 à t_1 , où t_0 et t_1 sont quelconques :

$$\begin{aligned} \overline{BC} \int_{t_0}^{t_1} x \, dy + \overline{CA} \int_{t_0}^{t_1} x_1 \, dy_1 \\ + \overline{AB} \int_{t_0}^{t_1} x_2 \, dy_2 \\ + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2 \varphi \, d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0).$$

D'où la formule

$$\begin{aligned} \overline{BC} \int_{\text{arc } \alpha} x \, dy + \overline{CA} \int_{\text{arc } \beta} x_1 \, dy_1 \\ + \overline{AB} \int_{\text{arc } \gamma} x_2 \, dy_2 \\ + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot R \end{aligned}$$

en posant

$$R = \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0,$$

les arcs α , β , γ étant les arcs décrits respectivement par A, B, C lorsque le paramètre t varie de t_0 à t_1 . La formule précédente peut s'écrire

$$(4) \quad \overline{BC} \cdot S_\alpha + \overline{CA} \cdot S_\beta + \overline{AB} \cdot S_\gamma + \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} (\varphi_1 - \varphi_0) \\ + \frac{1}{4} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot R = 0.$$

Cette formule s'applique au cas général où les courbes décrites par A, B, C sont quelconques, fermées ou non. Les S représentent alors des intégrales de la forme $\int x dy$ prises le long de certains arcs et dans certains sens, ces derniers étant liés entre eux par le mouvement de la droite ABC.

Remarque III. — Si l'on a

$$\varphi_1 - \varphi_0 = k\pi$$

la formule (4) devient :

$$(5) \quad \overline{BC} \cdot S_\alpha + \overline{CA} \cdot S_\beta + \overline{AB} \cdot S_\gamma + k \frac{\pi}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

APPLICATIONS DE CES DIVERSES FORMULES. — I. *Relation de Stewart.* — Le mouvement de la droite ABC étant une rotation (de 2π) autour du point M, la formule (2) donne immédiatement la relation de Stewart :

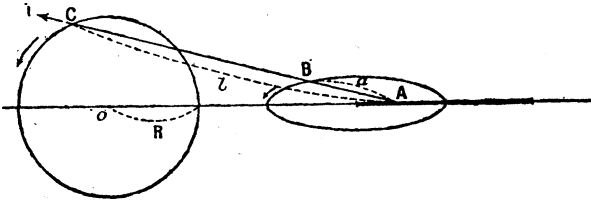
$$\overline{MA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{MB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{MC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

II. *Aire de l'ellipse.* — Les points A et B décrivant deux droites rectangulaires, la même formule conduit à la valeur classique de l'aire de l'ellipse décrite par C.

III. *Système bielle-manivelle* : $AC = l$; $AB = a$. —
On voit aisément que :

$$S_A = 0; \quad S_C = \pi R^2; \quad \text{variation de } \varphi = 0; \quad \text{d'où } k = 0.$$

Fig. 1.



La formule (2) donne

$$S_B \cdot \overline{CA} + \pi R^2 \cdot \overline{AB} = 0;$$

d'où

$$S_B = \pi R^2 \frac{a}{l}.$$

Cela suppose B à gauche de A; si B était à droite de A, on aurait

$$S_B = -\pi R^2 \frac{a}{l}.$$

La courbe décrite par B n'a qu'une boucle; l'aire intérieure à cette boucle a pour valeur, dans tous les cas, $\pi R^2 \frac{a}{l}$.

IV. *Courbes déduites de la tractrice*. — En posant $AB = a$, on a

$$y = a \sin \alpha, \quad \frac{dy}{dx} = -\tan \alpha, \quad dy = a \cos \alpha \, d\alpha;$$

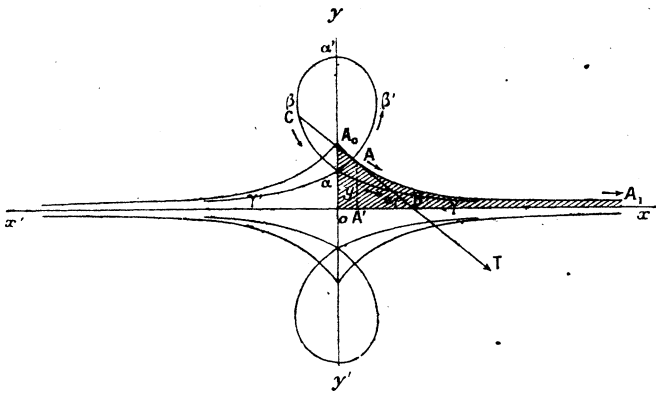
d'où

$$dx = -\frac{a \cos^2 \alpha \, d\alpha}{\sin \alpha}, \quad y \, dx = -a^2 \cos^2 \alpha \, d\alpha,$$

et l'on en déduit facilement que l'aire de la surface

couverte de hachures sur la figure est $\frac{\pi a^2}{4}$; l'aire intérieure à la courbe formée par les quatre branches a pour valeur πa^2 .

Fig. 2.



Appliquons alors la formule (2) aux trois courbes décrites par A, B, C. On voit aisément que

$$S_A = -\pi a^2, \quad S_B = 0,$$

car B décrit l'axe $x'Ox$.

On a donc ($k = 1$)

$$-\pi a^2 \cdot \overline{BC} + S_C \cdot \overline{AB} + \pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Mais

$$\overline{AB} = a \quad (\text{le sens AT coïncidant avec le sens AB}),$$

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = a + \overline{BC};$$

d'où

$$S_C = \pi \overline{BC} (2a + \overline{BC}),$$

$$S_C = 0 \text{ pour } \begin{cases} \overline{BC} = 0 & (\text{les points B et C coïncident}); \\ \overline{BC} = -2a & (\text{les points B et C sont symétriques par rapport à A}). \end{cases}$$

Il convient d'insister sur le cas où les points B et C

sont de part et d'autre de A. — La courbe Γ_C a alors plusieurs boucles, comme le montre la figure, construite dans le cas particulier où B et C sont symétriques par rapport à A. On voit aisément que l'on a

$$S_C = -\pi l(2a - l)$$

en posant

$$BC = l, \quad \text{d'où} \quad \overline{BC} = -l.$$

Sur la figure

$$S_C = 2 \text{ aire } \alpha\beta\alpha'\beta' - 2 \text{ aire } x'Ox\gamma\alpha\gamma'.$$

Pour B et C symétriques par rapport à A, $S_C = 0$, c'est-à-dire

$$\text{aire } \alpha\beta\alpha'\beta' = \text{aire } x'Ox\gamma\alpha\gamma'.$$

V. *Cardioïde*. — Nous déduirons plus loin ce cas, soit des épicycloïdes, soit des conchoïdes, mais nous allons l'étudier directement pour donner une application des formules (3) et (5).

Le point A décrit un cercle de rayon R, la droite BAC passe constamment par un point fixe de ce cercle et les points B et C sont de part et d'autre de A à des distances

$$AB = CA = 2R;$$

ils décrivent une cardioïde d'aire S.

La formule (3), appliquée pour $\alpha = 2$, $k = 1$ et

$$S_A = \pi R^2, \quad S_B = S_C = S,$$

donne

$$S = 6\pi R^2;$$

la formule (5) ($k = 1$), où

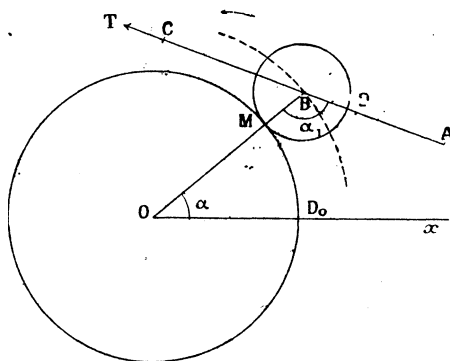
$$S_\alpha = \pi R^2 \quad S_\beta + S_\gamma = S,$$

conduit au même résultat.

APPLICATION DE LA FORMULE D'HOLDITCH AUX ÉPICYCLOÏDES ET HYPOCYCLOÏDES :

I. *Épicycloïdes*. — Soient R le rayon du cercle roulette et nR (n entier positif) le rayon du cercle base. La droite ABC , telle que A et C soient symétriques par rapport à B , est invariablement liée au cercle roulette. Les points A et C décrivent des épicycloïdes égales.

Fig. 3.



Soit φ l'un des angles de Ox avec AT , par exemple celui qui est nul lorsque D est en D_0 . On a

$$\text{arc } D_0M = \text{arc } DM,$$

d'où

$$\alpha_1 = n\alpha$$

et

$$\varphi = \alpha + \alpha_1 = (n+1)\alpha;$$

d'autre part,

$$S_A = S_C, \quad S_B = \pi(n+1)^2 R^2, \quad \overline{AB} = \overline{BC} = l, \quad \overline{CA} = -2l,$$

et la variation de φ est $2(n+1)\pi$ puisque α varie de 2π ; k est donc égal à $n+1$. Il vient donc

$$S_A l + \pi(n+1)^2 R^2(-2l) + S_A l + (n+1)\pi l \cdot l(-2l) = 0$$

et l'on en tire

$$S_A = \pi(n+1)[l^2 + (n+1)R^2].$$

Remarque. — Si $l > R$, S_A est une somme algébrique d'aires, l'épicycloïde présentant plusieurs boucles.

Si $l \leq R$, l'épicycloïde n'a qu'une boucle et S_A est l'aire intérieure.

Cas particulier : $l = R$. — On a alors

$$S_A = \pi(n+1)(n+2)R^2,$$

et l'aire comprise entre l'épicycloïde et le cercle base est

$$S = S_A - \pi n^2 R^2 = \pi R^2(3n+2);$$

l'aire comprise entre le cercle base et l'arceau d'épicycloïde compris entre deux points de rebroussement vaut enfin

$$s = \frac{S}{n} = 3\pi R^2 + \frac{2\pi R^2}{n}.$$

Pour n égal à 1, on retrouve la cardioïde et à la limite pour n infini, on obtient l'aire de l'arceau de cycloïde.

II. *Hypocycloïdes.* — R étant le rayon du cercle roulette et nR celui du cercle base, on trouve, comme précédemment, la formule

$$S_A = \pi(n-1)[(n-1)R^2 - l^2]$$

et, dans le cas particulier $l = R$,

$$S_A = \pi(n-1)(n-2)R^2, \quad S = \pi R^2(3n-2),$$

$$s = \frac{S}{n} = 3\pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{n}.$$

Remarque. — Soient deux cercles de même rayon R roulant sur un cercle de rayon nR , l'un extérieurement, l'autre intérieurement; un point quelconque du cercle extérieur décrit une épicycloïde, un point quelconque du cercle intérieur une hypocycloïde et l'on a

$$s_e = 3\pi R^2 + \frac{2\pi R^2}{n}, \quad s_h = 3\pi R^2 - \frac{2\pi R^2}{n};$$

la somme $s_e + s_h$ égale à $6\pi R^2$ est donc indépendante de n .

APPLICATION DE LA FORMULE D'HOLDITCH AU CAS OÙ LA DROITE ABC PASSE CONSTAMMENT PAR UN POINT FIXE O :

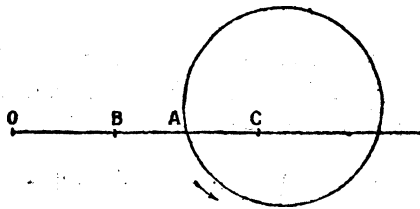
1° *Le point A décrivant la courbe Γ_A , la droite OA ne fait aucun tour complet autour de O .*

Γ_A étant une courbe fermée, il en est de même de Γ_B et Γ_C ; on a ici $k = 0$, d'où

$$S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} = 0.$$

Dans le cas particulier où B et C sont symétriques par

Fig. 4.



rapport à A , l'ensemble des deux courbes Γ_B et Γ_C constitue la conchoïde de Γ_A et

$$S_B + S_C = 2S_A.$$

Si le point A décrit un cercle,

$$S_B + S_C = 2\pi R^2.$$

2° *Le point A, décrivant la courbe Γ_A , la droite OA fait k tours autour de O.*

Γ_A étant une courbe fermée, Γ_B et Γ_C sont aussi des courbes fermées; on a

$$S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} \pm k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0,$$

+ ou - suivant que la droite OA tourne dans le sens trigonométrique ou en sens contraire.

Dans le cas particulier où B et C sont symétriques par rapport à A, on obtient aisément

$$S_B + S_C = 2(S_A \pm k\pi \overline{AB}^2).$$

En supposant que Γ_A soit un cercle décrit par A dans le sens trigonométrique et O un point intérieur au cercle, on a $k = 1$ et l'on doit prendre le signe +.

$$S_B + S_C = 2\pi(R^2 + \overline{AB}^2).$$

3° *Le point O est un point simple de Γ_A .*

Il est aisé de constater que les courbes décrites par B et C se ferment si le point A décrit deux fois la courbe Γ_A . La formule à appliquer est la suivante :

$$2S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} + k\pi \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

Si B et C sont symétriques par rapport à A, les points B et C décrivent la même courbe et dans le même sens. En faisant dans la formule précédente

$$\overline{CA} = \overline{AB}, \quad \overline{BC} = -2\overline{AB} \quad \text{et} \quad S_B = S_C,$$

on trouve

$$S_B = 2S_A + k\pi \overline{AB}^2.$$

Exemple : Conchoïde du cercle. — La courbe Γ_A est un cercle ; $k = 1$. Trois cas à distinguer

a. $AB < 2R$ (R étant le rayon du cercle Γ_A). La conchoïde admet le point O comme point double : c'est un limaçon de Pascal.

$$S_A = \pi R^2, \quad S_B = S_C = S + s,$$

S étant l'aire intérieure à la grande boucle et s l'aire intérieure à la petite boucle. Si l'on pose $AB = l$, on a

$$S + s = 2\pi R^2 + \pi l^2.$$

b. $AB = 2R$. La conchoïde admet le point O comme point de rebroussement : c'est une cardioïde,

$$S_A = \pi R^2, \quad S_B = S_C = S,$$

S étant l'aire intérieure à la cardioïde. On a

$$S = 2\pi R^2 + \pi(2R)^2 = 6\pi R^2.$$

c. $AB > 2R$. La conchoïde n'a pas de point double :

$$S_A = \pi R^2, \quad S_B = S_C = S,$$

S étant l'aire intérieure à la courbe. On a

$$S = 2\pi R^2 + \pi l^2.$$

Remarque. — Si B et C sont symétriques par rapport à A , la courbe ouverte décrite par B se raccorde avec la courbe ouverte décrite par C .

On peut appliquer la formule (5), à savoir :

$$S_A \cdot \overline{BC} + S_B \cdot \overline{CA} + S_C \cdot \overline{AB} + k \frac{\pi}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0,$$

dans laquelle on fera

$$S_x = S_A; \quad \overline{CA} = \overline{AB}; \quad \overline{BC} = -2\overline{AB}; \quad S_\beta + S_\gamma = S,$$

où $S = \int x dy$ le long de la conchoïde. On retrouve la formule

$$S = 2S_A + k\pi\overline{AB}^2.$$

APPLICATION DE LA FORMULE D'HOLDITCH A UN GROUPE DE TROIS COURBES, DONT DEUX SONT CONFONDUES. — Les points A et B décrivent la même courbe et dans le même sens.

On a donc $S_A = S_B$. La formule d'Holditch devient

$$S_A \cdot (\overline{BC} + \overline{CA}) + S_C \cdot \overline{AB} + k\pi\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

On en tire

$$S_C = S_A + k\pi\overline{AC} \cdot \overline{BC}.$$

Si $k = 0$, alors $S_C = S_A$; A et B décrivent une lemnicate de Bernoulli, $k = 0$, et comme $S_A = 0$, on en déduit $S_C = 0$.

Si $k = 1$, alors $S_C = S_A + \pi\overline{AC} \cdot \overline{BC}$; A et B décrivant, dans le sens trigonométrique, un cercle de rayon R, on a $k = 1$, et comme $S_A = \pi R^2$, on en déduit

$$S_C = \pi R^2 + \pi\overline{AC} \cdot \overline{BC},$$

ce que l'on peut vérifier aisément, car alors la courbe Γ_C est un cercle concentrique au cercle Γ_A . On a, en effet,

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = d^2 - R^2; \quad \text{d'où} \quad S_C = \pi d^2,$$

ce que donne un calcul direct.

Cas particulier : C est le milieu de AB. — En

supposant $k = 1$, on a

$$S_C = S_A - \pi \frac{\overline{AB}^2}{4}.$$

Cas où les points A et B sont confondus. — Cela revient à dire que la droite AC reste constamment tangente à la courbe Γ_A .

La formule

$$S_C = S_A + k\pi \overline{AC} \cdot \overline{BC}$$

s'applique encore en y faisant

$$\overline{BC} = \overline{AC}, \quad \text{d'où} \quad S_C = S_A + k\pi \overline{AC}^2.$$

Si $k = 1$, $S_C = S_A + \pi l^2$ en posant $\overline{AC} = l$.

On vérifie aisément cette formule en supposant que Γ_A est un cercle.

Si Γ_A est un limaçon de Pascal décrit par A dans un sens tel que $S_A = 2\pi R^2 + \pi l^2$, on a $k = 2$. On en tire :

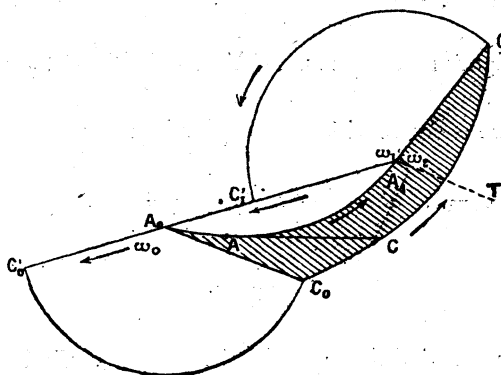
$$S_C = 2\pi(R^2 + \overline{AC}^2) + \pi l^2.$$

Conséquence de la formule $S_C = S_A + \pi l^2$. — Considérons une courbe Γ_A limitée à deux points A_0 et A_1 . Soient A un point quelconque de cette courbe, AT la demi-tangente en ce point orientée dans le sens $A_0 A_1$, et sur cette demi-droite un point C tel que $\overline{AC} = l$, l étant une longueur constante. Lorsque le point A se déplace de A_0 à A_1 , le segment AC balaye une certaine aire. Si l'on convient de compter positivement toute aire balayée par AC tournant dans le sens trigonométrique et négativement toute aire balayée par AC tournant en sens contraire, nous allons démontrer que l'aire balayée par AC lorsque A se déplace de A_0 à A_1 , a pour valeur $\frac{1}{2}\theta l^2$, θ désignant $\int_{A_0}^{A_1} d\varphi$, où $\varphi = (\widehat{Ox, AT})$.

Pour établir cette formule, plaçons-nous d'abord dans le cas où la courbe Γ_A forme, avec le segment A_0A_1 , une courbe convexe.

Lorsque A se déplace de A_0 à A_1 , AC tourne toujours dans le même sens, que nous supposons, pour fixer les idées, être le sens trigonométrique.

Fig. 5.



Considérons la courbe fermée constituée par Γ_A et A_0A_1 . La formule

$$S_C = S_A + \pi l^2$$

pourra s'appliquer à condition d'adjoindre en A_0 et A_1 deux arcs de cercle de centres A_0 et A_1 et de rayons nuls. Le point A décrivant la courbe fermée formée de Γ_A , de A_0A_1 et des deux arcs de cercle précédents, le point C décrira la courbe fermée formée de Γ_C , du segment C_0C_1 et de deux arcs de cercle C_0C_0 , C_1C_1 de rayons égaux à AC .

Désignons par S l'aire limitée par Γ_A , Γ_C , A_0C_0 et A_1C_1 , c'est-à-dire l'aire dont nous cherchons

l'expression, par σ l'aire limitée par Γ_A et A_0A_1 . On a

$$S_C = \sigma + S + \text{aire secteur } A_0C_0C'_0 + \text{aire secteur } A_1C_1C'_1,$$

$$S_A = \sigma.$$

En appliquant la formule $S_C = S_A + \pi l^2$, on trouve

$$S = \pi l^2 - \text{aire secteur } A_0C_0C'_0 - \text{aire secteur } A_1C_1C'_1,$$

$$S = \pi l^2 - \frac{1}{2} l^2 \omega_0 - \frac{1}{2} l^2 \omega_1 = \frac{1}{2} l^2 (2\pi - \omega_0 - \omega_1) = \frac{1}{2} l^2 \omega_2,$$

en désignant par ω_2 l'angle TA_1C_1 , A_1T étant parallèle à A_0C_0 .

Avec les conventions faites plus haut, on a

$$\omega_2 = \theta, \quad \text{où } \theta = \int_{A_0}^{A_1} d\varphi, \quad \varphi = \widehat{(Ox, AC)};$$

d'où

$$S = \frac{1}{2} \theta l^2.$$

Pour en déduire que la formule est générale, il suffira de prendre sur Γ_A les points de division B_1, B_2, \dots, B_{n-1} tels que les arcs $A_0B_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}A_1$ remplissent la condition précédente. On a pour chacun de ces arcs, algébriquement,

$$S_i = \frac{1}{2} \theta_i l^2,$$

d'où, pour l'aire totale,

$$S = \frac{1}{2} l^2 (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) = \frac{1}{2} \theta l^2.$$

Application. — Reprenons le cas de la tractrice (*fig. 2*); on déduit aisément de la formule qui précède l'aire de la tractrice et l'aire de la courbe décrite par le point C de la figure 2.

[R8]

SUR UN INVARIANT INTÉGRAL
SE RATTACHANT A LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ;

PAR M. J. HAAG.

Soit un système matériel dépendant de n paramètres indépendants q_1, q_2, \dots, q_n . Soit T son énergie cinétique, forme quadratique des dérivées q'_1, q'_2, \dots, q'_n , par rapport au temps. Posons

$$(1) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En Mécanique statistique, on représente les différents états possibles du système par les points de l'espace E_{2n} ayant pour coordonnées $(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$, et l'on considère la probabilité pour qu'un état pris au hasard ait son point représentatif P situé dans un domaine donné comme proportionnel au volume V de ce domaine (cf. JEANS, *The dynamical theory of gases*, Chap. V). Pour qu'une telle hypothèse soit légitime, il faut évidemment qu'elle soit indépendante du choix des variables q_i . Autrement dit, si l'on fait un changement de variables quelconque

$$(2) \quad y_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et si l'on pose

$$(3) \quad x_i = \frac{\partial T}{\partial y'_i},$$

le point Q de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ doit décrire un volume V' égal au volume V ,

quand P décrit V. C'est ce que je me propose de vérifier dans cette courte Note.

Il s'agit de prouver que le jacobien

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)}$$

est égal à l'unité.

Remarquons d'abord que les y ne sont pas fonctions des p ; donc, les éléments de J qui sont communs aux n dernières lignes et aux n premières colonnes sont nuls. Il s'ensuit que J est le produit des deux déterminants d'ordre n :

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(p_1, p_2, \dots, p_n)}, \quad J'' = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(q_1, q_2, \dots, q_n)}.$$

Posons, pour abrégier l'écriture,

$$a_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k}.$$

On a

$$y'_i = \sum_k a_{ik} q'_k;$$

d'où, en résolvant par rapport aux q' et désignant par A_{ik} le coefficient de a_{ik} dans le développement de J'' ,

$$(4) \quad q'_i = \frac{\sum A_{ki} y'_k}{J''}.$$

Nous avons maintenant

$$(5) \quad x_i = \frac{\partial T}{\partial y'_i} = \sum \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial y'_i} = \sum \frac{A_{ik}}{J''} p_k.$$

Dès lors, on voit que J' est égal au déterminant adjoint de J'' , divisé par J''^n ; donc,

$$J' = \frac{J''^{n-1}}{J''^n} = \frac{1}{J''}.$$

D'où, $J = 1$.

C. Q. F. D.

AGREGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.
(CONCOURS SPÉCIAL DE 1920.)

Problème d'Analyse.

1° Déterminer la surface S la plus générale dont les normales sont toutes tangentes à un cylindre de révolution C de rayon R . On calculera les coordonnées x, y, z d'un point M de S en fonction des angles θ et φ qui définissent la direction de la normale MN à S en M , de sorte que les cosinus directeurs de cette normale soient

$$\sin \theta \cos \varphi, \quad \sin \theta \sin \varphi, \quad \cos \theta.$$

(On supposera les trois axes de coordonnées rectangulaires et l'on prendra pour Oz l'axe du cylindre C .)

2° Déterminer géométriquement les lignes de courbure des surfaces S .

3° A quelles relations doivent satisfaire θ et φ le long d'une de ces lignes de courbure.

4° Les normales à la surface S sont tangentes, non seulement au cylindre C , mais aussi à une deuxième nappe C' de la développée de S . Déterminer analytiquement la surface C' .

5° Montrer que les sections de S et de C' par un plan quelconque parallèle à xOy sont des courbes simples.

6° Calculer les rayons de courbure principaux de S en un point M de S .

7° On suppose développé le cylindre C sur l'un de ses plans tangents, et l'on y prend comme axes la génératrice de contact et le développement de la base du cylindre, les nouvelles coordonnées étant appelées z et σ . On appelle I et J les développements des intersections I_0 et J_0 du cylindre C avec les surfaces C' et S, et l'on demande de déterminer analytiquement I et J.

8° On demande la développée de J.

9° On demande de déterminer S de manière que la courbe I soit un cercle.

SOLUTION PAR M. ROBERT,

Professeur à l'École primaire supérieure de Poitiers.

1° Nous pouvons envisager cette première partie soit au point de vue ponctuel, soit au point de vue tangentiel. Examinons-les successivement.

La normale au point x, y, z a pour équations :

$$\frac{X-x}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{Y-y}{\sin \theta \sin \varphi} = \frac{Z-z}{\cos \theta}.$$

Écrivons que cette normale est perpendiculaire aux deux directions

$$\frac{dx}{\partial \theta}, \frac{dy}{\partial \theta}, \frac{dz}{\partial \theta}, \quad \text{et} \quad \frac{dx}{\partial \varphi}, \frac{dy}{\partial \varphi}, \frac{dz}{\partial \varphi},$$

et qu'elle est tangente au cylindre C.

Nous obtenons le système linéaire suivant qui définit les surfaces S :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \theta} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial y}{\partial \theta} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cos \theta = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cos \theta = 0, \\ x \sin \varphi - y \cos \varphi = \varepsilon R \end{cases}$$

($\varepsilon = \pm 1$).

Pour intégrer ce système, remarquons qu'il suffit d'en ajouter une solution particulière à la solution générale du système sans second membre :

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} \sin \theta \cos \varphi + \frac{dy}{d\theta} \sin \theta \sin \varphi + \frac{dz}{d\theta} \cos \theta = 0, \\ \frac{dx}{d\varphi} \sin \theta \cos \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{dz}{d\varphi} \cos \theta = 0, \\ x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0. \end{cases}$$

La forme de cette dernière équation nous invite à poser :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

ρ étant une nouvelle fonction inconnue de θ et φ .

La signification géométrique du système (S') est d'ailleurs immédiate : ce système (S') fournit les surfaces dont les normales rencontrent Oz , c'est-à-dire les surfaces de révolution d'axe Oz . Donc son intégrale générale est de la forme

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = F(\rho),$$

en appelant ρ une fonction de θ seul.

Pour avoir l'intégrale générale du système (S), il suffit maintenant d'en connaître une intégrale particulière, par exemple une intégrale telle que l'on ait

$$\frac{dx}{d\theta} = 0, \quad \frac{dy}{d\theta} = 0, \quad \cos \theta = 0.$$

Nous aurons alors à déterminer deux fonctions x et y de φ seul à l'aide des conditions :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\varphi} \cos \varphi + \frac{dy}{d\varphi} \sin \varphi &= 0, \\ x \sin \varphi - y \cos \varphi &= \varepsilon R. \end{aligned}$$

On satisfait à ces équations en prenant :

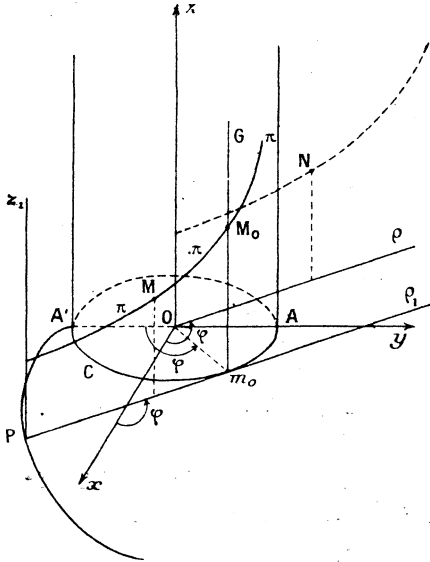
$$\begin{aligned}x &= \varepsilon R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi), \\y &= -\varepsilon R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi).\end{aligned}$$

Cette surface particulière est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz ; la base en est une développante du cercle de centre O et de rayon R .

Nous aurons donc comme solution de notre problème :

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi + \varepsilon R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi), \\y &= \rho \sin \varphi - \varepsilon R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \\z &= F(\rho).\end{aligned}$$

D'après la manière même dont nous avons formé les équations de cette surface, nous pouvons en donner la



génération géométrique suivante : Soit M le point de coordonnées x, y, z . Le vecteur \vec{OM} est la somme

géométrique de deux vecteurs :

$$\vec{ON} : \rho \cos \varphi, \quad \rho \sin \varphi, \quad F(\rho),$$

$$\vec{OP} : \varepsilon R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi), \quad -\varepsilon R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \quad 0.$$

Considérons la demi-droite $O\rho$ du plans xy telle que

$$(Ox, O\rho) = \varphi.$$

La section de la surface S' par le plan $zO\rho$ est la courbe

$$z = F(\rho).$$

Le point P décrit une développante de cercle dans le plan des xy . Menons par le point P les axes $P\rho_1$ et Pz_1 , respectivement parallèles aux axes $P\rho$ et Pz et de même sens. Soit π le profil du plan $z_1 P\rho_1$, profil ayant pour équation $z_1 = F(\rho_1)$. Ce profil engendre donc la surface S . D'ailleurs le plan des $z_1 \rho_1$ reste constamment normal à la développante de cercle précédente; donc il roule sans glisser sur le cylindre C , et par suite la surface S est une surface moulure.

Examinons maintenant le même problème au point de vue tangentiel. La surface S peut être considérée comme l'enveloppe du plan

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta + f(\theta, \varphi) = 0.$$

Le point M de contact de ce plan avec la surface S est défini par l'équation précédente, et par les deux suivantes :

$$\begin{aligned} x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0, \\ -x \sin \theta \sin \varphi + y \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations sont précisément celles

de la normale en M à la surface S. Écrivons que cette normale est tangente au cylindre de révolution C, ce qui est très aisé en tenant compte de la dernière équation qui représente la projection de la normale sur le plan des xy .

Nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \varepsilon R \sin \theta \quad (\varepsilon = \pm 1);$$

on satisfait à cette dernière équation en prenant

$$f = \varepsilon R [\varphi \sin \theta + G(\theta)],$$

$G(\theta)$ désignant une fonction quelconque de θ .

Résolvant les trois équations précédentes et tenant compte de la valeur de f , nous obtenons les coordonnées x, y, z d'un point M de S. Si l'on ne considère pas comme distinctes deux surfaces S symétriques par rapport à l'origine, nous pourrions faire $\varepsilon = +1$. C'est ce que nous supposons dans la suite. Nous avons alors pour les équations de la surface S :

$$(1) \begin{cases} x = R \{ \sin \varphi - \cos \varphi [\varphi + G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta] \}, \\ y = -R \{ \cos \varphi + \sin \varphi [\varphi + G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta] \}, \\ z = R \{ G'(\theta) \sin \theta - G(\theta) \cos \theta \}. \end{cases}$$

Nous obtenons donc les mêmes formules que précédemment; il suffit de poser

$$\begin{aligned} \rho &= -R[G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta], \\ F(\rho) &= R[G'(\theta) \sin \theta - G(\theta) \cos \theta]. \end{aligned}$$

Les équations de la normale à S s'écrivent

$$(2) \begin{cases} \cos \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi) - z \sin \theta + R[\varphi \cos \theta + G'(\theta)] = 0, \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi + R = 0. \end{cases}$$

2° On peut retrouver par la géométrie le mode de

génération de la surface S qui vient d'être indiquée. Soit S une surface dont chaque normale est tangente au cylindre C . En chaque point Q du cylindre passe une certaine normale à S , contenue dans le plan tangent en ce point au cylindre C . Nous considérons une congruence de droites formée par une famille de tangentes au cylindre, et nous désirons qu'il existe une famille de surfaces normales aux droites de la congruence.

Si ces surfaces existent, elles admettent des lignes de courbure, définies par la condition que les normales à S le long d'une quelconque de ces lignes forment une surface développable. Cherchons à associer les droites d'une congruence de tangentes au cylindre de manière à obtenir des surfaces développables. Nous obtenons un tel résultat en prenant toutes les tangentes issues des divers points d'une même génératrice; ces tangentes sont alors situées dans un plan tangent au cylindre.

Nous aurons la deuxième famille de développables de la congruence en considérant les courbes (λ) du cylindre qui, en chacun de leurs points, sont tangentes à la droite QT correspondante.

Les plans focaux de la congruence qui correspondent à la droite QT sont le plan tangent au cylindre et le plan osculateur à celle des courbes précédentes qui passe au point Q . Ces plans sont les plans tangents aux deux développables de la congruence qui passent par la génératrice QT . Mais, d'autre part, ces plans doivent contenir les tangentes principales à la surface S cherchée. Donc ces plans doivent être rectangulaires. Les courbes (λ) sont donc telles que le plan osculateur en chacun de leurs points est normal au cylindre; ce sont des hélices, formant sur le cylindre une famille à un

paramètre (1). Or chaque ligne de courbure de S est l'intersection de S avec une développable de la congruence; par suite :

a. Les lignes de courbure du deuxième système seront situées dans les plans tangents au cylindre C .

b. Les lignes de courbure du premier système sont les trajectoires orthogonales des tangentes aux hélices (λ). Donc ces lignes de courbure sont des développantes de cercle contenues dans des plans parallèles au plan xOy . Ces lignes de courbure constituent une famille de trajectoires orthogonales des plans tangents au cylindre C . Considérons deux de ces trajectoires qui coupent un plan tangent au cylindre en M et en M' . La distance MM' demeure constante, quel que soit le plan tangent au cylindre C , car le vecteur MM' demeure constamment normal à son déplacement. Il s'ensuit que l'ensemble des trajectoires orthogonales découpe sur un plan tangent au cylindre une figure de forme invariable. On retrouve ainsi la génération de la surface moulure (2).

(1) Ce résultat se généralise immédiatement : si l'on cherche les surfaces S dont les normales sont tangentes à une surface donnée S_1 , on obtiendra une première famille de développables de cette congruence de normales en considérant toutes les développables qui admettent pour arêtes de rebroussement ∞^1 géodésiques de la surface S_1 .

(2) Plus généralement, si l'on cherche les surfaces S dont les normales sont tangentes à une développable donnée Σ , les raisonnements précédents subsistent; on fera rouler sans glisser un plan P sur la développable Σ ; un profil Γ quelconque tracé dans ce plan engendrera la surface S la plus générale répondant à la question (surface de Monge). Les deux systèmes de lignes de courbure de S seront encore les sections de S pour les plans tangents à Σ , et les trajectoires orthogonales des précédentes. La deuxième nappe de la surface focale de cette congruence sera engendrée par la développée Γ' du profil Γ : ce sera encore une surface de Monge.

3° Il résulte de ce qui précède que, le long des lignes de courbure situées dans les plans tangents au cylindre C, on a $\varphi = \text{const.}$, et pour les autres $\theta = \text{const.}$ Cherchons à retrouver analytiquement ces résultats à l'aide des formules d'Olinde Rodrigues. Appelons λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale à une surface, et soit d une différentielle qui correspond à un déplacement suivant une ligne de courbure. Un point de la normale au point x, y, z aura des coordonnées de la forme

$$x + \lambda u, \quad y + \mu u, \quad z + \nu u.$$

Nous aurons à exprimer que cette normale possède une enveloppe, c'est-à-dire que l'on a, pour une valeur convenable de u ,

$$\frac{d(x + \lambda u)}{\lambda} = \frac{d(y + \mu u)}{\mu} = \frac{d(z + \nu u)}{\nu}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dx + u d\lambda}{\lambda} &= \frac{dy + u d\mu}{\mu} = \frac{dz + u d\nu}{\nu} \\ &= \frac{\lambda(dx + u d\lambda) + \mu(dy + u d\mu) + \nu(dz + u d\nu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}. \end{aligned}$$

Remarquant que le numérateur du dernier rapport est nul, on a

$$dx + u d\lambda = 0, \quad dy + u d\mu = 0, \quad dz + u d\nu = 0.$$

Ce sont les formules d'Olinde Rodrigues. On exprimera que le point x, y, z décrit une ligne de courbure en écrivant que ces équations admettent une racine commune en u .

Développant les calculs, les formules précédentes

deviennent :

$$\begin{aligned} \sin \varphi \left\{ R[\varphi + G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta] - u \sin \theta \right\} d\varphi \\ - \cos \varphi \cos \theta \left\{ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u \right\} d\theta = 0, \\ \cos \varphi \left\{ R[\varphi + G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta] - u \sin \theta \right\} d\varphi \\ + \sin \varphi \cos \theta \left\{ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u \right\} d\theta = 0, \\ \left\{ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u \right\} d\theta = 0. \end{aligned}$$

On satisfait à ces trois équations en prenant, soit

$$(3) \quad \begin{cases} d\theta = 0, \\ R[\varphi + G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta] - u \sin \theta = 0, \end{cases}$$

soit

$$(4) \quad \begin{cases} d\varphi = 0, \\ R[G(\theta) + G''(\theta)] - u = 0. \end{cases}$$

On retrouve bien les lignes de courbure $\theta = \text{const.}$ et $\varphi = \text{const.}$ (1). On trouve en outre les deux valeurs de u qui donnent les deux points de contact de la normale avec les deux nappes de la surface focale.

4° La solution de la quatrième partie du problème

(1) L'équation du plan tangent à la surface est

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + z \cot \theta + R \left[\varphi + \frac{G(\theta)}{\sin \theta} \right] t = 0.$$

Les coefficients ξ de ce plan tangent vérifient l'équation $\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta \partial \varphi} = 0$; on peut donc affirmer que les courbes coordonnées sont planes et forment un système conjugué. Si l'on pose en outre

$$\xi_1 = \cos \varphi, \quad \xi_2 = \sin \varphi, \quad \xi_3 = \cot \theta,$$

on vérifie aisément que

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2 + \zeta_3^2} = 0;$$

donc les courbes coordonnées forment un système orthogonal; comme il est conjugué, il est formé des lignes de courbure.

Voir DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, (Chap. VII).

est fournie par les équations (3) et (4). Un point d'une nappe de la surface focale a pour coordonnées

$$x + u \sin \theta \cos \varphi, \quad y + u \sin \theta \sin \varphi, \quad z + u \cos \theta,$$

où x, y, z ont les valeurs paramétriques précédemment calculées en fonction de θ et de φ , et où u a l'une des valeurs précédentes.

Si l'on prend pour u la valeur définie par la deuxième des équations (3), on trouve aisément pour les coordonnées d'un point de la nappe de la développée :

$$(C) \quad R \sin \varphi, \quad -R \cos \varphi, \quad \frac{R}{\sin \theta} [G'(\theta) + \varphi \cos \theta].$$

On retrouve bien le cylindre C , et les lignes $\theta = \text{const.}$ sont bien des hélices tracées sur ce cylindre.

Si l'on prend pour u la valeur définie par la deuxième des équations (4), on trouve pour les coordonnées d'un point de la deuxième nappe C' :

$$(C') \quad \left\{ \begin{array}{l} R \sin \varphi - R \cos \varphi [\varphi + G'(\theta) \cos \theta - G''(\theta) \sin \theta], \\ -R \cos \varphi - R \sin \varphi [\varphi + G'(\theta) \cos \theta - G''(\theta) \sin \theta], \\ R [G'(\theta) \sin \theta + G''(\theta) \cos \theta]. \end{array} \right.$$

La surface C' est donc encore une surface moulure, engendrée par la développée du profil π . Ce résultat était d'ailleurs évident géométriquement.

5° Les sections de S et de C' par des plans horizontaux sont les courbes $\theta = \text{const.}$ de ces deux surfaces. Ce sont des développantes de cercle, d'après ce qui précède.

6° On appelle « rayons de courbure principaux en un point d'une surface » les rayons de courbure des sections normales qui contiennent les directions principales. L'une de ces sections est ici donnée par un plan $\varphi = \text{const.}$; le rayon de courbure correspondant est $R [G(\theta) + G''(\theta)]$, et le centre de courbure corres-

pendant est le point de contact avec C' . L'autre centre de courbure s'obtient aisément en remarquant que les lignes de courbure $\theta = \text{const.}$ sont planes et appliquant le théorème de Meusnier. Le centre de courbure d'une de ces lignes de courbure est la projection orthogonale du deuxième centre de courbure principal, qui est alors situé sur le cylindre C .

On aurait également pu remarquer que les centres de courbure principaux en un point d'une surface coïncident avec les points de contact de la normale à cette surface avec les deux nappes de la développée. Les deux rayons de courbure principaux sont donc donnés par les valeurs de u fournies par les équations (3) et (4).

7° Soit $M(x, y, z)$ un point de l'intersection J_0 de S avec C . Les coordonnées x, y, z de ce point satisfont aux équations (1), ainsi qu'à l'équation $x^2 + y^2 = R^2$, ce qui donne, le long de la courbe J_0 ,

$$(5) \quad \varphi + G(\theta) \sin \theta + G'(\theta) \cos \theta = 0.$$

La courbe I_0 d'intersection de C' et C sera définie de même par la relation

$$(6) \quad \varphi = G''(\theta) \sin \theta - G'(\theta) \sin \theta,$$

obtenue en écrivant qu'un point de C' est sur le cylindre C .

Désignons par P_1 le plan tangent au cylindre C le long de la génératrice passant par $A'(O, -R, O)$. Prenons deux axes dans ce plan P_1 : l'un $A'\tau$ parallèle à Ox , et l'autre $A'z$ parallèle à Oz . Soit G la génératrice du cylindre C correspondant à la valeur φ . Désignons par M_0 un point de J_0 situé sur G , et soit m_0 sa projection sur le plan des xy . Si nous développons le cylindre sur le plan P_1 , le point M_0 a pour coordonnées

dans ce plan

$$\sigma = \text{arc} A' m_0 = R \varphi$$

et z .

D'où pour les équations de J, en tenant compte de (5),

$$(J) \quad \begin{cases} \sigma = -R[G(\theta)\sin\theta + G'(\theta)\cos\theta], \\ z = R[G'(\theta)\sin\theta - G(\theta)\cos\theta]. \end{cases}$$

On reconnaît là les équations du profil π qui engendre la surface moulure. Le résultat est d'ailleurs évident géométriquement; en effet, nous savons que la surface S est engendrée par un profil π d'un plan P qui roule sans glisser sur le cylindre C, alors J_0 n'est autre que la courbe dessinée par le profil π sur ce cylindre. Inversement, si l'on déroule le cylindre sur un de ses plans tangents, tous les points de J_0 viendront coïncider avec π . Donc les courbes J et π sont identiques.

L'équation (6), qui nous définit la courbe I_0 d'intersection de C' et de S, fournirait de même l'équation de la courbe I dans le plan P_1 :

$$(I) \quad \begin{cases} \sigma = R[G''(\theta)\sin\theta - G(\theta)\cos\theta], \\ z = R[G''(\theta)\cos\theta + G'(\theta)\sin\theta]. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, la courbe I n'est autre que le profil π' qui engendre la surface moulure C'. Donc I est la développée de J.

8° Cette partie du problème est résolue ci-dessus. Analytiquement on peut opérer comme suit : Éliminons successivement $G'(\theta)$ et $G(\theta)$ entre les équations donnant le profil J; nous obtenons :

$$(\Delta) \quad \sigma \sin\theta + z \cos\theta + R G(\theta) = 0,$$

$$(\Delta') \quad \sigma \cos\theta - z \sin\theta + R G'(\theta) = 0.$$

Le point (σ, z) est donc à l'intersection des deux

droites Δ et Δ' ; la courbe J est donc l'enveloppe de la droite Δ .

On trouve de même que le profil I est le lieu du point de rencontre des deux droites :

$$(\Delta') \quad \sigma \cos \theta - z \sin \theta + R G'(\theta) = 0,$$

$$(\Delta'') \quad -\sigma \sin \theta - z \cos \theta + R G''(\theta) = 0,$$

ce qui prouve bien que I est la développée de J.

9° Si l'on veut que I soit un cercle, il suffit d'écrire que le rayon de courbure de I est égal à une constante RC_1 . Comme I est l'enveloppe de Δ' , on a donc

$$R[G'(\theta) + G'''(\theta)] = RC_1,$$

équation différentielle dont l'intégrale générale est de la forme

$$G(\theta) = C_1 \theta + C_2 + C_3 \cos \theta + C_4 \sin \theta,$$

les C étant des constantes. Il est donc facile de déterminer la surface S répondant à la question. Le profil π est alors une développante de cercle.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2402.

(1919, p. 120; 1922, p. 40.)

Si l'on joint un point d'une ellipse aux deux sommets situés sur un axe et le point diamétralement opposé aux deux sommets situés sur l'autre axe, les quatre droites ainsi obtenues et les axes de l'ellipse sont six tangentes d'une parabole.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. FAUCHEUX.

Tout d'abord, soient dans un cercle de centre O deux diamètres rectangulaires AA' et BB'; un autre diamètre PP'; soit F le point de la circonférence symétrique à la fois de P par rapport à BB' et de P' par rapport à AA'.

PA et PA' bissectrices de $\widehat{P'PF}$; P'B et P'B' bissectrices de $\widehat{PP'F}$; AA' et BB' bissectrices de $\widehat{P'OF}$ sont tangentes à la parabole de foyer F et de directrice PP'.

En projetant orthogonalement (1), on démontre une généralisation du théorème proposé, dans l'énoncé duquel on peut remplacer les sommets par les extrémités de deux diamètres conjugués quelconques; l'axe de la parabole a évidemment la direction conjuguée du diamètre de l'ellipse projection de PP'.

Autres solutions par l'AUTEUR et par MM. COLUCCI, H. DUMAS, HARMEGNIES, LEMAIRE, PARROD, PELVOISIN, G. ROY, SERBAN A. GHEORGHIN, PIEDVACHE, TULOUP.

2405.

(1919, p. 159; 1922, p. 40.)

L'équation

$$1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^m - (\beta x)^n = 0,$$

α et β étant des quantités positives, a deux racines positives si

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn};$$

on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}} > \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}.$$

A. PELLET.

SOLUTION

Par M. JOSEPH DENAUX.

1. Il est commode d'effectuer le changement de variable

$$(\beta x)^n = t,$$

(1) Une projection conique conduira à un énoncé, plus général encore, que le lecteur obtiendra aisément.

qui conduit à l'équation

$$(\alpha\beta)^m = t^{\frac{m}{n}}(1-t)$$

dont les racines positives sont nécessairement comprises entre zéro et un. En élevant à la puissance n on obtient enfin

$$(\alpha\beta)^{mn} = t^m(1-t)^n.$$

Le second membre, nul pour $t = 0$ et $t = 1$, atteint son maximum pour

$$\frac{m}{t} = \frac{n}{1-t} = \frac{m+n}{1}$$

et la valeur de ce maximum est donc

$$M = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}};$$

il en résulte bien, pour l'équation proposée, deux racines positives dans le seul cas où

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn}.$$

2. Le maximum M de la fonction $t^m(1-t)^n$ est au moins égal à la valeur de cette fonction pour $t = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}$. C'est la limite inférieure indiquée dans l'énoncé.

Pour obtenir la limite supérieure il suffit de rechercher le maximum de

$$\log t^m(1-t)^n = m \log t + n \log(1-t),$$

lorsque, t étant fixe, on fait varier m et n en maintenant leur produit constant. On a, pour ce maximum,

$$\frac{\log t}{n} = \frac{\log(1-t)}{m} = \frac{m \log t + n \log(1-t)}{2mn} = \frac{\log t(1-t)}{m+n},$$

d'où, quels que soient m, n, t (t compris entre 0 et 1), l'inégalité

$$\log t^m(1-t)^n \leq \frac{2mn}{m+n} \log t(1-t),$$

et, a fortiori,

$$\leq \frac{4mn}{m+n} \log \frac{1}{2};$$

M est donc bien au plus égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}}$.

Autre solution par M. M.-F. EGAN.

2421.

(1919, p. 360; 1922, p. 79.)

La courbe (M') se déduit de la courbe (M) par la construction suivante : le point M' est à la rencontre de la perpendiculaire élevée en M au rayon vecteur OM et de la perpendiculaire menée de O à la tangente en M à la courbe (M).

Construire le centre de courbure μ de la courbe (M), connaissant la normale de la courbe (M').

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

La construction cherchée est la suivante :

La normale à (M') en M' rencontre en N la perpendiculaire ON à OM', la parallèle à OM menée par N rencontre OM' en K, KM' est le double du rayon de courbure de la courbe (M) en M.

En effet si

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$$

est la tangente à (M) en M, (M') aura pour équation

$$\begin{cases} x = \left(p + \frac{p'^2}{p}\right) \cos \varphi, \\ y = \left(p + \frac{p'^2}{p}\right) \sin \varphi, \end{cases}$$

on aura

$$\overline{ON} = \left(p + \frac{p'^2}{p}\right)' = \frac{p'}{p} \left[2(p + p'') - \frac{p^2 + p'^2}{p}\right],$$

d'où, H étant l'intersection de la tangente à (M) en M avec OM',

r le rayon de courbure de (M) en M,

$$\frac{\overline{ON}}{2r - \overline{OM'}} = \frac{MH}{OH}, \quad \text{d'où} \quad 2r = KM'.$$

Autre solution par M. G. Roy.

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION PRÉCÉDENTE,

Par M. J. P.

Des considérations cinématiques très élémentaires peuvent conduire à la construction demandée.

Le centre instantané de l'angle droit OMM' est immédiat et l'on en déduit, comme il est bien connu, que MM' touche son enveloppe en M'', symétrique de M' par rapport à M. La droite joignant M' au centre de courbure cherché μ , coupe OM' en un point P qu'il suffit de déterminer.

Soit pour cela une règle disposée à chaque instant suivant OM', son extrémité étant en M'. Soit \vec{W} la vitesse du point de la règle qui est en P; soient $\vec{V}_M, \vec{V}_{M'}, \vec{V}_{M''}$ les vitesses des points M, M', M''. On a (PM' étant parallèle à μM et de longueur double)

$$\vec{V}_{M'} - \vec{W} = 2\vec{V}_M$$

et (M étant le milieu de M'M'')

$$\vec{V}_{M'} + \vec{V}_{M''} = 2\vec{V}_M.$$

Donc \vec{W} égale $-\vec{W}_{M''}$ et est un vecteur parallèle à MM'. Le point P s'obtient par suite en menant par N (centre instantané de la règle) la parallèle à OM : c'est le point K de M. Bouvaist et la droite KM'' coupe la normale à (M) au point μ cherché.



{D2 b α]

**SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES
D'UNE VARIABLE RÉELLE:**

PAR M. GEORGES VALIRON.

Dans la plupart des Traités d'Analyse, la théorie des fonctions analytiques est faite directement dans le cas des fonctions de variables complexes. Il semble être utile de montrer dans l'enseignement, au moins dans le cas d'une seule variable, ce que l'on peut obtenir par les procédés élémentaires lorsqu'on suppose les éléments réels; on met ainsi en évidence ce que l'on gagne ensuite à introduire la variable complexe. C'est ce que je veux faire dans cette Note qui n'a aucune prétention à l'originalité.

1. Avec M. Denjoy, nous appellerons *segment* a, b l'ensemble des points x tels que $a \leq x \leq b$, et *intervalle* a, b l'ensemble des points tels que $a < x < b$. La proposition suivante se déduit aisément des propriétés démontrées dans tous les cours :

I. *Si la série entière*

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

admet un intervalle de convergence non nul — \mathbf{R} , \mathbf{R} et si $\mathbf{M}(\rho)$ désigne la somme de la série des valeurs absolues pour $\rho < \mathbf{R}$, on a, pour $|x_0| < \rho$,

$$(1) \quad |f^{(n)}(x_0)| < \frac{\rho \mathbf{M}(\rho)}{(\rho - |x_0|)^{n+1}} n!,$$

$f(x)$ est donc développable en série de Taylor suivant les puissances de $(x - x_0)$ dans l'intervalle

$$x_0 - R + |x_0|, \quad x_0 + R - |x_0|.$$

La définition élémentaire des fonctions analytiques est la suivante (GOURSAT, Chap. IX) : une fonction $f(x)$ est dite analytique sur le segment a, b lorsqu'elle est développable en série de Taylor dans le voisinage de tout point x_0 du segment, c'est-à-dire lorsque, x_0 appartenant au segment (a, b) , $f(x)$ est la somme de sa série de Taylor

$$(2) \quad f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots$$

dans un intervalle comprenant le point x_0 à son intérieur. Cet énoncé un peu vague est aisé à préciser en utilisant la proposition I : $f(x)$ coïncide avec la somme $F(x)$ de la série (2) dans toute la portion de l'intervalle de convergence de cette série qui appartient au segment a, b . Soit en effet R_0 le rayon de convergence de la série (2) (qui est positif par hypothèse), supposons par exemple $x_0 + R_0 < b$ et considérons les points de l'intervalle $x_0, x_0 + R_0$. $F(x)$ et $f(x)$ sont égaux par hypothèse dans le voisinage de x_0 ; or il est impossible que, pour un nombre x_1 de l'intervalle $x_0, x_0 + R_0$, $f(x_1)$ soit différent de $F(x_1)$ tandis que $f(x)$ serait égal à $F(x)$ pour x inférieur à x_1 , car les deux fonctions $F(x)$ et $f(x)$ sont continues au point x_1 ; il est de même impossible que $F(x)$ égale $f(x)$ pour x inférieur ou égal à x_1 , tandis que $F(x)$ et $f(x)$ seraient différents pour x supérieur à x_1 , car les deux fonctions sont développables en série de Taylor au point x_1 , elles coïncident à gauche de ce point, elles ont donc mêmes dérivées en ce point et par suite même développement de Taylor.

En se rappelant que, lorsque la série entière (2) converge pour l'une des limites de l'intervalle de convergence, sa somme est encore continue jusqu'en ce point, on voit que la définition donnée ci-dessus se complète de la façon suivante :

II. *Lorsqu'une fonction $f(x)$ est analytique sur un segment a, b , elle est égale à la somme de son développement de Taylor (2) relatif à un point x_0 de a, b en tout point de a, b où ce développement converge.*

Désignons par $R(x_0)$ le rayon de convergence de la série de Taylor (2); il résulte de ce qui précède que, en tout point du segment $x_0 - R'(x_0), x_0 + R'(x_0)$, $\left[R'(x_0) = \frac{1}{3} R(x_0) \right]$ appartenant à a, b , la série de Taylor de $f(x)$ a un rayon de convergence au moins égal à $2R'(x_0)$. Posons

$$a_1 = a + R'(a), \quad a_2 = a_1 + R'(a_1), \quad \dots, \quad a_p = a_{p-1} + R'(a_{p-1}),$$

les nombres $a_1, a_2, \dots, a_p, \dots$ forment une suite croissante. Je dis qu'il existe un entier q pour lequel $a_q \geq b$. Car dans le cas contraire, la suite infinie des nombres croissants a_p aurait une limite α inférieure ou égale à b et $R'(a_p)$ tendrait vers zéro lorsque p croîtrait indéfiniment. Or, c'est impossible, car $R'(a)$ est positif, donc en tout point du segment $\alpha - R'(a), \alpha$ le rayon de convergence de la série de Taylor est au moins $2R'(a)$. D'où ce résultat, qui est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème général de Borel-Lebesgue sur les intervalles :

III. *On peut décomposer le segment a, b en un nombre fini de segments partiels par des points de division a_1, a_2, \dots, a_{q-1} , tels que, en tout point*

appartenant à l'un de ces segments a_i, a_{i+1} , le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(x)$ soit au moins égal à $2(a_{i+1} - a_i)$.

Au point a_i le rayon de convergence $R(a_i) = 3R'(a_i)$ est au moins le double des nombres $a_{i+1} - a_i$ et $a_i - a_{i-1}$; si $M(a_i)$ est la somme de la série

$$|f(a_i)| + 2R'(a_i)|f'(a_i)| + \dots + [2R'(a_i)]^n \frac{|f^{(n)}(a_i)|}{n!} + \dots$$

la proposition I montre que, pour $a_{i-1} \leq x \leq a_{i+1}$, on aura

$$|f^{(n)}(x)| < \frac{4M(a_i)n!}{\left[\frac{R'(a_i)}{2}\right]^n}$$

et par suite, si M est le plus grand des nombres $4M(a_i)$ ($i = 1, 2, \dots, q-1$) et $2r$ le plus petit des nombres $R'(a_i)$, on voit que, quels que soient l'entier n positif ou nul et le nombre x appartenant au segment a, b , on a l'inégalité

$$(3) \quad |f^{(n)}(x)| < \frac{M}{r^n} n!$$

C'est une condition nécessaire pour que la fonction $f(x)$ soit analytique; elle est aussi suffisante, car elle assure que le reste de la formule de Taylor

$$(4) \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots \\ + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment, pourvu que $|x - x_0| < r$. Donc :

IV. La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit analytique sur le segment a, b est qu'il existe deux nombres M et r tels que la fonction

et ses dérivées vérifient l'inégalité (3) sur tout le segment a, b .

De cette proposition et de la proposition II, on déduit que, si une fonction $f(x)$ satisfait aux inégalités (3) sur un segment a, b et si x_0 est un point du segment a, b , $f(x)$ est la somme de sa série de Taylor relative à x_0 en tout point de a, b où cette série converge. L'étude du reste de la série de Taylor est supprimée. Ainsi la fonction $(1+x)^m$ vérifie la condition (3) sur un segment a, b pourvu que a soit supérieur à -1 , sa série de Mac-Laurin étant convergente dans l'intervalle $-1, +1$, on a, dans cet intervalle,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots$$

On voit quel est l'intérêt pratique de la condition (3). La définition généralement adoptée pour les fonctions analytiques, donnée plus haut, est plus commode que la condition (3) pour montrer que certaines opérations effectuées avec un nombre fini de fonctions analytiques conduisent, sous certaines conditions, à une fonction analytique (voir GOURSAT, Chap. IX). Je signalerai de suite que la condition (3) est cependant utile lorsqu'on s'occupe d'une infinité de fonctions, parce qu'elle permet de comparer la façon dont ces fonctions sont analytiques. On peut dire que les fonctions $f_p(x)$ d'une suite sont également analytiques sur un segment a, b lorsqu'il existe deux nombres fixes M et r , tels que, quels que soient les entiers $n(\geq 0)$ et p et quel que soit x appartenant à a, b , on a

$$(5) \quad |f_p^{(n)}(x)| < \frac{M}{r^n} n!$$

On montre alors, en utilisant un procédé dû à

M. Montel (voir les *Leçons sur les séries de polynomes*) que, de la suite des fonctions $f_p(x)$ on peut extraire une autre suite qui converge uniformément sur a, b vers une fonction limite, analytique sur a, b [et vérifiant la condition (3) où le signe $<$ est remplacé par \leq avec les valeurs de M et r entrant dans (5)]. On en déduit, en utilisant la proposition VI donnée ci-après, que, si une suite de fonctions également analytiques sur a, b converge uniformément en une infinité de points du segment, elle converge uniformément sur tout a, b vers une fonction analytique sur a, b . La propriété n'est plus vraie si l'on ne fait aucune hypothèse sur la façon dont les fonctions de la suite sont analytiques; par exemple, la série de Fourier représentant entre $-\pi$ et $+\pi$ une ligne brisée dont les extrémités ont la même ordonnée est une série de fonctions analytiques sur le segment $-\pi, +\pi$, uniformément convergente sur tout ce segment.

2. La proposition II met de suite en évidence une propriété fondamentale des fonctions analytiques :

V. *Si $f(x)$ est une fonction analytique sur le segment a, b , les dérivées de cette fonction ne peuvent s'annuler simultanément en un point du segment a, b , à moins que $f(x)$ ne se réduise à une constante.*

Car si, x_1 étant un point du segment a, b , les dérivées $f^{(p)}(x_1)$ sont toutes nulles, le développement de Taylor au point x_1 se réduit à son terme indépendant de $x - x_1$, $f(x_1)$, son rayon de convergence est infini, donc $f(x)$ est constant et égal à $f(x_1)$ sur tout le segment a, b .

On peut donner à cette proposition les formes équivalentes suivantes :

1° Deux fonctions analytiques sur un même segment, qui sont égales ainsi que toutes leurs dérivées en un point du segment, coïncident sur ce segment.

2° Une fonction analytique sur un segment est complètement déterminée lorsqu'on donne sa valeur et les valeurs de ses dérivées en un point de ce segment.

3° Si $f(x)$ est une fonction analytique sur a, b et n'est pas constante, à chaque point x_0 du segment en lequel $f(x)$ s'annule correspond un nombre q qui est l'ordre de la première dérivée non nulle en ce point. La formule de Taylor limitée

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^q}{q!} \left\{ f^{(q)}(x_0) + \frac{x-x_0}{q+1} f^{(q+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)] \right\}$$

montre qu'on peut trouver un intervalle $x_0 - \alpha, x_0 + \alpha$ dans lequel $f(x)$ ne s'annule qu'au point x_0 . On dit que x_0 est un zéro d'ordre q de $f(x)$ et l'on voit que les zéros sont des points isolés. Si chaque zéro est compté un nombre de fois égal à son ordre, le nombre des zéros est fini sur a, b . Car, s'il y en avait une infinité, ils auraient un point limite ξ appartenant à a, b ; ce point ξ ne pourrait qu'être un zéro d'ordre fini de $f(x)$, il y aurait dans son voisinage une infinité de zéros, ce qui est impossible. Une fonction analytique sur un segment a, b ne s'annule donc qu'un nombre fini de fois sur ce segment. Par suite :

VI. *Deux fonctions analytiques sur un segment a, b qui sont égales en une infinité de points de ce segment sont identiques.*

Autrement dit, une fonction analytique sur un segment a, b est complètement déterminée par les valeurs

qu'elle prend en une infinité de points de ce segment.

Puisque la dérivée $f'(x)$ étant analytique sur le même segment a, b ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros, on obtient encore cette proposition :

VII. *Une fonction analytique sur un segment a, b est monotone par sections, c'est-à-dire qu'on peut partager a, b en un nombre fini d'intervalles partiels dans lesquels $f(x)$ est ou bien croissante ou bien décroissante.*

Il résultera de là que les courbes analytiques seront des courbes ordinaires, susceptibles d'être représentées graphiquement. Elles pourront servir à délimiter les régions auxquelles s'appliquent les considérations élémentaires sur les transformations d'intégrales curvilignes en intégrales doubles, etc.

Toutes ces propriétés découlent de la proposition V, elles restent vraies pour toutes les classes de fonctions indéfiniment dérivables auxquelles cette proposition s'applique. M. Denjoy a montré récemment (*Comptes rendus*, 1921 et 1922) que les fonctions indéfiniment dérivables sur un segment et telles que, M_n désignant la borne supérieure de $|f^{(n)}(x)|$ sur ce segment, la série

$$(6) \quad \sum M^{-\frac{1}{n}}$$

est divergente, ne peuvent s'annuler ainsi que leurs dérivées en un point du segment sans être identiquement nulles; toutes les propriétés précédentes sont vraies pour ces fonctions. Les fonctions analytiques rentrent dans cette classe plus générale, car, d'après la condition (3), ce sont les fonctions pour lesquelles $M^{-\frac{1}{n}}$ est supérieur à $\frac{k}{n}$; les fonctions non analytiques telles

que la série (6) diverge ont été appelées *fonctions quasi analytiques*. Il résulte des travaux de M. Borel qu'il existe effectivement des fonctions quasi analytiques sur un segment, qui ne sont analytiques sur aucun segment intérieur.

C'est dans l'étude des fonctions analytiques définies par le prolongement d'une série de Taylor que la variable complexe joue vraiment son rôle. Lorsqu'on se borne à la variable réelle, on peut effectuer le prolongement jusqu'aux premiers points singuliers que l'on rencontre à droite et à gauche du point de départ (on peut même les dépasser si ce sont des pôles ou points essentiels). On définit ainsi une fonction analytique *dans un intervalle* (en ce sens qu'elle est analytique sur tout segment intérieur à cet intervalle), ou analytique dans une suite d'intervalles adjacents; mais on ne peut, en général, rattacher l'une à l'autre des fonctions analytiques réelles $f(x)$, $g(x)$ définies dans des intervalles a , b et c , d non adjacents, qui apparaissent nettement comme des branches issues d'un même tronc lorsqu'on introduit la variable complexe. Notons cependant qu'il pourra exister dans certains cas une fonction quasi analytique sur un segment ayant l'une de ses extrémités entre a et b , l'autre entre c et d et coïncidant respectivement en ces points avec les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ (deux fonctions quasi analytiques coïncident en un point lorsqu'elles sont égales en ce point ainsi que leurs dérivées). Il pourra alors sembler légitime de considérer $f(x)$ et $g(x)$, branches analytiques d'une même fonction quasi analytique, comme constituant des branches d'une même fonction analytique réelle, indépendamment de la possibilité de passer de $f(x)$ à $g(x)$ par un prolongement analytique dans le plan complexe.

[H10e]

**SUR UNE FORME REMARQUABLE DE L'INTÉGRALE
DE L'ÉQUATION DES CORDES VIBRANTES ;**

PAR M. S. ZAREMBA.

I. On entend par équation des cordes vibrantes l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(1) \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

où a représente une constante qui peut évidemment être regardée comme positive. Les circonstances dans lesquelles cette équation célèbre se présente en acoustique sont assez connues pour que nous puissions nous dispenser d'insister sur ce sujet, en nous bornant simplement à faire remarquer que, dans les applications, le problème d'intégration de cette équation se présente habituellement sous la forme suivante :

I. *Problème.* — « Déterminer l'intégrale u de l'équation (1) dans le domaine (D) défini par les relations

$$(2) \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

où l est un nombre positif donné, de façon à satisfaire aux conditions que voici :

1° Pour

$$(3) \quad 0 \leq x \leq l,$$

on a

$$(4) \quad (u)_{t=0} = f(x) \quad \text{ainsi que} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} = f_1(x),$$

où $f(x)$ et $f_1(x)$ sont deux fonctions continues données, définies dans l'intervalle $(0, l)$.

2° Pour

$$(5) \quad t > 0,$$

on a

$$(6) \quad (u)_{x=0} = \varphi(t) \quad \text{ainsi que} \quad (u)_{x=l} = \psi(t),$$

où $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont deux fonctions continues données, définies pour les valeurs non négatives de la variable t . »

Une étude complète du problème précédent est faite depuis longtemps et, lorsque les données du problème satisfont aux conditions voulues pour que la solution existe, on sait former, de diverses façons, une formule propre à représenter cette solution. Toutefois, il ne semble pas que, pour la théorie du problème considéré, on ait utilisé les indications qui dérivent des recherches récentes relatives aux équations aux dérivées partielles linéaires et du deuxième ordre ⁽¹⁾. Or, ces indications suggèrent une marche conduisant à une formule qui, lorsque la fonction demandée existe, fait connaître cette fonction sous une forme extrêmement instructive et admirablement adaptée aux applications en Physique.

Nous nous proposons d'établir cette formule d'une façon tout à fait élémentaire.

2. Les notations du numéro précédent étant conservées, regardons x et t comme l'abscisse et l'ordonnée du point d'un plan ω rapporté à un système (S) de

(1) Voir en particulier : HADAMARD, *Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904, p. 242).

coordonnées cartésiennes rectangulaires d'origine O et soit, sur l'axe des abscisses, O' le point qui a pour abscisse le nombre l , considéré dans le problème I. Dans ces conditions le domaine (D) , défini par les relations (2), aura pour image géométrique une bande (B) située dans le plan ϖ , limitée par le segment $\overline{OO'}$ et les deux demi-droites $O\overline{c}$ et $O'\overline{c'}$, dirigées dans le sens de l'axe des ordonnées et ayant pour origines respectives les points O et O' . Cela posé, plaçons-nous dans l'hypothèse suivante :

II. *Hypothèse.* — Le problème I est possible et, en outre, on peut faire correspondre à chacune des trois dérivées secondes de la fonction u une fonction continue dans le domaine (D) et sur la frontière de ce domaine, égale à la dérivée seconde considérée de la fonction u en tout point intérieur au domaine (D) .

III. *Remarque.* — En vertu de l'hypothèse précédente, il correspondra à chacune des deux dérivées premières de la fonction u une fonction continue dans le domaine (D) et sur la frontière de ce domaine, égale, en tout point intérieur du domaine (D) , à la dérivée première considérée de la fonction u .

L'hypothèse II étant adoptée, proposons-nous de calculer la fonction u pour un système de valeurs données des variables x et t ; ce système de valeurs aura pour image géométrique dans le plan ϖ un certain point M . Évidemment il n'y a à considérer que le cas où le point M est situé à l'intérieur de la bande (B) puisque, s'il était situé sur la frontière {de celle-ci, la valeur correspondante de la fonction u ferait partie de l'ensemble des données du problème. Construisons deux lignes polygonales MM_1M_2 et $MM'_1M'_2M'_3$ disposées comme l'indique la figure 1 et telles que tout

côté de chacune d'elles soit parallèle à l'une ou à l'autre des droites

$$x - at = 0 \quad \text{et} \quad x + at = 0.$$

Les propriétés topographiques de la figure obtenue varieront selon que le point M sera situé à l'intérieur

Fig. 1.

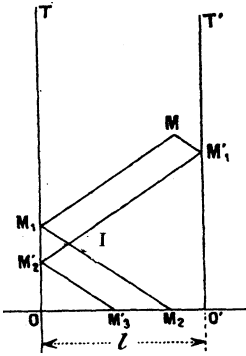
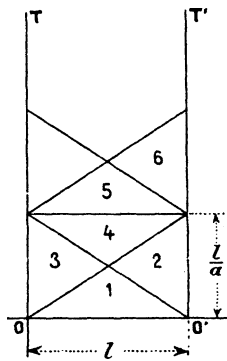


Fig. 2.



de l'une ou de l'autre des régions indiquées sur la figure 2 ou sera un point-frontière commun à certaines de ces régions; la figure 1 se rapporte au cas où le point M serait situé à l'intérieur de la région qui, sur la figure 2, porte le n° 6.

Désignons par (P) le parallélogramme MM_1IM_1' et par (Q) le trapèze $IM_2M_3M_2'$. La fonction u vérifiant l'équation (1), nous aurons les deux égalités suivantes :

$$\int \int_{(P)} \left[a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx dt = 0,$$

$$\int \int_{(Q)} \left[a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx dt = 0.$$

En transformant les intégrales doubles précédentes

par le théorème de Green, on trouve :

$$(7) \quad \int_{(MM_1IM'_1M)} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx \right] = 0,$$

$$(8) \quad \int_{(IM_2M'_2M_2I)} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx \right] = 0,$$

où les intégrales du premier membre sont prises dans le sens direct suivant le contour du parallélogramme $MM_1IM'_1$ et du trapèze $IM'_2M'_2M_2$.

Pour calculer les intégrales précédentes, considérons un segment AB situé dans la bande (B) sur une droite représentée par une équation de la forme

$$(9) \quad x = \varepsilon at + \text{const.},$$

où ε est une constante vérifiant l'équation

$$\varepsilon^2 = 1.$$

et envisageons l'intégrale

$$(10) \quad J = \int_{\overline{AB}} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt + \frac{\partial u}{\partial t} dx \right],$$

prise suivant le segment \overline{AB} de A à B.

En vertu de (9), la formule (10) donne

$$(11) \quad \begin{aligned} J &= \int_{t_A}^{t_B} \left[a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} \right] dt \\ &= \varepsilon a \int_{t_A}^{t_B} \left[\varepsilon a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] dt, \end{aligned}$$

où t_A et t_B sont les valeurs de t qui correspondent aux points A et B.

Représentons par $\frac{du}{dt}$ la dérivée par rapport à t de la fonction de t que devient la fonction u quand on y

regarde la variable x comme la fonction de t définie par la formule (9).

Nous aurons

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon a \frac{du}{dx} + \frac{du}{dt}.$$

Donc, la formule (11) donne

$$J = \varepsilon a [u(B) - u(A)],$$

où $u(A)$ et $u(B)$ représentent les valeurs de la fonction u en A et B respectivement.

Cela posé, en se reportant à (10), on constate en définitive que l'on a

$$(12) \quad \int_{AB} \left[a^2 \frac{du}{dx} dt + \frac{du}{dt} dx \right] = \varepsilon a [u(B) - u(A)].$$

Revenons à l'intégrale (7); elle est égale à la somme de quatre intégrales prises respectivement suivant les segments

$$\overline{MM_1}, \quad \overline{M_1I}, \quad \overline{IM'_1}, \quad \overline{M'_1M}.$$

En s'appuyant sur le lemme exprimé par l'égalité (12), on trouve pour les quatre intégrales précédentes, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a[u(M_1) - u(M)], & \quad - a[u(I) - u(M_1)], \\ a[u(M'_1) - u(I)], & \quad - a[u(M) - u(M'_1)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (7) nous donne

$$2a[u(M_1) - u(M) - u(I) + u(M'_1)] = 0,$$

d'où

$$(13) \quad u(M) = u(M_1) + u(M'_1) - u(I).$$

Passons à l'intégrale (8); elle est égale à la somme de quatre intégrales dont chacune est prise suivant un

segment rectiligne; trois de ces intégrales pourront être calculées au moyen du lemme (12), la quatrième, prise suivant le segment $M'_3 M_2$, étant égale à

$$\int_{x'_3}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0} dx,$$

où x'_3 et x_2 représentent les abscisses des points M'_3 et M_2 ; la condition (4) permet de mettre l'intégrale précédente sous la forme

$$\int_{x'_3}^{x_2} f_1(x) dx.$$

Ces remarques faites, on reconnaît de suite que l'égalité (8) nous fournit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & a[u(M_2) - u(I)] - a[u(M'_3) - u(M'_2)] \\ & + \int_{x'_3}^{x_2} f_1(x) dx - a[u(I) - u(M_2)] = 0. \end{aligned}$$

En portant la valeur de $u(I)$, tirée de cette équation, dans la formule (13), on trouve

$$\begin{aligned} u(M) &= u(M_1) + u(M'_1) - u(M'_2) + \\ & - \frac{1}{2} [u(M_2) - u(M'_3)] - \frac{1}{2a} \int_{x'_3}^{x_2} f_1(x) dx. \end{aligned}$$

Désignons par t_1 , t'_1 et t'_2 les ordonnées respectives des points M_1 , M'_1 et M'_2 , rappelons-nous que x_2 et x'_3 sont les abscisses respectives des points M_2 et M'_3 et reportons-nous aux conditions (4) et (6) que vérifie la fonction u . Nous reconnaitrons aisément que la formule précédente pourra s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} (14) \quad u(M) &= \varphi(t_1) + \psi(t'_1) - \varphi(t'_2) + \\ & - \frac{1}{2} [f(x_2) - f(x'_3)] - \frac{1}{2a} \int_{x'_3}^{x_2} f_1(x) dx. \end{aligned}$$

Le second membre de l'équation précédente ne contient que des éléments connus car, connaissant les coordonnées du point M , on calculera avec la plus grande facilité les nombres t_1, t'_1, t_2, x_2 et x'_3 ,

Par conséquent, la formule (14) fait connaître la fonction u (quand elle existe) dans la région qui porte le n° 6 dans la figure 2.

Il est évident d'ailleurs que l'on établirait d'une façon analogue la formule faisant connaître la fonction u dans n'importe laquelle des autres régions marquées dans la figure 2. Ces formules permettraient, au moyen d'une discussion très facile, de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes que devraient vérifier les données pour que le problème I admette une solution vérifiant l'hypothèse II. Mais ce qui fait l'intérêt de ces formules est autre chose. Tout d'abord la formule (14) nous apprend que la valeur $u(M)$ de la fonction u en M dépend non pas des données relatives à toute la frontière du domaine (D), mais seulement de celles qui se rapportent à une partie de cette frontière, partie nettement mise en évidence dans la formule considérée et variant avec la position du point M . La formule (14), et les formules analogues relatives aux autres régions indiquées dans la figure 2, sont encore intéressantes parce qu'elles nous apprennent comment une discontinuité d'une dérivée d'un certain ordre de l'une des fonctions données ou la non-existence de certaines relations entre les dérivées unilatérales de ces fonctions en l'un des points O ou O' donne lieu à des lignes de discontinuité pour les dérivées d'un certain ordre de la fonction u , ces lignes étant toujours des lignes polygonales dont les sommets et les extrémités sont des points-frontière du domaine (D), les côtés de ces lignes étant des segments dont chacun est parallèle à l'une ou

à l'autre des droites

$$x - at = 0 \quad \text{et} \quad x + at = 0.$$

Le développement de ces remarques et leur interprétation physique demanderait plus de place que nous n'en disposons, mais nous croyons que le lecteur y suppléera lui-même sans trop grand effort. J'ajoute que la méthode exposée ci-dessus est applicable au cas où le domaine dans lequel l'équation (1) doit être intégrée est beaucoup plus général que celui que nous avons considéré.

[L'6a]

**LA CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DES CONIQUES
D'APRÈS MANNHEIM DÉMONTREE PAR LE THÉOREME DE
PASCAL ;**

PAR M. J. LARRAS,

Soient une conique C , de centre O , les points X et Y à l'infini sur ses axes, un point M de la conique, et la normale en ce point. D'un point m du plan, on peut mener quatre normales à cette conique : l'hyperbole équilatère H , passant par les pieds de ces normales, admet pour directions asymptotiques les axes de la conique donnée ; de plus, elle passe par le centre de cette conique et le point m (hyperbole d'Apollonius).

Inversement, les points communs à l'hyperbole d'Apollonius — supposée connue — et à C définissent les

pièdes des normales à la conique issues de m . Si le point m est le centre de courbure de la conique C , répondant à M , deux des normales se confondent en mM , et les coniques C et H , ayant deux points communs confondus, M et M_1 , sont tangentes en M .

Ainsi l'hexagone $MM_1 OXYmM$ est inscrit à l'hyperbole d'Apollonius qui correspond au point m et à la conique C . Soit Δ la droite sur laquelle — d'après le théorème de Pascal — se coupent deux à deux les côtés opposés de cet hexagone. Si l'on désigne par N le point où la normale en M à la conique coupe l'axe OX ⁽¹⁾, Δ est la perpendiculaire, élevée en N , à cette normale.

Le point N appartient, en effet, à Δ comme point de rencontre de deux côtés opposés de l'hexagone, OX et mM . En outre, C et H étant tangentes en M , la droite MM_1 est la perpendiculaire, élevée en M , à la normale Mm . Son point à l'infini appartient à Δ , puisque, situé sur la droite de l'infini XY , côté opposé à MM_1 dans l'hexagone envisagé. Ainsi Δ est parallèle à MM_1 et, comme Δ passe par N , c'est bien la droite annoncée.

La droite Δ coupe le diamètre OM de la conique en un point I tel que Im passe par le point Y — mY et OM étant côtés opposés de l'hexagone considéré. Donc Im , parallèle à OY , est perpendiculaire à OX .

D'où la construction de Mannheim :

Si la normale en M à la conique C — de centre O — coupe, au point N , un axe de cette conique, et si la perpendiculaire élevée en N à cette normale coupe, en I , le diamètre OM , la perpendiculaire, abaissée de I sur l'axe donné, passe par le centre de courbure m répondant à M .

(1) OX ne représente pas forcément le grand axe.

[L¹⁷]**SUR LES CERCLES FOCaux;**

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. Je rappelle, par quelques mots, la théorie analytique des cercles focaux (ou bitangents) à une conique. Si $C = 0$ est un tel cercle pour la conique S , on a

$$S = C + \lambda D^2 = 0,$$

$D = 0$ étant l'équation de la corde des contacts, ou, comme on dit, de la directrice. Mais on a

$$S = [C - 2\lambda h(D + h)] + \lambda(D + h)^2 = 0,$$

quelle que soit la constante h ; ceci fait apparaître une série de cercles focaux, les cercles

$$\Gamma = C - 2\lambda h(D + h) = 0,$$

ayant évidemment leurs centres sur l'un des axes de la conique.

Si d'ailleurs on trouve un cercle Γ ayant son centre sur la directrice $D + h = 0$ correspondante, auquel cas on peut supposer $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - R^2$, $D + h \equiv x$, on a

$$S = (x^2 + y^2 - R^2) + \lambda x^2 = (\lambda + 1) \left[x^2 + y^2 - \frac{R^2}{\lambda + 1} \right] - \lambda y^2,$$

ce qui met en évidence un nouveau cercle focal

$$x^2 + y^2 - \frac{R^2}{\lambda + 1} = 0;$$

d'où une nouvelle série de cercles focaux.

Cette étude est très rapide, très simple et c'est assu-

rément la plus instructive; pourtant il peut y avoir intérêt à faire effectuer géométriquement, à titre d'exercice, la recherche des cercles focaux. Ceux de la première série, c'est-à-dire ceux dont les centres sont situés sur l'axe focal, s'obtiennent comme on sait par la méthode de Dandelin; on peut aussi les obtenir, à partir des foyers qui sont des cercles focaux particuliers, en traduisant géométriquement ce qui est dit plus haut.

On aura ensuite la seconde série, toujours en interprétant géométriquement les calculs précédents. Cette méthode, qui est excellente, est clairement indiquée dans la géométrie élémentaire de M. Hadamard (*voir* surtout, Exercices 840 à 845, t. II). Voici un procédé plus artificiel, mais qui permet de traiter de la même façon les deux séries de cercles focaux, autant du moins que cela est possible en géométrie élémentaire où la définition même des coniques distingue entre les axes. Il a aussi cet intérêt de faire appel à une propriété capitale des normales aux coniques, trop peu utilisée en géométrie pure.

2. Il est indispensable de dire quelques mots des cercles imaginaires; je le ferai en distinguant cercle et circonférence. Laissant au mot circonférence son sens géométrique, appelons puissance d'un point A par rapport à un cercle O de grandeur K, la quantité

$$\overline{AO}^2 - K.$$

Les points du cercle, s'ils existent, sont, par définition, les points pour lesquels cette puissance est nulle; cela n'arrive que pour $K > 0$ et les points forment alors la circonférence de rayon \sqrt{K} .

Si l'on appelle P_1 et P_2 les puissances d'un point M

par rapport à deux cercles (O_1, K_1) , (O_2, K_2) , on a

$$P_1 - P_2 = \overline{MO_1}^2 - \overline{MO_2}^2 - K_1 + K_2 = 2 \overline{O_1 O_2} \cdot \overline{IM_1} - K_1 + K_2,$$

I étant le milieu de $O_1 O_2$, M_1 la projection de M sur $O_1 O_2$, et $\overline{O_1 O_2}$, $\overline{IM_1}$ étant les mesures de deux vecteurs dirigés.

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles est donc une perpendiculaire à la ligne des centres, c'est l'axe radical.

Si m est la projection de M sur l'axe radical, l'égalité précédente appliquée à m donne

$$0 = 2 \overline{O_1 O_2} \cdot \overline{Im_1} - K_1 + K_2,$$

et, par soustraction,

$$(1) \quad P_1 - P_2 = 2 \overline{O_1 O_2} \cdot \overline{mM}.$$

Cette égalité est fondamentale en géométrie élémentaire, c'est elle qui permet la traduction des calculs du paragraphe 1 en démonstration géométrique, comme il a été indiqué à la fin de ce même paragraphe.

On dit que des cercles forment un faisceau s'ils ont deux à deux même axe radical. Si une circonférence C et deux cercles C_1 , C_2 , de centres O , O_1 , O_2 , font partie d'un même faisceau et si P_1 et P_2 sont les puissances d'un point de C par rapport à C_1 et C_2 , on a

$$(2) \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}.$$

En effet, si M est un point de C , m sa projection sur l'axe radical, l'égalité (1) appliquée d'abord à C_1 et C , ensuite à C_2 et C , donne pour le point M

$$P_1 = 2 \overline{O_1 O} \cdot \overline{mM}, \quad P_2 = 2 \overline{O_2 O} \cdot \overline{mM};$$

en divisant membre à membre on a la relation (2).

Réciproquement, le lieu des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles C_1, C_2 a une valeur donnée est, s'il existe, une circonférence du faisceau C_1, C_2 .

Deux cercles sont dits orthogonaux si l'on a entre leurs grandeurs K_1 et K_2 et la distance d de leurs centres, la relation $d^2 = K_1 + K_2$; de là découle la généralisation des propriétés des circonférences orthogonales.

3. PROPRIÉTÉ DES CONIQUES A CENTRE. — *La normale MNn et la tangente MTt en un point M d'une conique de centre O coupent les axes de cette conique en des points N, T; n, t tels que l'on ait*

$$\alpha \cdot \overline{MN} = \beta \cdot \overline{Mn}; \quad \overline{ON} \cdot \overline{OT} = -\overline{On} \cdot \overline{Ot} = \alpha - \beta = \gamma;$$

α et β étant les carrés des demi-axes portés respectivement par ONT et Ont. C'est-à-dire les quantités a^2 et b^2 pour l'ellipse, a^2 et $-b^2$ pour l'hyperbole.

Il est clair que la propriété ne distingue pas entre les axes; pour la démontrer supposons que ONT soit l'axe focal. MTt et MNn étant alors les bissectrices de FMF', les points t et n sont diamétralement opposés sur la circonférence circonscrite à FMF' (fig. 1). S'il s'agit d'une ellipse n et M sont de part et d'autre de FF', sinon ils sont du même côté; le rapport $\frac{\overline{MN}}{\overline{Mn}}$ est donc positif pour l'ellipse, négatif pour l'hyperbole et il suffit de calculer sa valeur absolue.

La similitude des triangles F'MN, nMF, nFN donne

$$\overline{MN} \cdot \overline{Mn} = \overline{MF} \cdot \overline{MF'}, \quad \overline{MN} \cdot \overline{Nn} = \overline{NF} \cdot \overline{NF'},$$

d'où

$$\frac{\overline{Mn}}{\overline{Nn}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{NF}} \frac{\overline{MF'}}{\overline{NF'}}.$$

Mais, d'après la propriété fondamentale de la bissectrice, les deux rapports du second membre sont égaux, donc

$$\text{(ellipse)} \quad \frac{Mn}{Nn} = \left(\frac{MF + MF'}{NF + NF'} \right)^2 = \frac{4a^2}{4c^2};$$

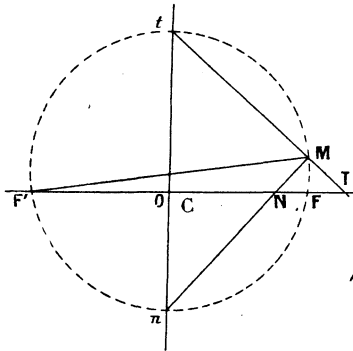
$$\text{(hyperbole)} \quad \frac{Mn}{Nn} = \left(\frac{MF - MF'}{NF - NF'} \right)^2 = \frac{4a^2}{4c^2};$$

d'où

$$\frac{Mn}{MN} = \frac{Mn}{Mn - Nn} = \frac{a^2}{a^2 - c^2} = \frac{a}{\beta}.$$

Si, d'autre part, on remarque que $O \perp T$, ONn sont

Fig. 1.



semblables et que N et T sont conjuguées harmoniques par rapport à F et F' , on a

$$-\overline{On} \cdot \overline{Ot} = \overline{ON} \cdot \overline{OT} = -\overline{OF} \cdot \overline{OF'} = c^2 = \gamma.$$

Le théorème étant ainsi démontré; notons de plus, pour la suite, que si C est sur ONT , il a pour puissance par rapport aux circonférences nMt

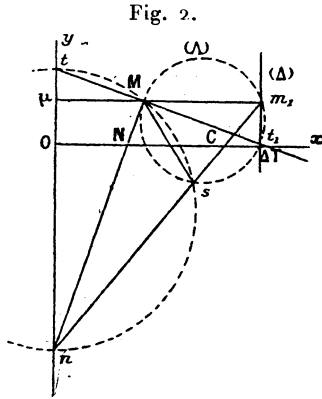
$$(3) \quad \overline{OC}^2 + \overline{On} \cdot \overline{Ot} = \overline{OC}^2 - \gamma,$$

que ONT soit axe focal, ou non.

4. CONSTRUCTION DES CERCLES FOCaux ET DES DIREC-TRICES. — *Étant donné une conique à centre (Γ) déterminée par des axes $Ox Oy$, un point M de la courbe et sa normale MNn , je me propose d'attacher à chaque point C de l'un quelconque Ox des axes : a , une directrice (Δ) perpendiculaire à Ox ; b , un cercle (C) de centre C , et cela de façon que, c , entre la puissance P d'un point quelconque de (Γ) par rapport à (C) et sa distance D à (Δ) on ait la relation*

$$(4) \quad \alpha P - \gamma D^2 = 0.$$

a. Joignons nC (fig. 2), qui coupe en m_1 la parallèle à Ox menée par M . Je choisis (Δ) passant par m_1 .



Pour que cela soit légitime, il faut tout d'abord que (Δ) ne dépende pas du choix fait sur (Γ) d'un point M particulier. Or, appelons μ la projection de M sur Oy , on a

$$(5) \quad \frac{\overline{O\Delta}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{\mu m_1}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{\mu M}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{Mn}}{\overline{Nn}} = \frac{\alpha}{\gamma};$$

(Δ) ne dépend donc pas du choix de M .

b. Soit t_1 le point où la tangente en M coupe (Δ) et soit (Λ) la circonférence circonscrite à Mm_1t_1 . Je choisis (C) orthogonale à (Λ) .

Pour que cela soit légitime, il faut tout d'abord que C ait même puissance par rapport à toutes les circonférences (Λ) . Or, soit s le point de rencontre de nCm_1 avec la circonférence circonscrite à Mnt , on a

$$\widehat{Msm_1} = \widehat{Mtn} = \widehat{Mt_1m_1},$$

donc s est sur (Λ) et la puissance G de C par rapport à (Λ) est $G = \overline{Cs} \cdot \overline{Cm_1}$. Mais, le produit $\overline{Cs} \cdot \overline{Cn}$ étant, d'après (3), constant et égal à $\overline{OC}^2 - \gamma$, le lieu de s , pour M variable, est une circonférence dont le diamètre dirigé porté par Ox est $\frac{\overline{OC}^2 - \gamma}{\overline{CO}}$, et par suite G est la puissance de l'inversion qui transforme cette circonférence en (Δ) ; savoir

$$G = \frac{\overline{CO}^2 - \gamma}{\overline{CO}} \cdot \overline{C\Delta} = -\frac{\beta}{\gamma} (\overline{OC}^2 - \gamma).$$

c. Reste à vérifier la propriété $\alpha P - \gamma D^2 = 0$; pour le seul point M , puisque le choix de (Δ) et de (C) est indépendant de celui de M .

Mn , perpendiculaire au diamètre Mt_1 de (Λ) , est tangente à (Λ) ; donc $\overline{nM}^2 = \overline{ns} \cdot \overline{nm_1}$; or, ceci exprime que le faisceau des cercles déterminé par les deux circonférences (s) et (m_1) , de centres s et m_1 et de rayons nuls, contient la circonférence de centre n et passant par M . Ce faisceau contient aussi (C) ; appliquons donc la relation (2) au point M et aux cercles (m_1)

tion (4) devient ici

$$P = \overline{Mm_1}^2 = D^2.$$

6. La propriété démontrée admet une réciproque : *Le lieu des points M dont la puissance P par rapport à un cercle (C) est liée à la distance D à une droite (Δ) par la relation $P = K \cdot D^2$ est une conique (Γ); (C) et (Δ) sont deux des éléments focaux associés à (Γ) comme il a été dit ci-dessus.*

Nous supposons essentiellement que le lieu existe; soit M l'un de ses points. Admettant pour un instant la réciproque, construisons m_1 par la parallèle Mm_1 à Ox , puis s tel que $\overline{Cs} \cdot \overline{Cm_1} = \rho$, puis (Λ) circonscrit à Mm_1s , d'où t_1 sur (Λ) et sur (Δ), d'où Mt_1 , d'où la perpendiculaire Mn qui coupe m_1C en n . De n on déduit Oy .

Or, il est clair que la conique (Γ) d'axes Ox , Oy qui passe par M et y admet Mn pour normale admet (C) et (Δ) pour éléments focaux associés. Si n était à l'infini, la conclusion serait analogue, mais (Γ) serait une parabole. M faisant partie de (Γ) et du lieu, la relation $P = K'D^2$, relative à (Γ), est d'ailleurs bien celle qui nous est donnée; $K' = K$.

Il reste seulement à prouver que (Γ) constitue tout le lieu et pour cela il suffira de montrer que, sur toute droite issue de M, il n'y a qu'un autre point du lieu. Or, soit A le point de rencontre de la droite et de (Δ) et M' un point du lieu situé par cette droite; on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{KD^2}{K'D'^2} = \frac{D^2}{D'^2} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2}.$$

Mais, d'après (2), ceci exprime que M et M' appartiennent à la même circonférence du faisceau déterminé par (C) et le cercle (A) réduit au point A. M' est donc unique.

Quant à la situation respective de (C) et (Γ), quand (C) est une circonférence, elle résulte de suite soit de la construction, soit de la relation $P = KD^2$. Si, en effet, M est un point commun à deux des trois courbes (Γ), (C), (Δ), les points m_1 et s sont aussi en M; donc M appartient aux trois courbes, de plus (Γ) et (C) sont tangentes en ce point.

On pourrait aussi dire : la relation montre que tout point commun à deux des trois courbes précitées appartient à la troisième; (Γ) est d'ailleurs située tout entière dans la même région par rapport à (C), puisque P a le signe de K pour tout point de (Γ).

7. Bien que les considérations précédentes fournissent très simplement les principales propriétés des cercles focaux, je n'en parlerai pas ici; je me contente de caractériser les familles de cercles focaux des coniques à centre.

Pour cela, modifiant dans des rapports constants la grandeur G de (C), associons à tout point C deux nouveaux cercles (C)₁, (C)₂, de grandeurs G₁ et G₂,

$$G = -\frac{\beta}{\gamma} (\overline{OC}^2 - \gamma); \quad G_1 = \overline{OC}^2 - \gamma; \quad G_2 = \gamma - \overline{OC}^2.$$

De même, chaque point c de $O\gamma$ sera centre de trois cercles (c), (c)₁, (c)₂ de grandeurs

$$g = \frac{\alpha}{\gamma} (\overline{Oc}^2 + \gamma); \quad g_1 = (\overline{Oc}^2 + \gamma); \quad g_2 = -\overline{Oc}^2 - \gamma.$$

Si l est la distance de deux points C et c , on a

$$l^2 = \overline{OC}^2 + \overline{Oc}^2 = G_1 + g_1 = G_1 - g_2 = g_1 - G_2.$$

Donc les cercles (C)₁ et (c)₁ forment deux fais-

ceux orthogonaux; l'un d'eux comprend les cercles réduits aux foyers.

Les circonférences $(C)_1$ [ou $(c)_1$] coupent les circonférences $(c)_2$ [ou $(C)_2$] en deux points diamétralement opposés.

Les quatre systèmes $(C)_1, (c)_1, (C)_2, (c)_2$ sont ainsi définis, et par suite les (C) et (c) sont caractérisés de deux façons différentes, mais il n'y a lieu de s'arrêter qu'aux relations entre circonférences réelles. Cela conduit à dire :

Les circonférences focales de la première série sont : pour l'ellipse, celles que l'on obtient en modifiant dans le rapport $\frac{b}{c}$ le rayon de celles qui sont coupées en deux points diamétralement opposés par toutes les circonférences passant par les foyers; pour l'hyperbole, celles que l'on obtient en modifiant dans le rapport $\frac{b}{c}$ le rayon des circonférences du faisceau défini par les foyers.

Les circonférences de la deuxième série sont celles qu'on obtient en modifiant dans le rapport $\frac{a}{c}$ le rayon des circonférences passant par les foyers; si c est le centre d'une telle circonférence, le diamètre perpendiculaire à Fc est vu du foyer F sous l'angle 2φ ,

$$\text{tang } \varphi = \frac{a}{c}.$$

Pour l'hyperbole, on peut encore dire que ce sont les circonférences vues des foyers sous l'angle 2ψ ,

$$\sin \psi = \frac{a}{c}.$$

[R9b]

SUR UN PROBLÈME DE CHOC AVEC FROTTEMENT;

PAR M. H. V.

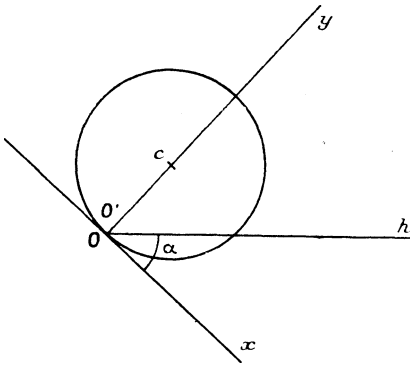
Dans un récent article (*Nouvelles Annales*, avril 1923, p. 259), M. J. Soula a eu le grand mérite d'attirer l'attention sur certaines difficultés qui se présentent dans les problèmes de choc avec frottement au contact; il a fort judicieusement montré la nécessité de distinguer plusieurs cas dans le traitement de ces problèmes. Je voudrais indiquer ici en quelques mots, qu'on peut, il me semble, simplifier et en même temps compléter ces élégants résultats, et donner, quelles que soient les circonstances, une solution acceptable de la question, en adoptant les principes habituellement mis en usage en Mécanique.

Je reprends l'exemple même du disque homogène pesant qui tombe verticalement, avec une vitesse verticale de translation V_0 , sur un clou horizontal O; on suppose la vitesse de rotation du disque autour de son centre, égale à zéro. Je traiterai le cas général, où le coefficient de restitution au contact est égal à e ($0 \leq e \leq 1$), les valeurs extrêmes 0 et 1 correspondant aux cas extrêmes des corps mous ou des corps parfaitement élastiques. Il suffira de faire $e = 0$ dans les formules ci-dessous pour se trouver dans le cas du problème de M. Soula.

Soient t_0 et t_1 les instants où commence et où finit

le choc, R le rayon du disque, O' le point du disque qui vient en contact avec le clou, x'_0, y'_0 les projections de la vitesse du centre du disque immédiatement avant le choc ($x'_0 = V_0 \sin \alpha, y'_0 = -V_0 \cos \alpha$), x'_1, y'_1 les projections de cette vitesse immédiatement après le choc, ω , la vitesse angulaire de rotation du disque à ce même instant (les axes Ox, Oy sont ceux de la figure ci-dessous).

La vitesse tangentielle V_x , suivant Ox , du point O' est d'abord égale à $V_0 \sin \alpha$, cela veut dire que, au



début, le disque a tendance à glisser sur la surface du clou dans le sens Ox . Le frottement aura pour effet de diminuer cette vitesse tangentielle de glissement. Cela est à peu près évident *a priori*, et cela peut se mettre en évidence par le calcul suivant :

Isolons pendant la durée du choc un petit intervalle de temps $t_2 t_3$ ($t_0 \leq t_2 < t_3 \leq t_1$) pendant lequel la vitesse V_x ne change pas de signe et appelons p_t la valeur absolue de la portion de la percussion tangentielle qui correspond à cet intervalle. Les équations des quantités de mouvement sur Ox , et des moments autour de C donnent (les notations s'expliquent d'elles-

mêmes)

$$m(x'_3 - x'_2) = \varepsilon p_t.$$

$$m \frac{R^2}{2} (\omega_3 - \omega_2) = \varepsilon R p_t,$$

avec $\varepsilon = \mp 1$, suivant que la vitesse de O' , comptée sur Ox , est restée positive ou négative. De là on tire

$$m[(x'_3 + R\omega_3) - (x'_2 + R\omega_2)] = 3\varepsilon p_t.$$

D'où cette conclusion, que la vitesse V_x du point O' diminue en valeur absolue. Donc cette vitesse, qui part d'une valeur positive, va commencer par décroître, et deux hypothèses seulement sont possibles :

Ou bien la vitesse V_x diminuera, tout en restant positive, de l'instant t_0 à l'instant t_1 , sans s'annuler dans cet intervalle, sinon peut-être à l'instant t_1 ; ou bien V_x diminuera jusqu'à zéro, valeur qu'elle atteindra avant l'instant t_1 , et alors elle restera nulle jusqu'à ce dernier instant (1).

Dans le premier cas, il est naturel d'admettre que la percussion aura (comme la réaction) deux composantes P_n et P_t dirigées vers le haut, et satisfaisant à la relation $P_t = fP_n$, en désignant par f le coefficient de frottement pendant le choc.

Dans le second cas, le choc se décomposera en deux phases, pendant une seule desquelles la réaction sera assujettie à la condition angulaire précédente; donc il n'y aura plus aucune raison pour que les composantes P_t et P_n de la percussion globale satisfassent à la condition ci-dessus, tout au plus devra-t-on exiger que $P_t < fP_n$.

Mettons le problème en équations dans les deux cas.

(1) M. Thiry nous communique qu'il avait aussi obtenu ce résultat, par la même méthode.

Premier cas. — On a alors les formules, du reste classiques,

$$\begin{aligned} m(x'_1 - x'_0) &= -fP_n, \\ m(y'_1 - y'_0) &= P_n, \quad y'_1 = -ey'_0; \\ mR\omega_1 &= -2fP_n, \end{aligned}$$

dont la dernière exprime la définition du coefficient de restitution. On en conclut de suite

$$\begin{aligned} x'_1 &= V_0[\sin\alpha - f(1+e)\cos\alpha], \\ y'_1 &= eV_0\cos\alpha, \\ \omega_1 &= -\frac{2fV_0(1+e)\cos\alpha}{R}, \\ P_n &= mV_0(1+e)\cos\alpha, \quad (P_n \text{ est naturellement positif}). \end{aligned}$$

A la fin du choc, la vitesse tangentielle du point O' est

$$(V_x)_1 = x'_1 + R\omega_1 = V_0[\sin\alpha - 3f(1+e)\cos\alpha].$$

Puisque nous sommes dans le premier cas, c'est que cette vitesse est positive ou nulle; les formules précédentes sont donc seulement valables si l'on a l'inégalité

$$\tan\alpha \geq 3f(1+e).$$

Deuxième cas. — Si cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, c'est alors que nous sommes dans la nécessité d'adopter la seconde hypothèse ci-dessus; alors les équations ordinaires (des quantités de mouvement et des moments autour de C), donnent

$$\begin{aligned} m(x'_1 - x'_0) &= -P_t, \\ m(y'_1 - y'_0) &= P_n, \\ mR\omega_1 &= -2P_t. \end{aligned}$$

Il faut joindre à ces trois relations les suivantes :

$$\begin{aligned} y'_1 &= -ey'_0, \\ x'_1 + R\omega_1 &= 0, \end{aligned}$$

dont la première a la même origine que plus haut, et dont la seconde exprime que la vitesse tangentielle de O' est nulle à la fin du choc. On en conclut sans peine

$$x'_1 = \frac{2}{3} V_0 \sin \alpha,$$

$$y'_1 = e V_0 \cos \alpha, \quad P_t = \frac{m V_0 \sin \alpha}{3},$$

$$\omega_1 = -\frac{2}{3} V_0 \frac{\sin \alpha}{R}, \quad P_n = m V_0 (1 + e) \cos \alpha,$$

et l'on constate qu'on a bien $P_t < f P_n$, car cette inégalité revient à

$$\tan \alpha < 3f(1 + e).$$

On pourrait évidemment, dans le cas actuel, décomposer le calcul en deux stades, correspondant chacun aux deux phases du choc : la première phase pendant que la vitesse V_x n'est pas nulle, et la seconde pendant qu'elle reste nulle. En appliquant deux fois les équations habituelles, et éliminant les résultats intermédiaires relatifs à l'instant de passage de la première à la deuxième phase, on retombe sur les formules écrites plus haut.

Le problème est donc susceptible dans tous les cas d'une solution (et d'une seule) en admettant les principes habituels de la Mécanique classique. Naturellement il ne faut pas se faire d'illusions sur la valeur pratique des résultats, car ceux-ci se fondent sur l'application de deux sortes d'expériences préalables sans rigueur absolue; d'abord le coefficient e n'est connu expérimentalement qu'avec une approximation faible; d'autre part, les expériences de frottement sont faites en général dans des circonstances où les forces en jeu sont de grandeur moyenne (comparables aux forces de pesanteur); on applique ici les règles ainsi

obtenues, dans un cas où les forces en jeu deviennent très grandes. Il est d'ailleurs probable que l'on peut tenir compte de cette différence, en remplaçant le coefficient de frottement usuel, par un coefficient un peu plus grand (*cf.* les expériences de G. Rennie). Ajoutons encore que certaines des expériences classiques de Morin concernent des phénomènes de frottement avec choc, et que même dans ces expériences Morin a trouvé les résultats en accord avec ses formules.

Quoi qu'il en soit, on peut conserver les résultats des calculs ci-dessus, à titre de première indication.

Une fois connu, dans chaque cas, l'état des vitesses immédiatement après le choc, le mouvement ultérieur est facile à déterminer. Si $e \neq 0$, le disque quitte le clou immédiatement après. Si $e = 0$, une discussion est nécessaire, on doit, comme on sait, étudier successivement le mouvement libre et le mouvement lié, et l'on constate qu'un de ces deux mouvements est toujours possible à l'exclusion de l'autre. Indiquons seulement les résultats du calcul :

Pour $\text{tang} \alpha \geq 3f$, le mouvement libre est celui qui convient immédiatement après le choc, si l'on a

$$V_0^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)^2 - g R \cos \alpha \geq 0,$$

sinon, c'est le mouvement lié qui convient.

Pour $\text{tang} \alpha < 3f$, le mouvement libre convient si

$$\frac{4}{9} V_0^2 \sin^2 \alpha - g R \cos \alpha \geq 0,$$

sinon, il faut prendre le mouvement lié.

Le mouvement lié est, dans le premier cas,

$$\text{tang} \alpha > 3f,$$

tout au moins au début, un mouvement avec glisse-

ment au contact. Dans le second cas, ($\tan \alpha < 3f$), il y aura glissement au contact si

$$\frac{\sin \alpha}{3} - f \cos \alpha + f \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{9gR} > 0,$$

et roulement si cette inégalité est inversée. Dans le cas limite où cette inégalité devient une égalité, le glissement seul est acceptable.

NECROLOGIE.

Henri Brocard.

Nous signalons avec un grand retard la disparition d'un collaborateur assidu des *Nouvelles Annales*, Henri Brocard, décédé à Bar-le-Duc le 16 janvier 1922.

H. Brocard, né à Vignot (Meuse) le 13 mai 1845, était ancien élève de l'École Polytechnique (1865). Il fit sa carrière dans l'arme du génie et prit sa retraite comme lieutenant-colonel, consacrant à l'étude tout son temps après tous ses loisirs. Sa curiosité s'étendait à de nombreux domaines : sciences naturelles, économie rurale, météorologie..., mais c'est surtout comme mathématicien qu'il s'est fait un nom. Tout le monde connaît les *points de Brocard* de la géométrie du triangle, qu'il a fondée avec Émile Lemoine. La bibliographie le passionnait, et par l'étendue de ses connaissances en cette matière, il a rendu de précieux services aux *Nouvelles Annales* et à l'*Intermédiaire des Mathématiciens* où sa signature abonde.

Il a publié en 1919, en collaboration avec M. T. Lemoine, le tome I d'un ouvrage intéressant : *Sur les*

Courbes géométriques remarquables, dont la suite, espérons-le, ne se fera pas trop attendre.

H. Brocard était un excellent homme : puisait à son érudition qui voulait. Tous ses amis et ses correspondants ont éprouvé un très vif regret de sa mort.

R. B.

CORRESPONDANCE.

Le numéro de février 1923 des *Nouvelles Annales* propose sous le n° 2458 la question suivante :

« Une épicycloïde cuspidale est engendrée par le roulement d'un cercle sur un cercle de centre ω . Si l'épicycloïde varie en restant inscrite à un triangle fixe et semblable à elle-même, le lieu du point ω se compose de droites. »

Je crois devoir signaler que ce résultat a déjà été publié par moi dans une série d'articles parus en août, septembre, octobre, et novembre 1907 dans la *Revue des Mathématiques spéciales*. Je généralise la question aux cycloïdes et aux développantes de cercle. Voici mes propres énoncés :

« Les épicycloïdes semblables à une épicycloïde donnée et qui sont tangentes à trois droites données peuvent se partager en un certain nombre de groupes.

Les courbes de chaque groupe touchent, outre les droites données, un certain nombre de droites fixes, bien déterminé si l'épicycloïde est algébrique, indéfini dans le cas contraire.

Les centres des courbes d'un même groupe sont sur une même droite; leurs cercles inscrits sont bitangents

à une conique fixe, dont cette droite est l'axe non focal, et toutes les tangentes communes à ces courbes touchent cette conique, etc... »

L. BICKART.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2438.

(1920, p. 160.)

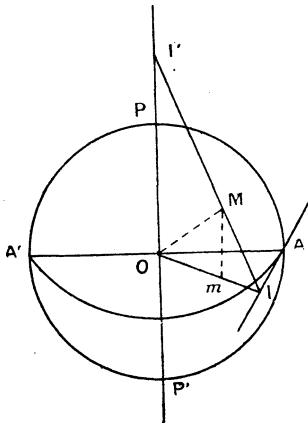
La surface gauche circonscrite à une sphère, qui admet pour directrices un diamètre de cette sphère et une tangente à sa section diamétrale normale à ce diamètre, touche la sphère suivant une courbe de Viviani.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. P. VINCENSINI.

Soient II' une génératrice de la surface gauche; M , le point



de contact avec la sphère; m , la projection de M sur la section diamétrale.

(360.)

M sera sur une courbe de Viviani si l'on a .

$$\widehat{AOm} = \widehat{mOM},$$

Or OA et OM sont égaux comme rayons de la sphère; les deux triangles rectangles OMI, OAI sont donc égaux (hypoténuse commune OI et OA = OM).

On en conclut

$$\widehat{AOm} = \widehat{mOM},$$

ce qui démontre la propriété.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, SEVRIN.

2443.

(1920, p. 240; 1922, p. 120.)

Dans le plan, deux triangles inversement semblables sont orthologiques.

R. B.

SOLUTION.

Par M. G. ROY.

Si par les sommets A, B, C du premier triangle, on mène les parallèles aux côtés B'C', C'A', B'A', du second, ces parallèles se coupent en D sur le cercle circonscrit à ABC : ce point D est d'ailleurs le second métapôle des triangles ABC, A'B'C'. Les perpendiculaires en A à AD, en B à BD, en C à CD, se coupent en D' diamétralement opposé à D. Les deux triangles ABC et A'B'C' sont donc orthologiques.

Autres solutions par MM. FAUCHEUX, HARMEGNIES, SEVRIN.



GEORGES FONTENÉ.

Un collaborateur fidèle des *Nouvelles Annales*, M. G. Fontené, vient de disparaître; plus même qu'un collaborateur, puisque M. Fontené fut un moment attaché à la Rédaction de ce journal, en 1919. Et avant tout un mathématicien de talent.

Georges Fontené était né à Rousies (Nord), le 23 septembre 1848. Agrégé en 1875, il fut successivement professeur à Belfort, à Douai, à Rouen et enfin au Collège (aujourd'hui Lycée) Rollin. Nommé Inspecteur d'Académie en 1903, il prit sa retraite en 1918, avec le titre d'Inspecteur général honoraire. Il est mort à Paris, le 7 avril 1923.

Ses travaux sont nombreux, bien qu'il n'ait guère publié avant l'âge mûr. Les *Nouvelles Annales* en contiennent la plupart, mais son nom figure aussi aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, au *Bulletin de la Société mathématique de France* et dans d'autres périodiques. Ses Mémoires, d'étendue variable, concernent la Géométrie pure et analytique, la Géométrie à plusieurs dimensions, l'Algèbre, les fonctions elliptiques, et témoignent d'une activité fort variée. Il ne peut être question de les commenter tous ici et je dois me borner à en signaler les principaux.

Un sujet qui l'a beaucoup occupé est celui des correspondances (2, 2) qu'il a étudiées sous tous leurs aspects : algébrique, géométrique (théorème de

Poncelet et ses extensibles), analytique (relations entre les fonctions elliptiques du second ordre). C'est à ces correspondances que se rapportent plusieurs Mémoires insérés aux *Nouvelles Annales*, de 1897 à 1900. Il a obtenu des résultats de grand intérêt, entre autres un théorème sur des quadrangles mobiles que G. Darboux devait retrouver plus tard. Signalons aussi ses recherches sur les polyèdres « toriques » de genre 1, inscrits et circonscrits à des quadriques.

Il a écrit aussi sur les singularités des courbes algébriques, planes et gauches, sur les systèmes articulés, sur l'extension à l'espace du théorème de Feuerbach, et sur une foule de questions particulières.

Dans tous ces travaux, la partie algébrique est souvent assez importante pour qu'on puisse les faire rentrer aussi bien dans l'Algèbre que dans la Géométrie.

En Algèbre pure, il convient de rappeler que Fontené a découvert à peu près en même temps que Rouché, en 1875, le théorème fondamental, communément appelé « de Rouché », qui fait connaître les conditions de résolubilité d'un système d'équations linéaires. Sa priorité paraît même certaine ⁽¹⁾, et c'est avec justice que certains auteurs ont associé son nom à celui de Rouché dans l'énoncé de cette proposition célèbre (par exemple : H. Laurent, dans son *Traité d'Algèbre*, M. Ch. Michel, dans son *Cours d'Algèbre et d'Analyse*).

Fontené a publié plusieurs Ouvrages, dont les plus importants sont *L'hyperespace à $n - 1$ dimensions* (1892), *La Relativité restreinte* (1922). Le premier de ces Livres concerne la métrique cayleyenne la plus générale. La Société physico-mathématique de Kasan

(1) Voir *N. A.*, 1900, p. 188.

lui a décerné une mention honorable en 1897 (prix Lobatchefski). Dans le second, Fontené expose des vues originales sur un sujet qu'il n'avait abordé que tout récemment, donnant ainsi la marque d'une souplesse d'esprit et d'une force d'invention peu communes chez un homme de son âge.

L'homme. Les élèves de Fontené, ses collègues, ses subordonnés célèbrent sa conscience professionnelle, sa cordialité, sa modestie, sa bonté. Ses intimes, au nombre desquels j'eus le bonheur d'être, parlent de lui comme d'un *juste* et d'un *sage*. On applique rarement ces mots à un homme de notre temps, et ils éveillent des idées presque passées de mode, parce qu'être juste et sage, ce n'est pas une situation. Je n'ai connu personne qui en fit, mieux que Fontené, revivre le sens. Le mépris des « choses fortuites » et l'ignorance des bassesses faisaient les matériaux de son âme. Ses mœurs étaient simples. Il ignorait la publicité et l'art du coup de coude.

Il avait la gravité de ceux que la méditation a conduits au rendez-vous des esprits libres : devant le trou noir ; et il s'affligeait de ne pas trouver de signification au verbe « être ». Il se résigna à être homme de bien sans savoir pourquoi.

Je ne l'ai jamais surpris à se reposer de penser noblement. Sans doute maint savant a éclaté davantage, mais nul n'a poursuivi plus assidûment ce qui peut élever la vie intérieure.

RAOUL BRICARD.

[M¹h]

**SUR LES POINTS DOUBLES DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES
ET SUR LA CONSTRUCTION PAR RÉGIONS;**

PAR M. HADAMARD.

1. Soient

$$(1) \quad f(x, y, u) = 0,$$

$$(1') \quad f_1(x, y, u) = 0,$$

les équations des deux courbes planes C, C_1 dépendant d'un même paramètre variable u . Le lieu L décrit par les points communs à ces deux courbes, lorsque u varie, s'obtient en éliminant u entre les deux équations précédentes.

Nous supposerons d'ailleurs ces équations algébriques et entières.

Peut-on trouver, en opérant directement sur les équations (1), (1'), les points doubles de la ligne L ?

C'est ce que donne aisément une méthode connue, si je ne me trompe, depuis Hermite et qui repose sur la méthode d'élimination par les fonctions symétriques. Soient, u_1, u_2, \dots, u_p les racines de l'équation (1), supposée de degré p en u : le résultat de l'élimination de u entre nos deux équations, c'est-à-dire l'équation du lieu cherché, est

$$L(x, y) = 0$$

avec

$$(2) \quad L(x, y) \equiv f_1(x, y, u_1) f_1(x, y, u_2) \dots f_1(x, y, u_p).$$

Un point (x_0, y_0) de L — pour lequel, par conséquent, les équations (1), (1') admettront une racine commune u_1 — sera double s'il satisfait, en outre, aux

deux relations

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Or $\frac{\partial L}{\partial x}$, par exemple, peut se calculer d'après l'expression (2) de L, si du moins le théorème des fonctions implicites s'applique à la différentiation de la fonction $u_1(x, y)$, ce que nous supposons tout d'abord. On aurait, en thèse générale, p termes, puisque u est un produit de p facteurs; mais ici un seul terme est différent de zéro, celui qu'on obtient en faisant porter la différentiation sur le premier facteur. Donc, on doit avoir

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) f_1(x, y, u_2) f_1(x, y, u_3) \dots f_1(x, y, u_p) = 0$$

et, de même,

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) f_1(x, y, u_2) \dots f_1(x, y, u_p) = 0.$$

On voit que ceci peut se produire de deux manières :

1° Ou bien

$$(3) \quad f_1(x, y, u_2) f_1(x, y, u_3) \dots f_1(x, y, u_p) = 0,$$

c'est-à-dire que les équations (1), (1') ont au moins DEUX racines communes.

2° Ou bien on a, à la fois,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0.$$

Si l'on tient compte des valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, telles qu'on les tire de l'équation (1), on voit que la condition pour qu'il en soit ainsi est donnée par la double

proportion ⁽¹⁾ (dans laquelle nous avons supprimé à la lettre u l'indice 1 devenu inutile)

$$(4) \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right),$$

laquelle doit être vérifiée en même temps que (1) et (1').

Le cas où le théorème des fonctions implicites serait inapplicable à l'équation (1) ne change rien aux conclusions précédentes. C'est, comme on sait, celui où $\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$, c'est-à-dire où (x étant remplacé par x_0 et y par y_0) u_1 est racine double de (1). Si, pour l'équation (1'), u_1 est racine simple, on pourra recommencer les raisonnements précédents en intervertissant les rôles des polynômes f, f_1 . Dans le cas contraire, les équations données ont deux racines communes égales entre elles, ce qui est un cas particulier de notre hypothèse 1° [équation (3) avec $u_2 = u_1$].

2. Ce qui précède apparaît d'ailleurs immédiatement au point de vue géométrique, en considérant u comme une troisième coordonnée cartésienne. (1) et (1') représentent alors deux surfaces et L est la projection de leur intersection sur le plan des xy . Cette projection peut effectivement, comme on le sait, avoir deux sortes de points doubles : points doubles « apparents » (ou « par projection ») et points doubles véritables dans l'espace. La première catégorie correspond à la rela-

(1) En coordonnées homogènes, on aurait un quatrième rapport $\frac{\partial f_1}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial z}$ égal à la valeur commune des trois premiers; les équations (4) ainsi modifiées permettront, comme il est connu, de traiter le cas des points à l'infini.

tion (3), la seconde aux relations (4) [puisqu'alors les deux surfaces (1), (1') sont tangentes entre elles].

3. Je prendrai comme exemple d'un calcul de cette espèce le problème suivant, proposé autrefois en Mathématiques spéciales :

Lieu des points communs à deux coniques C, C₁ qui varient en restant constamment semblables entre elles, chacune d'elles ayant, d'autre part, ses foyers fixes.

Si la conique C était rapportée à ses axes, les demi-longueurs de ceux-ci étant $c\sqrt{u}$ et $c\sqrt{u-1}$, son équation serait

$$(5) \quad \frac{X^2}{u} + \frac{Y^2}{u-1} - c^2 = 0.$$

Cette même équation représentera la conique rapportée à deux axes rectangulaires donnés d'une manière quelconque, si l'on pose

$$(6) \quad X = x \cos \theta - y \sin \theta - p, \quad Y = x \sin \theta + y \cos \theta - q,$$

où θ , p , q sont trois constantes données. De même l'équation de la seconde conique pourra s'écrire

$$(5') \quad \frac{X_1^2}{u} + \frac{Y_1^2}{u-1} - c_1^2 = 0$$

[u étant le même dans l'équation (5), de manière à exprimer la similitude des deux courbes], avec

$$(6') \quad \begin{cases} X_1 = x \cos \theta_1 - y \sin \theta_1 - p_1, \\ Y_1 = x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1 - q_1. \end{cases}$$

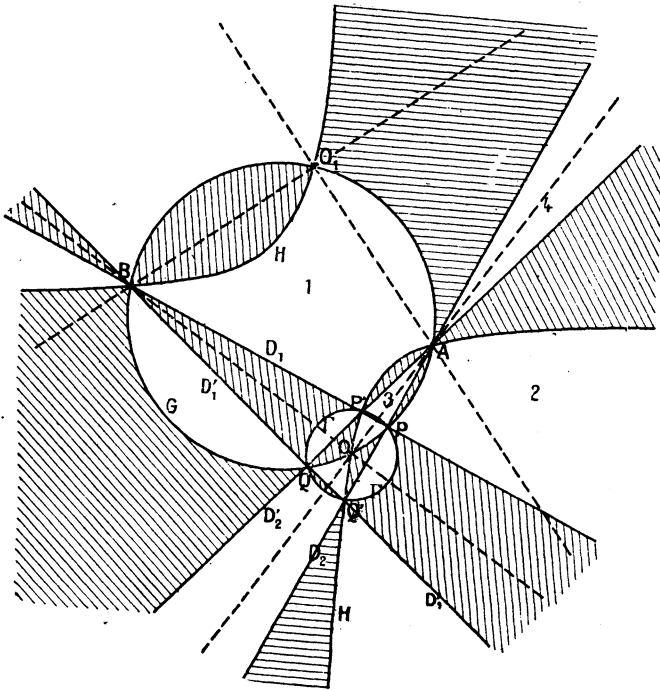
L'élimination de u entre (5) et (5') pourrait s'effectuer en rendant entier. Mais on peut aussi résoudre par

rapport à $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u-1}$ et exprimer que la différence des inverses des quantités ainsi obtenues est 1. Il vient ainsi

$$(7) \quad (X^2 Y_1^2 - X_1^2 Y^2) [c^2 (X_1^2 + Y_1^2) - c_1^2 (X^2 + Y^2)] \\ = (c^2 Y_1^2 - c_1^2 Y^2) (c^2 X_1^2 - c_1^2 X^2).$$

Le lieu est donc une courbe L du sixième degré. On

Fig. 1.



voit immédiatement qu'elle se prête au mode de construction « par régions », lequel conduit, ici, à tracer les

courbes

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = XY_1 - X_1 Y = 0, \\ H = XY_1 + YX_1 = 0, \\ \Gamma = c^2(X_1^2 + Y_1^2) - c_1^2(X^2 + Y^2) = 0, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D_1 = cX_1 - c_1X = 0, & D_2 = cY_1 - c_1Y = 0; \\ D'_1 = cX_1 + c_1X = 0, & D'_2 = cY_1 + c_1Y = 0. \end{array} \right.$$

Les deux premières sont un cercle G et une hyperbole équilatère H , toutes deux passant par les centres O , O_1 des deux coniques génératrices, par le point de rencontre A des axes focaux et le point de rencontre B des axes non focaux. Le cercle a son centre au milieu de AB ; l'hyperbole a son centre au milieu de OO_1 et ses asymptotes parallèles aux bissectrices des angles OAO_1 , OBO_1 . $\Gamma = 0$ est un cercle par rapport auquel O , O_1 sont inverses l'un de l'autre. Enfin D_1 , D_2 , D'_1 , D'_2 sont quatre droites dont la disposition, ainsi que celle des trois coniques précédentes, est représentée figure 1.

La courbe L , qui a pour asymptotes (réelles) celles de l'hyperbole H , a, d'après la forme même de l'équation (7), les points doubles A (commun à G , H , D_2 , D'_2), B (commun à G , H , D_1 , D'_1) et les quatre autres P (commun à G , Γ , D_1 , D_2), Q (commun à G , Γ , D'_1 , D'_2), P' (commun à H , Γ , D_1 , D'_2), Q' (commun à H , Γ , D'_1 , D_2).

Soit, en tout, *huit* points doubles, car il faut encore compter comme tels les points circulaires à l'infini.

4. Les points doubles ainsi trouvés sont-ils les seuls?

C'est ce que la méthode précédente va nous permettre de décider. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi dans le cas général, c'est-à-dire pour un choix arbitraire des données. Au contraire, des points doubles

supplémentaires apparaîtront dans des cas spéciaux, caractérisés par une relation entre les données. Mais il est entendu que je laisserai de côté tous les cas encore plus particuliers, c'est-à-dire ceux dont la réalisation exigerait deux relations ou plus entre les données.

Les branches infinies de la courbe étant connues par les remarques qui précèdent, nous nous bornons aux points à distance finie. Nous avons à chercher :

1° Les points doubles qui, au point de vue du raisonnement précédent, apparaissent par projection. Il faut, pour cela, que les deux polynomes (1), (1'), c'est-à-dire les deux polynomes en u obtenus en multipliant par $u(u-1)$ les quantités (5), (5'), soient identiques à un facteur constant k près, puisqu'ils sont du second degré. Les quantités (5), (5') elles-mêmes doivent donc ne différer l'une de l'autre que par ce même facteur k , ce qui exige

$$k = \frac{X_1^2}{X^2} = \frac{Y_1^2}{Y^2} = \frac{c_1^2}{c^2}.$$

Or, ceci donne précisément (à distance finie) les points doubles déjà obtenus.

2° Les points doubles qui se présentent comme « véritables ».

Nous les trouverons en écrivant les relations (4). En tenant compte des expressions (6), (6'), l'égalité des deux premiers rapports donne

$$(10) \quad \frac{\left(\frac{X_1 \cos \theta_1}{u} + \frac{Y_1 \sin \theta_1}{u-1} \right)}{\left(\frac{X \cos \theta}{u} + \frac{Y \sin \theta}{u-1} \right)} = \frac{\left(\frac{-X_1 \sin \theta_1}{u} + \frac{Y_1 \cos \theta_1}{u-1} \right)}{\left(\frac{-X \sin \theta}{u} + \frac{Y \cos \theta}{u-1} \right)} = k$$

et le dernier rapport,

$$(11) \quad k = \frac{\left[\frac{X_1^2}{u^2} + \frac{Y_1^2}{(u-1)^2} \right]}{\frac{X^2}{u^2} + \frac{Y^2}{(u-1)^2}}.$$

Or les relations (10) donnent

$$(11') \quad \frac{X_1^2}{u^2} + \frac{Y_1^2}{(u-1)^2} = \left[\frac{X^2}{u^2} + \frac{Y^2}{(u-1)^2} \right] k^2.$$

D'où (1)

$$k^2 - k = 0.$$

$k = 0$ (ou $k = \infty$) ne donnerait rien [les équations (10) exigeraient $X_1 = Y_1 = 0$, ce qui est incompatible (2) avec (5')]. On doit donc prendre

$$k = 1,$$

moyennant quoi la relation (11') est vérifiée d'elle-même.

Pour $k = 1$, les relations (4) expriment que l'équation

$$(12) \quad \frac{X_1^2 - X^2}{u} + \frac{Y_1^2 - Y^2}{u-1} = c_1^2 - c^2$$

représente une surface ayant un point conique au point double cherché et que, en particulier, la conique obtenue en laissant u constant se compose de deux droites se coupant en ce point.

(1) La relation (11') aurait lieu en même temps que (11) si les deux membres en étaient simultanément nuls, c'est-à-dire si l'on avait, à la fois,

$$\frac{Y}{u-1} = \pm i \frac{X}{u}, \quad \frac{Y_1}{u-1} = \pm i \frac{X_1}{u}$$

(les signes à prendre dans ces deux égalités étant indépendants l'un de l'autre). Mais, s'il en était ainsi, (5) donnerait pour la valeur commune des deux membres de la première égalité précédente, la valeur $\pm c$, et (5') pour les deux membres de la seconde, la valeur commune $\pm c_1$. Un tel point double (imaginaire, d'ailleurs comme le serait toute la figure dans ce cas) rentrerait encore dans la catégorie déjà étudiée puisqu'il appartiendrait à la fois à deux des droites (9).

(2) Cette incompatibilité disparaîtrait pour $u = 0$ ou $u - 1 = 0$. Mais alors on aurait aussi $X = 0$ ou $Y = 0$, de sorte qu'on retomberait sur l'un des points A, B.

Cette conique est toujours une hyperbole équilatère ayant, comme H, ses asymptotes également inclinées sur BO et BO₁. Il y a avantage, pour cette partie du calcul, à prendre pour axes les bissectrices des angles formés par BO, BO₁, de manière que

$$\begin{aligned} X &= x \cos \theta - y \sin \theta, & X_1 &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ Y &= (x - \alpha) \sin \theta + (y - \beta) \cos \theta, \\ Y_1 &= (y - \beta) \cos \theta - (x - \alpha) \sin \theta, \end{aligned}$$

α et β désignant les coordonnées du point A par rapport aux axes ainsi choisis. Dans ces conditions, l'équation de la conique (12) s'écrit, pour $u = u_0$,

$$(12') \quad -\frac{xy}{u} + \frac{(x - \alpha)(y - \beta)}{u - 1} + \frac{c_1^2 - c^2}{\sin 2\theta} = 0$$

et son centre (une fois trouvée la valeur u_0 qu'il faut donner à u) est le point

$$(13) \quad x_0 = \alpha u_0, \quad y_0 = \beta u_0.$$

Le point double cherché ω est donc sur la droite AB et la divise dans le rapport u_0 , soit

$$\overline{\omega B} = u_0 \overline{AB}.$$

On vérifie à nouveau sans difficulté que ce choix du point ω annule également la dérivée par rapport à u .

Il nous reste à écrire que les coordonnées de ω vérifient, non pas seulement l'équation (12), mais les deux équations (5), (5'). Comme les valeurs de X, Y, X₁, Y₁ en ω s'obtiennent (au signe près) en multipliant par u ou $u - 1$ les longueurs OA, OB, O₁A, O₁B, il vient ainsi

$$(14) \quad u_0 \cdot \overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = c^2, \quad u_0 \cdot \overline{AB}^2 - \overline{O_1B}^2 = c_1^2.$$

La condition pour que le point double existe est donc

$$\overline{OB}^2 - \overline{O_1B}^2 = c_1^2 - c^2,$$

condition suffisante en même temps que nécessaire, car si elle est remplie, les deux équations*(14) sont compatibles en u_0 , après quoi le point (13) satisfait à toutes les conditions imposées au point ω . En tenant compte de (14), on constate aisément que ce point est le pied de la hauteur du triangle $AP'B$ (ou $AQ'B$).

5. Le mode de construction par régions, si simple et si intuitif, est, comme on sait, une méthode incomplète. Il fournit sur la courbe proposée un certain nombre de renseignements, mais non tous ceux dont on a besoin pour la connaissance, même qualitative (celle dont il s'agit en ce moment), de sa forme. Par exemple, il peut y avoir des régions où la méthode *permet* le passage de la courbe, sans prouver qu'elle *doit* y passer (Exemple : la région numérotée 4 sur la figure 1).

Peut-on obvier à cet inconvénient?

Pour cela, il importe d'en pénétrer la raison, et cette raison est facile à indiquer.

Pour construire la courbe

$$(15) \quad \Phi(x, y) = \Psi(x, y),$$

la méthode des régions consiste :

1° A discuter le signe de chacun des deux membres, de manière à éliminer toutes les régions du plan où ce signe n'est pas le même;

2° A déterminer les points communs aux deux lignes $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$, points qui appartiennent nécessairement à la courbe étudiée.

Or les éléments ainsi notés ne sont pas particuliers à la seule courbe (15) : ils lui sont évidemment communs avec toutes les courbes

$$(16) \quad \Phi(x, y) = \lambda \Psi(x, y),$$

λ désignant une constante positive quelconque (ou même une quantité variable, pourvu qu'elle soit toujours positive pour x et y réels). La méthode ne saurait donc décèler d'autres propriétés que celles qui sont communes à toutes les courbes (16).

Par contre, nous pourrons compléter les indications ainsi acquises si nous arrivons à étudier la manière dont se forme cette courbe (16) lorsque λ varie de 0 à $+\infty$.

Pour $\lambda = 0$ on a $\Phi(x, y) = 0$, et pour $\lambda = \infty$, $\Psi(x, y) = 0$, lignes dont, par hypothèse, la forme est bien connue.

D'autre part, si l'on a construit un arc de la courbe

$$\mathcal{F}(x, y) = \lambda_0$$

(λ_0 étant une constante) sur lequel n'existe aucun point singulier, de sorte que $\mathcal{F}y$ admet des dérivées partielles continues et que $\mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y$ ne s'y annulent jamais simultanément, on pourra affirmer que la courbe

$$\mathcal{F}(x, y) = \lambda_0 + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif ou négatif très petit, présente un arc très voisin du premier et de forme tout analogue : c'est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

Un changement d'aspect de la courbe $\mathcal{F}(x, y) = \lambda$, lorsque λ varie, ne peut donc avoir lieu que :

1° Au voisinage des points où \mathcal{F} cesse d'avoir des dérivées continues. Si nous nous bornons au cas où la

fonction \mathcal{F} est rationnelle (ou se comporte comme une fonction rationnelle), ces points sont ceux où \mathcal{F} se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, soit, pour $\mathcal{F} = \frac{\Phi}{\Psi}$, les points communs à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$;

2° Au voisinage des points où $\mathcal{F}'_x = \mathcal{F}'_y = 0$.

Le premier cas se discute par les méthodes classiques d'étude d'une courbe autour d'un de ses points. Dans le problème particulier considéré dans ce qui précède, les points communs aux lignes $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$ sont tous doubles pour chacune d'elles; ce sont, pour la courbe (16), des points doubles *permanents*, c'est-à-dire points doubles quel que soit λ . En un tel point (x_0, y_0) , il y aura deux tangentes, définies en égalant à zéro un polynôme du second degré du type

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 \\ - \lambda[a'(x - x_0)^2 + 2b'(x - x_0)(y - y_0) + c'(y - y_0)^2]$$

(a, b, c, a', b', c' étant des coefficients numériques); et, dans la région du plan qui avoisine ce point, un changement de forme de la courbe pourra avoir lieu au cours de la variation de λ , par suite du changement de signe du discriminant de ce polynôme, le point (x_0, y_0) passant alors du rôle de point double réel à celui de point isolé par l'intermédiaire d'un rebroussement.

Dans le second cas, le point considéré est point double *accidentel*, c'est-à-dire point double pour une valeur déterminée λ_0 de λ et pour celle-là seulement. Pour $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, la courbe aura sensiblement, au voisinage de ce point, la même forme que la conique

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 = \varepsilon,$$

a, b, c étant encore des constantes convenablement choisies; autrement dit, si $b^2 - ac < 0$, elle passera

(ϵ changeant de signe) du réel (très petite ovale autour du point considéré) à l'imaginaire. Si, au contraire, le point double correspondant à $\lambda = \lambda_0$ est à branches réelles (et distinctes), la courbe aura, près de ce point, sensiblement la forme de deux petits arcs d'hyperbole dont chacun, lorsque ϵ changera de signe, se coupera en deux, chaque moitié allant se raccorder avec la moitié correspondante de l'arc opposé.

Si donc on sait étudier ces points doubles — comme, d'autre part, les mêmes considérations permettent de dessiner la forme de la courbe pour λ très petit ou très grand \rightarrow , on possédera, pour cela même, tous les renseignements nécessaires.

6. Appliquons à la courbe (7). Nous devons multiplier le second membre de son équation par λ ; mais, à cause de l'homogénéité que présentent ses deux membres par rapport à c et c_1 , nous voyons que cela revient à changer c, c_1 en $c\sqrt{\lambda}, c_1\sqrt{\lambda}$. Nous obtiendrons donc la famille de courbes correspondant à (16) en imaginant que, dans l'énoncé de notre problème, nous commençons par ne nous donner (outre les positions des quatre axes) que le rapport $\frac{c_1}{c}$ des distances focales, et faisant varier ensuite ces dernières, simultanément et proportionnellement l'une à l'autre, de 0 à ∞ .

La connaissance du rapport $\frac{c_1}{c}$ suffit d'ailleurs à construire toutes les lignes séparatrices (8), (9) (*fig. 1*). On ombrera, à la manière ordinaire, de deux en deux les régions déterminées par ces lignes. La disposition étant celle qui est représentée figure 1, si, en outre, le point de rencontre A des axes focaux est bien celui qui est désigné ainsi sur la figure, les régions négatives,

c'est-à-dire celles où les deux membres de (7) auront des signes contraires et où, par conséquent, la courbe ne pourra pas passer, seront celles que nous avons ombrées, les régions permises à la courbe autour de A étant celles qui contiennent les directions $Y=0$, $Y_1=0$, tandis que l'inverse a lieu autour du point B où se coupent les axes non focaux. Le point double B est d'ailleurs à tangentes réelles pour toute valeur positive de λ tandis que A, qui est à tangentes réelles pour $\lambda=0, \infty$, est point isolé entre les deux valeurs $\lambda = \frac{OA^2}{c^2}$ et $\lambda = \frac{O_1A^2}{c_1^2}$, ces dernières correspondant à des points de rebroussement. C'est ce qu'on reconnaît immédiatement sur l'équation (7), en se plaçant successivement au voisinage du point ($Y=Y_1=0$) et du point ($X=X_1=0$), et c'est ce qu'on peut d'ailleurs voir géométriquement d'après l'énoncé du problème (1).

Quant aux points P, P', Q, Q', ils sont toujours à tangentes réelles (2) pour toute valeur réelle de λ . Enfin, il en est de même (3) du point ω .

(1) Le point B correspond au cas où les coniques variables c, c_1 se réduisent à deux hyperboles infiniment aplaties suivant leurs axes non transverses ($u=1$). Le point A correspond à $u=0$, c'est-à-dire au passage d'ellipses infiniment aplaties chacune suivant son segment focal à des hyperboles infiniment aplaties suivant les prolongements de leurs segments focaux. De telles courbes ont leurs points d'intersection réels si A est intérieur aux deux segments focaux ou extérieur à tous deux; imaginaires, s'il est intérieur à l'un et extérieur à l'autre.

(2) Il en est ainsi, quelle que soit la disposition de figure. En tenant compte de ce que G, H, Γ sont, à des facteurs constants près, identiquement égaux à $D_1D'_2 - D'_1D_2$, $D'_1D'_2 - D_1D_2$, $D_1D'_1 + D_2D'_2$, on voit que, en P, par exemple, le faisceau des tangentes est, quel que soit λ , de la forme $D_1^2 - D_2^2 + mD_1D_2 = 0$.

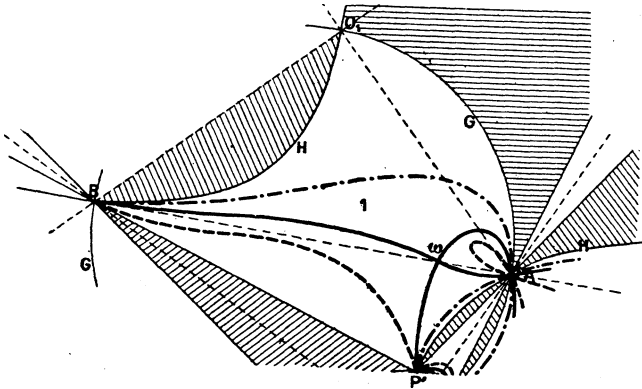
(3) Les tangentes en ω à la courbe lieu du point (x, y, u) dans l'espace s'obtiennent en coupant par le plan tangent à la surface (5) ou à la surface (5') le cône tangent à (12'). Or, en posant, dans

Dans ces conditions, au cours de la variation de λ , il ne se produira de changement de forme (toujours au sens qualitatif du mot) que dans les régions numérotées 1, 2, 3, 4 sur la figure 1. Elles correspondent aux valeurs successives

$$\lambda_1 = \frac{\overline{O_1 A}^2 - \overline{OA}^2}{c_1^2 - c^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\overline{O_1 A}^2}{c_1^2}, \quad \lambda_3 = \frac{\overline{OA}^2}{c^2}$$

du paramètre λ . La figure 2 montre les dispositions successives de la courbe dans la région 1. pour $\lambda < \lambda_1$

Fig. 2.

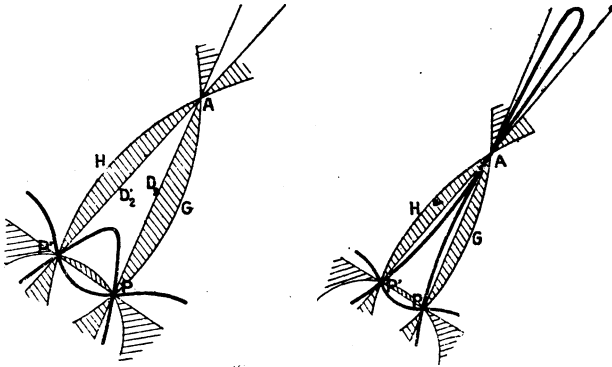


(trait ponctué), $\lambda = \lambda_1$ (trait plein), $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (trait mixte). La boucle de sommet A diminue ensuite jusqu'à ce qu'on ait $\lambda = \lambda_2$ (rebroussement dans la région 2). Le point A reste point isolé jusqu'à $\lambda = \lambda_3$ et les changements de forme qui se produisent à partir

cette dernière, $u = u_0 + u'$, $x = \alpha u_0 + x'$, $y = \beta u_0 + y'$, on voit que ce cône tangent se décompose en deux plans $x' = \alpha u'$, $y' = \beta u'$. Dans le plan de xy , les tangentes sont symétriques des droites (12) par rapport à AB.

de ce moment intéressent les régions 3 et 4. Les formes présentées par la courbe, dans ces régions, pour $\lambda < \lambda_3$ et $\lambda > \lambda_3$ sont représentées figures 3, 3 bis.

Fig. 3, 3 bis.



Bien entendu, si les rôles des points A et B — autrement dit ceux des axes focaux et non focaux — étaient intervertis, la figure gardant par ailleurs la disposition représentée figure 1, le point ω n'interviendrait pas, la valeur correspondante de λ étant négative, et les seuls changements de forme seraient dus aux changements de nature du point double B (devenu A).

[R8e]

SUR LES LIAISONS DE ROULEMENT;

PAR M. ÉT. DELAÏSSUS.

1. Considérons un système matériel soumis à des liaisons de roulement et soient x_1, \dots, x_n les paramètres

indépendants qui le définissent quand il est débarrassé des conditions de roulement, c'est-à-dire quand il est soumis aux simples conditions de contact.

Les conditions de roulement se traduiront par des équations différentielles du premier ordre

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0 \\ E_2 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ E_m &= 0 \end{aligned} \qquad (m < n)$$

et l'on sera ramené à un système holonome si ce système d'équations différentielles est complètement intégrable, c'est-à-dire peut se remplacer par un système équivalent d'équations finies. Dans le cas contraire, le système sera véritablement non holonome.

On peut bien souvent reconnaître *a priori* s'il en est ainsi sans tenter l'intégration du système des équations E. On est alors assuré qu'elle est possible et on la cherche avec la certitude de ne pas se livrer à des tentatives sans issue.

2. Un premier cas bien évident est celui de

$$m = n - 1$$

car le système E est de la forme

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

et admet $n - 1$ intégrales distinctes

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \quad \dots, \quad f_{n-1} = C_{n-1}.$$

Un disque plan de forme quelconque roulant dans un plan fixe sur une courbe fixe est ainsi un système holonome ($n = 2$, $m = 1$).

Il en est de même pour un solide roulant sur une surface fixe et dont un point décrit une courbe donnée ou dont une droite décrit une congruence donnée ou dont un plan reste tangent à une développable donnée ($n = 3, m = 2$).

3. Arrivons maintenant au cas

$$m < n - 1.$$

Si le système se ramène à un système holonome, c'est que les équations E admettent m intégrales

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \quad \dots, \quad f_m = C_m,$$

montrant qu'en partant d'une position quelconque $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ et suivant la liaison on ne peut atteindre que les positions M satisfaisant aux conditions

$$f_1 = f_1^0, \quad \dots, \quad f_m = f_m^0,$$

donc dépendant de $n - m$ paramètres.

Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi. Les positions M reliées à M_0 , c'est-à-dire telles qu'on puisse y arriver de M_0 en suivant la liaison, sont donc assujetties à vérifier m conditions pouvant, en abrégé, s'écrire

$$F_1(M_0, M) = 0, \quad \dots, \quad F_m(M_0, M) = 0,$$

et exprimant sous forme finie la condition pour que deux positions soient reliées entre elles. Si deux positions M, M' sont toutes deux reliées à une troisième M_0 , elles sont reliées entre elles comme on le voit en suivant le chemin M, M_0 , M'.

Supposons alors qu'au lieu de considérer une position fixe M_0 , on fasse dépendre cette position de m paramètres K_1, K_2, \dots, K_m , cette dépendance étant

choisie de façon que les équations F soient résolubles en K_1, \dots, K_m , quelle que soit la position M , en donnant

$$\Phi_1(M) = K_1, \quad \dots, \quad \Phi_m(M) = K_m.$$

Toute position M est reliée à la position M_0 que définissent les valeurs de K déterminée par les équations Φ . Toute position M' reliée à M sera reliée à M_0 , donc correspondra aux mêmes valeurs des K , de sorte qu'en définitive les équations F se trouvent mises sous la forme très spéciale

$$\Phi_1(M) = \Phi_1(M_0), \quad \dots, \quad \Phi_m(M) = \Phi_m(M_0).$$

Si nous écrivons que deux points infiniment voisins x_1, \dots, x_n et $x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n$ sont reliées, nous obtenons alors les équations différentielles

$$d\Phi_1 = 0, \quad \dots, \quad d\Phi_m = 0,$$

qui, d'après leur signification, forment un système rigoureusement équivalent au système E . Celui-ci est donc complètement intégrable et le système est holonome.

Si, comme je l'ai proposé, nous appelons « systèmes semi-holonomes » les systèmes non holonomes qui, par intégration complète de leurs équations de liaison, se ramènent à des systèmes holonomes, nous pouvons dire :

Pour qu'un système à roulement à n paramètres et m équations de roulement soit semi-holonome, il faut et il suffit que les positions que la liaison permet d'atteindre en partant d'une position initiale quelconque ne dépendent que de $n - m$ paramètres,

en remarquant que cet énoncé comprend le cas particulier $m = n - 1$ examiné au début.

Remarquons aussi que la démonstration précédente nous montrerait le résultat suivant :

Si les positions accessibles en partant d'une position initiale donnée dépendent de $n - p$ paramètres ($p < m$), les équations de roulement admettent p combinaisons intégrables, de sorte que le système peut se ramener à $n - p$ paramètres liés par $m - p$ équations linéaires du premier ordre.

Donnons quelques exemples.

Une courbe gauche matérielle, assujettie à rouler sur une courbe gauche fixe, est un système semi-holonyme, car $n = 3$, $m = 1$, et l'on voit immédiatement que les positions obtenues ne dépendent que de deux paramètres qui sont l'arc de roulement et l'angle de rotation autour de la tangente; comme

$$2 = n - m,$$

on a bien le résultat annoncé

Un solide uniquement assujetti à rouler sur une surface fixe est un système véritablement non holonome, car on a $n = 5$, $m = 2$ et partant d'une position initiale, on peut atteindre par roulement et pivotement une position quelconque. Les positions obtenues dépendent de 5 paramètres. Ce nombre est supérieur à $n - m$ qui est ici 3. Si l'on applique la seconde propriété, on voit que p est nul, de sorte que non seulement on est assuré que le système est non holonome, mais aussi que ses équations de roulement ne présentent aucune combinaison intégrable permettant de simplifier le problème.

BIBLIOGRAPHIE.

LUDWIK SILBERSTEIN. — *Éléments de la théorie électromagnétique de la lumière* (traduit de l'anglais par G. Matisse). 1 vol. in-8 couronne (185 × 115) de iv-94 pages; Paris, Gauthier-Villars, 1923. Prix : 6^{fr}.

On trouvera dans ce petit volume, sous une forme que l'emploi systématique des notations vectorielles a rendu très concise, un excellent exposé des éléments de la *théorie de la Lumière* suivant les idées de Maxwell. La lecture en est très aisée et peut être recommandée à tous nos étudiants en Mathématiques et Physique.

Après une rapide mais très claire étude historique sur les origines de la théorie et ses avantages sur les théories élastiques, l'auteur, partant des équations de Maxwell-Hertz, établit les formules relatives aux ondes planes et développe la théorie de la réflexion et de la réfraction à la surface limite de deux milieux isotropes; il arrive ainsi aux formules de Fresnel relatives aux intensités des rayons réfléchi et réfracté, et analyse le phénomène de la réflexion totale (onde évanescente). Les dernières sections du livre sont consacrées à l'optique des milieux cristallins: étude de la propagation des ondes planes, axes électriques et axes optiques, cas des cristaux uniaxes.

Dans le très louable souci d'éviter aux lecteurs les plus petites difficultés, le traducteur a ajouté un certain nombre de Notes où il développe divers calculs omis dans le texte.

J. P.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1922.

Mathématiques spéciales.

I. Un cercle (Γ), rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz , a pour équations :

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Deux tangentes fixes Δ, Δ' , à ce cercle, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T .

Montrer qu'il existe dans l'espace deux points ω, ω' , d'où l'on voit constamment le segment MM' sous un angle droit lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées des points ω, ω' en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ' .

Où doit se trouver P pour que les points ω, ω' soient réels, ou imaginaires, ou confondus?

Trouver, lorsque Δ et Δ' varient, l'équation de la surface (S_Γ) lieu des points ω, ω' .

Construire la méridienne de cette surface et établir que (S_Γ) est le lieu des projections de l'origine O sur les plans tangents à un certain hyperboloïde.

Existe-t-il des points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ, Δ' ?

II. On considère une ellipse (E) ayant pour équations :

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > b).$$

Deux tangentes fixes Δ , Δ' , à cette ellipse, sont rencontrées en M et M' par une tangente variable T .

Montrer qu'il existe deux points ω , ω' de l'espace, d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit, lorsque T varie.

Exprimer les coordonnées $(x, y, \pm z)$ de ω' , ω en fonction des coordonnées (x_0, y_0) du point de rencontre P de Δ et Δ' .

D'après la nature de la question, prévoir géométriquement où doit se trouver le point P pour que ω et ω' soient confondus, et en déduire une décomposition en facteurs de l'expression de z^2 . Discuter la nature des points ω , ω' suivant la position de P .

Former l'équation de la surface (S_E) lieu de ω , ω' , lorsque Δ et Δ' varient. Les sections de (S_E) par les plans xOz et yOz comprennent chacune un cercle et un ovale de Cassini que l'on construira. On étudiera aussi la section par xOy .

Quels sont les couples Δ , Δ' auxquels correspond une infinité de points ω , ω' ?

Quels sont les points ω auxquels correspond une infinité de couples Δ , Δ' ?

III. La droite $\omega\omega'$ rencontre en un point I le plan xOy . Montrer qu'à un point $I(x, \beta)$ donné correspondent trois points P que l'on désignera par P_1, P_2, P_3 . Établir que ces points sont réels en même temps que le point I et qu'ils sont situés sur l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point. (On pourra prendre comme inconnue auxiliaire : $a^2 \frac{\alpha - x_0}{x_0}$.)

Former en fonction de (x, β) l'équation du cercle (K) circonscrit au triangle $P_1 P_2 P_3$.

Vérifier que (K) coupe le cercle orthoptique de (E) en deux points symétriques par rapport à O, qu'il passe par le symétrique de I par rapport à O, et enfin qu'il passe par le symétrique de I par rapport au centre de l'hyperbole d'Apollonius. Dédire de là une construction du cercle (K) et des points P₁, P₂, P₃, et que, I étant réel, les points correspondants P₁, P₂, P₃ sont réels.

NOTA. — Il sera commode de définir les tangentes à (Γ) ou (E) en fonction rationnelle d'un paramètre, et de définir un point du plan au moyen des paramètres des deux tangentes qui passent par ce point ⁽¹⁾.

SOLUTION PAR M. J. LEMAIRE.

I. Les coordonnées d'un point du cercle étant $\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ et $\frac{2at}{1+t^2}$, les tangentes Δ et Δ' aux points (t) et (t') ont pour équations

$$(\Delta) \quad (1-t^2)x + 2ty = a(1+t^2),$$

$$(\Delta') \quad (1-t'^2)x + 2t'y = a(1+t'^2),$$

et se coupent au point

$$(P) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{a(1-tt')}{1+tt'}, \\ y_0 = \frac{a(t+t')}{1+tt'}; \end{cases}$$

d'où

$$(I) \quad \begin{cases} t+t' = \frac{2y_0}{a+x_0}, \\ t't' = \frac{a-x_0}{a+x_0}; \end{cases}$$

⁽¹⁾ Le problème comporte deux autres parties; nous en donnons ultérieurement l'énoncé, avec la fin de la solution de M. Lemaire.

la tangente en un point arbitraire (T) du cercle coupe les précédentes aux points

$$(M) \quad \begin{cases} x = \frac{a(1-tT)}{1+tT}, \\ y = \frac{a(t+T)}{1+tT}; \end{cases}$$

$$(M') \quad \begin{cases} x' = \frac{a(1-t'T)}{1+t'T}, \\ y' = \frac{a(t'+T)}{1+t'T}. \end{cases}$$

La condition pour que le segment MM' soit vu d'un point $\omega(X, Y, Z)$ sous un angle droit est

$$(X-x)(X-x') + (Y-y)(Y-y') + Z^2 = 0;$$

remplaçons x, y, x', y' par leurs expressions et écrivons que cette relation est satisfaite pour toute valeur de T , nous obtenons

$$\begin{aligned} (X+a)^2 tt' + (Yt-a)(Yt'-a) + Z^2 tt' &= 0, \\ (X^2-a^2)(t+t') + (Y-at)(Yt'-a) \\ &+ (Y-at')(Yt-a) + Z^2(t+t') = 0, \\ (X-a)^2 + (Y-at)(Y-at') + Z^2 &= 0; \end{aligned}$$

d'où, en éliminant Z^2 ,

$$\begin{aligned} 4 tt'X + (t+t')(tt'-1)Y &= a(t^2t'^2-1), \\ 2(t+t')X + (t^2+t'^2-2)Y &= a(t+t')(1+tt'); \end{aligned}$$

ou, en introduisant x_0, y_0 à l'aide des formules (1),

$$\begin{aligned} (a^2-x_0^2)X - x_0y_0Y &= -a^2x_0, \\ x_0Y - y_0X &= 0, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{cases} X = \frac{a^2x_0}{x_0^2+y_0^2-a^2}, \\ Y = \frac{a^2y_0}{x_0^2+y_0^2-a^2}; \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} Z^2 &= -(X - a)^2 - (Y - at)(Y - at') \\ &= -(X - a)^2 - Y^2 + a(t + t')Y - a^2 tt', \end{aligned}$$

et, après simplifications,

$$Z^2 = \frac{a^4(x_0^2 + y_0^2 - 2a^2)}{(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^2}.$$

Finalement, les coordonnées des points ω , ω' sont données par

$$(2) \quad (\omega, \omega') \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{a^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2 - a^2}, \\ Y &= \frac{a^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2 - a^2}, \\ Z &= \frac{a^3(x_0^2 + y_0^2 - 2a^2)}{(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces points sont réels et distincts, confondus, ou imaginaires, tant que P est à distance finie, suivant que

$$x_0^2 + y_0^2 - 2a^2 \gtrless 0,$$

c'est-à-dire suivant que P est extérieur au cercle de Monge de (Γ) , sur ce cercle, ou intérieur à ce cercle; si Δ et Δ' sont parallèles, les expressions ci-dessus se réduisent à $X = Y = Z = 0$, les points ω et ω' se confondent en O.

Surface (S_Γ). — L'équation de la surface lieu des points ω , ω' s'obtient en éliminant x_0 et y_0 entre les relations (2), élimination aisée si l'on pose $x_0^2 + y_0^2 = \lambda$; on trouve

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 2a^2(X^2 + Y^2 - Z^2) = 0,$$

qui représente la podaire du point O par rapport à l'hyperboloïde

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - 2a^2 = 0;$$

c'est une surface de révolution d'axe Oz , dont la méridienne est la lemniscate

$$(X^2 + Z^2)^2 - 2a^2(X^2 - Z^2) = 0.$$

Supposons donnés ω , ω' et par suite leur projection $l(X, Y)$ sur le plan du cercle (Γ) , tout point P qui leur correspond est déterminé par

$$\begin{aligned} X(x_0^2 + y_0^2 - a^2) - a^2x_0 &= 0, \\ Xy_0 - Yx_0 &= 0, \end{aligned}$$

équations en x_0, y_0 qui représentent un cercle et une droite; donc à un couple de points ω, ω' , qui doivent être pris sur (S_Γ) , correspondent deux points P ; ces deux points sont réels, car l'équation

$$(X^2 + Y^2)x_0^2 - a^2Xx_0 - a^2X^2 = 0$$

qui donne leurs abscisses a des racines réelles; comme $(x_0^2 + y_0^2 - a^2)$ a le signe de $x_0 X$, un point $P(x_0, y_0)$ sera extérieur ou intérieur au cercle (Γ) suivant que x_0 et X seront ou non de même signe, et puisque l'équation ci-dessus a deux racines de signes contraires, l'un des deux points P sera extérieur, l'autre intérieur à (Γ) ; il y a donc toujours un, et un seul, système de deux tangentes réelles Δ, Δ' correspondant à un système de points ω, ω' , à moins toutefois que ces points coïncident avec O , auquel cas Δ et Δ' sont deux tangentes parallèles quelconques.

Géométriquement, considérons trois positions de la tangente variable, et soient $MM', M_1M'_1, M_2M'_2$ les segments correspondants limités à Δ et Δ' ; ces deux tangentes fixes n'étant pas supposées parallèles, les milieux des segments ne sont pas en ligne droite, car le lieu de ces milieux est une hyperbole, et les sphères ayant ces segments comme diamètres ont deux points communs

ω et ω' symétriques par rapport au plan de (Γ) ; si mm' est un segment variable limité à Δ et Δ' et vu de ω sous un angle droit, m et m' décrivent deux divisions homographiques; comme ces deux systèmes de divisions homographiques ont trois groupes M et M' , M_1 et M'_1 , M_2 et M'_2 , de points homologues communs, ils coïncident, autrement dit tous les segments tels que MM' sont vus de ω , comme les trois premiers, sous un angle droit.

Ce raisonnement, qui établit l'existence des points ω et ω' , est applicable à tout système de points M et M' formant deux divisions homographiques sur deux droites fixes Δ , Δ' , en même plan ou non, pourvu que le milieu de MM' ne décrive pas une droite, c'est-à-dire que les divisions ne soient pas semblables; il montre donc l'existence des points ω , ω' quand on remplace le cercle (Γ) par une ellipse ou une hyperbole (deuxième partie), et aussi quand M et M' sont les traces, sur deux génératrices de même espèce d'un hyperboloïde, d'une génératrice variable de l'autre espèce (quatrième partie).

Autrement : revenons au cas du cercle, et soient μ et μ' les traces sur OP du cercle de diamètre MM' ; si autour de μ on fait tourner deux droites rectangulaires, les cordes qu'elles interceptent sur le système Δ , Δ' enveloppent une conique de foyer μ et d'axe OP , laquelle a, avec le cercle, outre Δ et Δ' , deux tangentes communes symétriques par rapport à OP ; il n'existe donc, outre MM' , qu'un segment analogue vu de μ sous un angle droit, et le cercle ayant ce segment pour diamètre passe aussi en μ' , de sorte qu'au point μ correspond un point μ' et un seul. Il y a réciprocity entre ces points, qui déterminent sur OP deux divisions en involution; et si I est le point central, $\overline{I\mu} \times \overline{I\mu'}$ a

une valeur constante; les sphères de diamètre MM' coupent donc en deux points fixes, qui sont les points ω et ω' de la question, la perpendiculaire en I au plan du cercle.

En considérant les positions de MM' parallèles à Δ et Δ' , on voit que I est l'orthocentre du triangle PDD' , DD' segment perpendiculaire en O à OP et limité aux tangentes fixes; cette remarque permettrait, connaissant I, de retrouver P.

Signalons aussi la relation

$$\overline{O\omega}^2 + 2a^2 = 2 \cdot \overline{OD}^2,$$

facile à établir en considérant ω comme situé à la fois sur la perpendiculaire en I au plan du cercle donné et sur une sphère dont le diamètre MM' est perpendiculaire à OP.

Soient A et A' les points où (Γ) coupe OP, Aa et $A'a'$ les tangentes en ces points limitées à Δ ; les sphères de centres A et A', et de rayons Aa et $A'a'$, ont en commun les points ω et ω' dans le plan perpendiculaire au plan de (Γ) suivant OP, et l'on a

$$\omega A \cdot \omega A' = a A \cdot a' A' = a^2;$$

le lieu de ω et ω' est, dans ce plan, la lemniscate de foyers A et A' : c'est la méridienne de (S_Γ) .

II. Représentons par

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2bt}{1+t^2}$$

les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse (E); les tangentes Δ et Δ' aux points (t) et (t') ont pour

équations

$$(\Delta) \quad b(1-t^2)x + 2aty = ab(1+t^2),$$

$$(\Delta') \quad b(1-t'^2)x + 2at'y = ab(1+t'^2),$$

et se coupent au point

$$(P) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{a(1-tt')}{1+tt'}, \\ y_0 = \frac{b(t+t')}{1+tt'}; \end{cases}$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} t+t' = \frac{2ay_0}{b(a+x_0)}, \\ tt' = \frac{a-x_0}{a+x_0}; \end{cases}$$

les points M et M' où ces tangentes fixes sont coupées par la tangente en un point variable (T) ont pour coordonnées

$$(M) \quad \begin{cases} x = \frac{a(1-tT)}{1+tT}, \\ y = \frac{b(t+T)}{1+tT}; \end{cases}$$

$$(M') \quad \begin{cases} x' = \frac{a(1-t'T)}{1+t'T}, \\ y' = \frac{b(t'+T)}{1+t'T}. \end{cases}$$

En écrivant que MM' est vu d'un point $\omega(X, Y, Z)$ sous un angle droit, et conduisant le calcul comme dans la première partie, on trouve d'abord

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{x_0(b^4 + c^2y_0^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}, \\ Y = \frac{y_0(a^4 - c^2x_0^2)}{b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2}, \end{cases}$$

puis

$$\begin{aligned} Z^2 &= -(X-a)^2 - (Y-bt)(Y-bt') \\ &= -(X-a)^2 - Y^2 + b(t+t')Y - b^2 tt' \\ &= - \left[\frac{x_0(b^2 + c^2 y_0^2)}{E_0} - a \right]^2 - \frac{y_0^2(a^2 - c^2 x_0^2)^2}{E_0^2} \\ &\quad + \frac{2a y_0^2(a^2 - c^2 x_0^2)}{E_0(a+x_0)} - \frac{b^2(a-x_0)}{a+x_0}, \end{aligned}$$

où

$$E_0 \equiv b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2.$$

Remarquant que les points ω et ω' doivent coïncider, et par suite Z^2 être nul, si P appartient au cercle de Monge de l'ellipse ou à l'une quelconque des directrices réelles ou imaginaires, on met aisément Z^2 sous la forme

$$(3) \quad Z^2 = \frac{(x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2)(a^2 - c^2 x_0^2)(b^2 + c^2 y_0^2)}{E_0^2}.$$

Les formules (2) et (3) établissent l'existence des points ω et ω' , et donnent leurs coordonnées; de l'expression de Z^2 , il résulte que ces points sont réels et distincts si P est situé entre les directrices réelles de l'ellipse et son cercle de Monge, confondus s'il appartient à l'une de ces lignes, imaginaires dans le cas contraire.

Quand P appartient à une directrice, ω et ω' coïncident avec le foyer correspondant; quand il appartient au cercle de Monge, ω et ω' coïncident avec lui.

Surface (S_E). — Pour obtenir l'équation du lieu de ω et ω' quand Δ et Δ' varient, revenons aux équations qui déterminent ces points :

$$(4) \quad \begin{cases} (X-a)^2 + Y^2 + Z^2 - bY(t+t') + b^2 tt' = 0, \\ b^2 - bY(t+t') + [(X+a)^2 + Y^2 + Z^2] tt' = 0, \\ 2bY - (X^2 + Y^2 + Z^2 - c^2)(t+t') + 2bY tt' = 0, \end{cases}$$

et éliminons t et t' entre elles; il vient

$$(S_E) \begin{vmatrix} (X - a)^2 + Y^2 + Z^2 & bY & b^2 \\ b^2 & bY & (X + a)^2 + Y^2 + Z^2 \\ 2bY & X^2 + Y^2 + Z^2 - c^2 & 2bY \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui s'écrit aussi

$$(U^2 + a^2 + b^2)(U^2 + c^2)(U^2 - c^2) - 4a^2X^2(U^2 - c^2) - 4b^2Y^2(U^2 + c^2) = 0,$$

en posant $U^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2$, et qui représente une surface tricirculaire du sixième degré. Son intersection avec le plan xOz a pour équation

$$(X^2 + Z^2 + a^2 + b^2)(X^2 + Z^2 + a^2 - b^2)(X^2 + Z^2 - c^2) - 4a^2X^2(X^2 + Z^2 - c^2) = 0,$$

et est formée d'un cercle décrit sur la distance focale FF' de (E) comme diamètre, et de l'ovale de Cassini représenté par

$$[(X - a)^2 + Z^2][(X + a)^2 + Z^2] = b^4,$$

qui touche le cercle précédent aux foyers F et F' , et a lui-même pour foyers les sommets du grand axe de l'ellipse; cet ovale se compose de deux courbes fermées.

La trace de (S_E) sur le plan yOz se compose de même d'un cercle imaginaire passant aux foyers imaginaires de (E) , et de l'ovale de Cassini

$$[(Y - b)^2 + Z^2][(Y + b)^2 + Z^2] = a^4,$$

lequel contient lui-même ces foyers, est formé d'une seule courbe fermée, et a pour foyers les extrémités du petit axe de l'ellipse; chacun de ces ovales s'appuie en deux de ses sommets sur le cercle de Monge de l'ellipse.

Sur le plan même de l'ellipse, la trace de la surface a pour équation

$$(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)(X^2 + Y^2 + c^2)(X^2 + Y^2 - c^2) - 4a^2X^2(X^2 + Y^2 - c^2) - 4b^2Y^2(X^2 + Y^2 + c^2) = 0,$$

qu'on met aisément sous la forme suivante (en ayant recours par exemple aux coordonnées polaires) :

$$(X^2 + Y^2 - a^2 - b^2)[(X - c)^2 + Y^2][(X + c)^2 + Y^2] = 0,$$

laquelle montre que la trace de (S_E) se compose, comme on pouvait le prévoir, du cercle orthoptique et des tangentes isotropes de l'ellipse.

Remarque. — Écrivons les équations (4), qui déterminent ω et ω' , sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aX - bY(t + t') + a^2 + b^2tt' &= 0, \\ (X^2 + Y^2 + Z^2)tt' + 2aXtt' - bY(t + t') + a^2tt' + b^2 &= 0, \\ (X^2 + Y^2 + Z^2)(t + t') - 2bY(t + tt') - (a^2 - b^2)(t + t') &= 0; \end{aligned}$$

multiplions respectivement par $-2tt'$, -2 , et $(t + t')$ les deux membres de chacune, et ajoutons membre à membre les nouvelles équations, les termes du premier degré en X , Y , Z s'éliminent et l'on trouve

$$(t - t')^2(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 + b^2) = 2a^2(t + t')^2 + 2b^2(tt' - 1)^2;$$

si le diamètre conjugué de OP coupe Δ en D , les coordonnées de ce point sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a(t' + t)}{t' - t}, \\ \frac{b(tt' - 1)}{t' - t}. \end{array} \right.$$

de sorte que la relation ci-dessus peut s'écrire

$$\overline{O\omega}^2 + a^2 + b^2 = 2\overline{OD}^2.$$

Pour abrégé, nous ne discuterons pas les formules qui lient aux tangentes Δ et Δ' les points ω et ω' , et nous terminerons la deuxième partie de la question par des *considérations géométriques*.

D'abord, le raisonnement fait dans la première partie prouve l'existence des points ω et ω' pour deux tangentes Δ , Δ' qui se coupent à distance finie.

En considérant les tangentes respectivement parallèles à Δ et Δ' , lesquelles coupent Δ' en D' , Δ en D , sur le diamètre conjugué de OP , on voit que la droite $\omega\omega'$ est perpendiculaire au plan de l'ellipse au point I , orthocentre de PDD' : le point P , étant à la fois sur le diamètre OP et sur la perpendiculaire menée de I à la direction conjuguée de ce diamètre, *appartient à l'hyperbole d'Apollonius relative à I* .

Particularisant la tangente variable, nous voyons que ω et ω' sont les points communs à la droite précédente menée par I et à une sphère dont le diamètre MM' est parallèle à DD' , et il est alors aisé d'établir géométriquement la relation entre $O\omega$ et OD obtenue plus haut.

Si les tangentes Δ et Δ' sont parallèles, de direction quelconque, les hauteurs issues de D et D' , points de contact de ces tangentes, dans le triangle PDD' , sont parallèles, I est rejeté à l'infini, ω et ω' sont sur le cercle de l'infini, qui appartient d'ailleurs à la surface (S_E), puisqu'il est commun à toutes les sphères de diamètre variable MM' .

Si Δ et Δ' sont tangentes aux sommets de l'axe focal, il leur correspond une infinité de points ω et ω' , qui forment le cercle de diamètre FF' dans le plan perpendiculaire au plan de l'ellipse, cercle commun, dans ce cas, aux sphères de diamètre MM' .

Si Δ et Δ' sont tangentes aux sommets du petit

axe, infinité de points ω et ω' , imaginaires, dont le lieu est le cercle imaginaire passant aux foyers imaginaires de l'ellipse, dans le plan perpendiculaire au plan de la courbe, et ayant le même centre qu'elle.

Si P appartient au cercle de Monge, les deux points ω et ω' se confondent évidemment avec lui.

Enfin, si ce point appartient à une directrice, toutes les sphères de diamètre MM' passent au foyer correspondant, où viennent se confondre les deux points ω et ω' .

Dans le plan xOz , outre le cercle trouvé ci-dessus, la surface (S_E) possède encore les points ω , ω' provenant des tangentes Δ , Δ' dont le point commun P est sur Ox ; considérons deux pareilles tangentes, et appelons a et a' les points où Δ est coupée par les tangentes à (E) en ses sommets A et A' de l'axe focal : les sphères de centres A et A', et de rayons Aa et A'a', ont en commun les points ω et ω' dans le plan xOz , et l'on a

$$\omega A \cdot \omega A' = a A \cdot a' A' = b^2;$$

le lieu de ω , ω' , quand P se déplace sur Ox , est dans le plan xOz l'ovale de Cassini de foyers A et A' et passant aux foyers F et F' de l'ellipse; démonstration analogue pour le plan yOz .

Remarque. — Tout ce qui précède s'appliquerait, avec des modifications de détail, si l'on remplaçait l'ellipse par une hyperbole.

Examinons le cas où la conique donnée est une parabole (Π) de foyer F. Pour deux tangentes données Δ et Δ' non rectangulaires, les points ω , ω' n'existent pas, comme on s'en rend compte en considérant la tangente rejetée à l'infini.

Étudions le cas où Δ et Δ' sont rectangulaires, leur

point commun P étant sur la directrice : il existe pour deux telles droites une infinité de points ω , dont l'ensemble forme le cercle de diamètre FP dans le plan perpendiculaire au plan de (Π) ; et quand P décrit la directrice (L), ce cercle (FP) engendre la surface (S_{Π}) lieu de ω ; si L est le point où l'axe de la parabole coupe la directrice, cette surface est la transformée par inversion, de pôle F et de puissance \overline{FL}^2 , du cylindre de révolution qui a pour trace sur le plan de la parabole le cercle de diamètre FL.

Les plans passant par (L) la coupent suivant des cercles qui sont les inverses des cercles du cylindre; ces deux familles de cercles constituent les deux systèmes de lignes de courbure de (S_{Π}) . La droite (L) et la perpendiculaire en F au plan de (Π) sont sur la surface, qui ne contient comme autre droite que la droite à l'infini dans les plans perpendiculaires à l'axe de la parabole.

(S_{Π}) est l'enveloppe des sphères passant en F et ayant leurs centres sur la parabole donnée, les cercles de contact étant les cercles (FP); elle est aussi l'enveloppe des sphères orthogonales à la sphère de centre L, de rayon LF, et ayant leurs centres sur la parabole focale de (Π) , les cercles de contact étant les cercles du second système de lignes de courbure. (S_{Π}) , qui est du troisième degré, est une *cyclide de Dupin* particulière.

III. Le point I où $\omega\omega'$ coupe le plan de l'ellipse a pour coordonnées

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{x_0(b^4 + c^2 y_0^2)}{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2}, \\ \beta = \frac{y_0(a^4 - c^2 x_0^2)}{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2}. \end{cases}$$

L'hyperbole d'Apollonius relative à I a pour équation

$$(H) \quad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$c^2x_0y_0 + b^2\beta x_0 - a^2\alpha y_0 \equiv 0,$$

en substituant à α et β leurs valeurs ci-dessus : les points P correspondant à un point I donné sont donc bien sur l'hyperbole (H). Ils sont aussi sur les coniques représentées par les équations

$$\alpha E = b^2x + y(a^2\alpha y - b^2\beta x),$$

$$\beta E = a^2y - x(a^2\alpha y - b^2\beta x)$$

$$\text{où } E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2,$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(C) \quad \alpha x^2 + \beta xy - b^2x - a^2\alpha = 0,$$

$$(C') \quad \beta y^2 + \alpha xy - a^2y - b^2\beta = 0.$$

Ces deux coniques, ayant une direction asymptotique commune, ont trois points communs P_1, P_2, P_3 à distance finie.

L'équation générale des coniques qui passent par ces trois points est

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y + \lambda(\alpha x^2 + \beta xy - b^2x - a^2\alpha) \\ + \mu(\beta y^2 + \alpha xy - a^2y - b^2\beta) = 0,$$

qui représentera un cercle si

$$c^2 + \lambda\beta + \mu\alpha = 0,$$

$$\lambda\alpha = \mu\beta,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{c^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\mu = -\frac{c^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Le cercle (K) circonscrit au triangle $P_1 P_2 P_3$ a alors pour équation

$$(K) \quad c^2 \alpha \beta (x^2 + y^2) - b^2 \beta (\alpha^2 + \beta^2 + c^2) x \\ + \alpha^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2 - c^2) y - c^2 \alpha \beta (\alpha^2 + b^2) = 0.$$

Cette équation pouvant s'écrire

$$c^2 \alpha \beta (x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \\ - b^2 \beta (\alpha^2 + \beta^2 + c^2) x + \alpha^2 \alpha (\alpha^2 + \beta^2 - c^2) y = 0,$$

l'axe radical du cercle (K) et du cercle orthoptique de (E) passe en O, (K) coupe ce cercle en deux points symétriques par rapport à O.

On vérifie par un calcul simple que (K) passe au point $I'(-\alpha, -\beta)$ et au point $I''\left(\frac{\alpha^2 + b^2}{c^2} \alpha, -\frac{\alpha^2 + b^2}{c^2} \beta\right)$ symétrique de I par rapport au centre de l'hyperbole.

Construction de (K). — Il suffit de construire le cercle passant aux points I' et I'' et coupant le cercle de Monge en deux points diamétralement opposés, contenant par suite le point I''' de la droite OI'' déterminé par la condition

$$\overline{OI''} \cdot \overline{OI'''} = -(\alpha^2 + b^2);$$

I''' est intérieur à la branche de (H) qui ne passe pas en I'' , par suite les trois points communs au cercle et à l'hyperbole, autres que I'' , sont nécessairement réels.

Ce résultat peut être obtenu analytiquement comme il suit : les coniques (H) et (C) ont un point commun à l'infini dans la direction Oy , et leurs points communs à distance finie sont P_1, P_2, P_3 . L'équation de (H) pouvant s'écrire

$$\frac{\alpha^2(\alpha - x)}{x} = \frac{b^2(\beta - y)}{y},$$

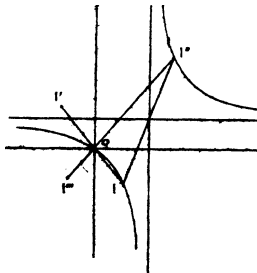
si nous appelons λ la valeur de ces rapports, d'où

$$x = \frac{a^2 \alpha}{a^2 + \lambda},$$

$$y = \frac{b^2 \beta}{b^2 + \lambda},$$

à toute valeur de λ correspond un point de l'hyperbole, et les valeurs de λ qui déterminent les points P sont les

Fig. 1.



racines de l'équation obtenue en substituant à x et y les expressions ci-dessus dans l'équation de (C), savoir :

$$f(\lambda) \equiv a^2 \alpha^2 (b^2 + \lambda) + b^2 \beta^2 (a^2 + \lambda) \\ - b^2 (a^2 + \lambda) (b^2 + \lambda) - (a^2 + \lambda)^2 (b^2 + \lambda) = 0.$$

Si dans $f(\lambda)$ nous remplaçons successivement λ par $-\infty$, $-a^2$, $-b^2$ et $+\infty$, nous trouvons $+\infty$, $-a^2 c^2 x^2$, $b^2 c^2 \beta^2$, $-\infty$: l'équation a donc trois racines réelles, et les trois points P sont bien réels en même temps que I.

(A suivre.)

QUESTION.

2459. On donne dans le plan une courbe C et un point O. Une courbe G de grandeur invariable tourne autour du point O et rencontre C en un point variable M. Trouver le point caractéristique de la tangente à G en M.

R. B.

ERRATA.

Page 257, ligne 6, lire $\widehat{BDC} = 90^\circ + \frac{\widehat{BMC}}{2}$,

au lieu de $\widehat{BDC} = 90^\circ = \frac{\widehat{BMC}}{2}$.

Page 261, ligne 5 à partir du bas de la page, lire $X'_1 + R\omega'_1$,
au lieu de $X_1 + R\omega_1$.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.
(TOME I, 5^e SÉRIE, 1922-1923.)

La classification adoptée est celle de l'*Index*
du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Analyse mathématique.

	Pages.
A 3e	Un théorème sur les équations algébriques entières, par M. G. Casabonne..... 161
B 2a	Transformations linéaires, volumes et déterminants, par M. G. Bouligand..... 237
D 2bα	Sur les fonctions analytiques d'une variable réelle, par M. Georges Valiron..... 321
D 6cδ	Identités nouvelles pour le calcul des nombres de Bernoulli, par M. L. Tits..... 191
H 5gβ	Monographie des polynomes de Kummer, par M. Pierre Humbert..... 81
H 10e	Sur une forme remarquable de l'intégrale de l'équation des cordes vibrantes, par M. S. Zaremba..... 330
J 2a	Un théorème du calcul des probabilités, par M. A. Guldberg..... 251
J 3a	Sur un problème particulier de variations, par M. Georges Valiron..... 196

Géométrie.

K' 2e	- Sur le théorème de Morley, par M. Raoul Bricard..... 254
K' 13b	Remarques sur les trièdres, par M. Ch. Bioche. 63
K' 20c	Sur l'étude algébrique des problèmes de la division des arcs, par M. E. Vessiot..... 1
K' 21b	Sur la trisection d'un angle, par M. B. Niewen- glowski..... 4

	Pages.
L ¹ e	Sur un théorème classique de Dandelin, par M. V. <i>Thebault</i> 200
L ¹ 6a	La construction du centre de courbure des coniques d'après Mannheim démontrée par le théorème de Pascal, par M. J. <i>Larras</i> 338
L ¹ 7	Sur les cercles focaux, par M. H. <i>Lebesgue</i> ... 340
L ¹ 7e	Système harmonique de trois coniques, par M. J. <i>Lemaire</i> 121
L ¹ 8d	Développables formées avec les normales d'une quadrique, par M. L. de <i>La Roère</i> 153
L ² 9a	Sur les coniques focales, par M. Ch. <i>Bioche</i> .. 62
L ² 11d	Sur les systèmes de quadriques ayant mêmes projections de leurs lignes de courbure sur un plan principal commun, par M. M. <i>d'Ocagne</i> 277
M ¹ h	Sur les points doubles des lieux géométriques et sur la construction par régions, par M. J. <i>Hadamard</i> 364
M ¹ 3j α	Note sur les podaires, par M. M.-F. <i>Egan</i> ... 109
M ² 1e	Remarques sur les jacobiens, par M. Ch. <i>Bioche</i> . 150
O ¹ 2a	Sur la formule d'Holditch et les applications qu'on peut en déduire, par M. R. <i>Estève</i> ... 284
O ¹ 2f, O ¹ 6j	Sur une notion d'équivalence locale apte à préciser certains points de la théorie des enveloppes, par M. <i>Georges Bouligand</i> 8
O ¹ 2k	Sur deux familles de courbes orthogonales, par M. G. <i>Fontené</i> 173
O ¹ 5h	Sur les ombilics, par M. <i>Paul Montel</i> 21
O ¹ 5h	Surface dont tous les points sont des ombilics, par M. J. <i>Lemaire</i> 258
O ¹ 6k	Sur la conservation de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface, par M. <i>Raoul Bricard</i> 58
O ¹ 8a	A propos de la formule d'Euler-Savary, par M. <i>Joseph Pérès</i> 205
P ¹ 3b	Sur un théorème de Liouville, par M. G. <i>Bouligand</i> 266

Mathématiques appliquées.

R1	Sur une manière simple d'obtenir géométriquement les formules de Lorentz, par M. <i>Max Morand</i> 41
----	---

	Pages.
R1d	Démonstration de la formule de l'accélération dans le mouvement relatif, par M. <i>B. Niewen-głowski</i> 147
R6	Introduction à l'étude de la Mécanique et de ses principes, par M. <i>Georges Bouligand</i> . 50, 93, 135 et 181
R8	Sur un invariant intégral se rattachant à la Mécanique statistique, par M. <i>J. Haag</i> 301
R8e	Sur les liaisons de roulement, par M. <i>Ét. Delassus</i> 379
R9a	Étude d'un problème particulier où intervient le frottement de glissement, par M. <i>R. Thiry</i> . 208
R9b	Sur les problèmes de choc avec frottement, par M. <i>J. Soula</i> 259
R9b	Sur un problème de choc avec frottement, par M. <i>H. V.</i> 351

Questions d'examens et de concours.

Certificats de Mathématiques générales.....	223
Certificats de Calcul différentiel et intégral.....	72 et 269
Certificats de Mécanique rationnelle.....	113
Certificat de Mécanique appliquée.....	268
Certificat de Physique mathématique.....	234
Concours d'Agrégation de 1919. Solution de la question de Mathématiques élémentaires, par M. <i>J. Lemaire</i>	216
Concours d'Agrégation de 1920. (Concours spécial.) Solution de la question d'Analyse, par M. <i>Robert</i>	303
Concours d'Agrégation de 1921. Composition de Mécanique rationnelle (2 ^e question). Solution par M. <i>G. Bouligand</i> ..	65
Remarques au sujet de l'un des problèmes de Mécanique donnés au concours d'Agrégation en 1921, par M. <i>R. Thiry</i>	165
Concours d'Agrégation de 1922. Solution de la question de Mathématiques spéciales, par M. <i>J. Lemaire</i>	385
Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1922. Sujets de composition et solution de la deuxième composition, par M. <i>R. B.</i>	23
Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1922. Sujets de composition.....	34

Correspondance.

M. R. BOUVAIST : A propos d'un résultat énoncé par M. <i>Egan</i> .	112
M. V. TRÉBAULT : Sur un précédent article.....	159
M. BICKART : A propos de la question 2458.....	358

Bibliographie.

	Pages.
LUDWIK SILBERSTEIN : Éléments de la théorie électromagnétique de la lumière (traduit par G. Matisse). Compte rendu par M. J. P...	384

Nécrologie.

HENRI BROCARD, par M. R. B.....	357
GEORGES FONTENÉ, par M. R. Bricard.....	361

Questions proposées.

2388.....	38
2390, 2393, 2397, 2399.....	39
2402, 2405, 2409 à 2411.....	40
2412.....	78
2414, 2419 à 2421.....	79
2424, 2427, 2452.....	80
2435.....	119
2436, 2442 à 2444.....	120
2445.....	160
2446 à 2449.....	188
2450, 2453 à 2455.....	189
2456 à 2458.....	190
2459.....	403

Solutions de questions proposées.

2402, par M. Faucheux.....	316
2405, par M. Joseph Denaux.....	317
2421, par M. R. Bouvaist.....	319
2421, autre solution, par M. J. P.....	320
2438, par M. Vincensini.....	359
2443, par M. Roy.....	360



TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME I, 5^e SÉRIE, 1922-23.)

- | | |
|---|---------------------------|
| CH. BIOCHE, 62, 63, 150. | P. MONTEL, 21. |
| G. BOULIGAND, 8, 50, 65, 93, 135,
181, 237, 266. | M. MORAND, 41. |
| R. BOUVAIST, 112, 319. | B. NIEWENGLOWSKI, 4, 147. |
| R. BRICARD, 27, 58, 254, 357,
361. | M. D'OCAGNE, 277. |
| G. CASABONNE, 161. | J. PÉRÈS, 205, 320, 384. |
| ET. DELASSUS, 379. | ROBERT, 303. |
| J. DENAUX, 317. | L. DE LA ROÈRE, 153. |
| M.-F. EGAN, 109. | G. ROY, 360. |
| R. ESTÈVE, 284. | J. SOULA, 259. |
| FAUCHEUX, 316. | V. THÉBAULT, 159, 200. |
| FONTENÉ, 173. | R. THIRY, 165, 208. |
| A. GULDBERG, 251. | L. TITS, 191. |
| J. HAAG, 301. | G. VALIRON, 196, 321. |
| J. HADAMARD, 364. | E. VESSIOT, 1. |
| P. HUMBERT, 81. | H. VILLAT, 351. |
| J. LARRAS, 338. | VINCENSINI, 359. |
| H. LEBESGUE, 340. | S. ZAREMBA, 330. |
| J. LEMAIRE, 121, 216, 258, 385. | Errata , 276, 403. |