Nouvelles annales de mathématiques

M.-F. Egan

Note sur les podaires

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 109-112

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__109_1>

[M'3jα]

NOTE SUR LES PODAIRES;

PAR M. M.-F. EGAN.

1. On sait que la podaire d'une courbe par rapport à un point O touche la courbe aux pieds des normales issues de O. En effet, si P est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente au point M de la courbe, la podaire et le cercle OMP se touchent en P. Or ce cercle, ayant OM pour diamètre, touche la courbe en M dans le cas limite où P se confond avec M.

Il est donc naturel, dans le cas d'une conique S, de chercher à mettre l'équation de sa podaire sous la forme

$$SS_1 - S_2^2 = 0,$$

S_1 et S_2 étant des coniques. Et de fait, si O est le point (p, q) et S est $ax^2 + by^2 + c$, l'équation de la podaire peut s'écrire

$$(ax^2+by^2+c)\{b(x-p)^2+a(y-q)^2\}$$
$$=\{(a-b)xy-aqx+bpy\}^2,$$

S_2 étant l'hyperbole d'Apollonius, comme on pouvait s'y attendre. La podaire est donc l'enveloppe des coniques

$$\lambda^2(\alpha x^2+by^2+c)+2\lambda\{(a-b)xy-aqx+bpy\}$$
$$+b(x-p)^2+a(y-q)^2=0.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$a(\lambda x+y-q)^2+b(x-\lambda y-p)^2+c\lambda^2=0,$$

soit, en posant $\lambda=\cot\alpha$,

$$S_\alpha=a(x\cos\alpha+y\sin\alpha-q\sin\alpha)^2$$
$$+b(x\sin\alpha-y\cos\alpha-p\sin\alpha)^2+c\cos^2\alpha=0.$$

Transportons l'origine au point O et considérons la transformation T_α donnée par

$$z'=z\cos\alpha e^{i\alpha}\qquad(z=x+iy)$$

comprenant une rotation α autour de O suivie d'une homothétie de rapport $\cos\alpha$ ayant O pour centre. Il est assez facile de voir que la conique S_α est la transformée T_α de S.

2. Or, c'est là un fait général; *si* S *est une courbe plane quelconque, l'enveloppe des courbes* T_α S, *lorsque* α *prend de différentes valeurs, est la podaire de* S *par rapport au point* O.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que les transformés T_αM d'un point donné M sont tous situés sur le cercle ayant OM pour diamètre. Si M décrit une courbe, ses coordonnées sont des fonctions données d'un paramètre t, et les coordonnées de $T_\alpha M$ s'exprimeront par des équations de la forme

$$x = f(t, \alpha), \qquad y = g(t, \alpha).$$

Or, d'après un théorème de Czuber [1], l'enveloppe des courbes $\alpha =$ const., c'est-à-dire des $T_\alpha S$, s'identifie avec celle des courbes $t =$ const., toutes les deux étant données par

$$\frac{\partial x, y}{\partial t, \alpha} = 0.$$

Les courbes $t =$ const. étant les cercles de diamètre OM, la proposition est démontrée.

3. La podaire de S a une relation géométrique aux courbes $T_\alpha S$ qui rend intuitif le théorème précédent. Soient P et P_α les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur la tangente à S au point M et sur la tangente à $T_\alpha S$ au point correspondant M_α. Comme P_α est le transformé du point P, $P_\alpha P$ est perpendiculaire à OP_α et se confond par conséquent avec la tangente $M_\alpha P_\alpha$; aussi, l'angle POP_α est égal à α. Désignons par *podaire d'angle* θ d'une courbe le lieu de l'intersection de la tangente avec la droite qu'on obtient en faisant tourner autour du pôle O, d'un angle θ, la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente. (Ainsi la podaire d'angle zéro est la podaire au sens ordinaire.) D'après ce qu'on vient de voir, P est situé sur la podaire d'angle $-\alpha$ de $T_\alpha S$, c'est-à-dire que *la podaire de* S *est la podaire d'angle* $-\alpha$ *de* $T_\alpha S$.

Or, la podaire d'angle donné d'une courbe touche la

---

(1) CZUBER, *Archiv der Math. u. Physik*, 1901, p. 113. — *Voir* EGAN, *On some theorems of Czuber's* (*Messenger of Mathematics*, 1913, p. 178).

courbe aux pieds des quasi-normales issues du pôle; la démonstration que nous avons indiquée ci-dessus pour la podaire ordinaire s'applique presque mot à mot. Il s'ensuit que la podaire de S touche les $T_\alpha S$, ce qui démontre de nouveau notre proposition.

4. Nous avons vu que les tangentes à toutes les $T_\alpha S$, répondant à une même tangente t de S, concourent au pied de la perpendiculaire abaissée de Q sur t. D'autre part, deux courbes quelconques directement semblables peuvent évidemment être regardées comme des transformées T_α d'une troisième courbe. En effet, O étant le centre de similitude, δ l'angle constant entre deux demi-droites correspondantes, k le rapport des dimensions linéaires des deux systèmes, les angles α et β de transformation sont donnés par

$$\alpha - \beta = \delta, \qquad \cos\alpha = k\cos\beta.$$

Donc : *étant données deux courbes directement semblables, le lieu de l'intersection des couples de tangentes correspondantes est la podaire, par rapport au centre de similitude, d'une troisième courbe semblable aux deux premières.*

Deux cercles sont semblables d'une infinité de façons, et l'on peut associer les couples de tangentes faisant entre elles un angle donné quelconque; d'où le théorème connu, que le point d'intersection d'un tel couple décrit un limaçon bitangent aux deux cercles.