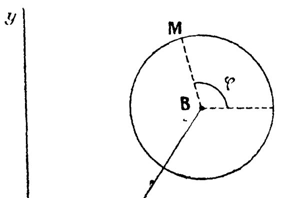
Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 113-119
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__113_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une barre homogène pesante* AB, *de longueur* $2l$, *de masse* m, *est assujettie à rester dans un plan vertical* (P), *son extrémité* A *glissant sur une horizontale* (D) *de ce plan; en outre, un disque circu-*



laire (C) *homogène pesant, de masse* m, *de rayon* $r(< l)$ *est fixé par son centre à l'extrémité* B *autour de laquelle* *il peut tourner librement [en restant dans le plan* (P)]. *Toutes les liaisons sont supposées sans frottement.*

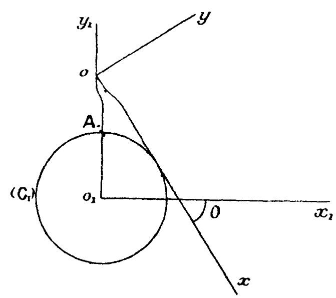
1° *Former les équations du mouvement du système et montrer qu'elles s'intègrent par quadratures.*

2° *Existe-t-il des mouvements dans lesquels la barre* AB *glisse en restant parallèle à elle-même? Que peut-on dire alors de la réaction de* (D) *et de la vitesse de* A?

3° *A un certain instant t, on fixe brusquement l'extrémité* A *en un point de* (D); *calculer la perte de force vive du système, connaissant l'état des vitesses immédiatement avant l'instant t.*

NOTATIONS. — On prendra (D) pour axe Ox, l'axe des y étant dirigé suivant la verticale ascendante; on désignera l'abscisse de A par x, l'angle de AB avec Ox par θ, et l'angle d'un rayon déterminé BM de (C) avec Ox par φ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un plan mobile (rapporté aux axes rectangulaires* xOy) *est assujetti à glisser sur un plan fixe (rapporté aux axes rectangulaires* $x_1O_1y_1$) *en*



satisfaisant aux conditions suivantes : La droite Ox du plan mobile reste tangente au cercle (C_1) *de centre* O_1 *et de rayon a du plan fixe, le point* O *de la barre décrit le prolongement* Ay_1 *d'un diamètre de* (C_1).

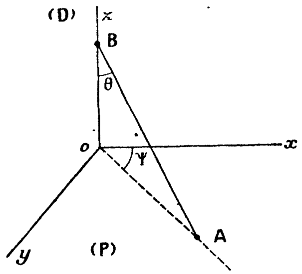
1° *Trouver la base et la roulante;*

2° *Former l'équation du cercle des inflexions dans le plan mobile et chercher ses intersections avec* O_1y_1.

(*On désignera l'angle de* Ox *avec* O_1x_1 *par* θ; *on remarquera que sur la figure cet angle est négatif.*)

(Poitiers, juin 1921.)

Épreuve théorique. — *Une barre matérielle homogène pesante* AB, *de section infiniment petite, de longueur* $2l$



est assujettie aux liaisons suivantes : son extrémité A *glisse sans frottement sur un plan horizontal* (P), *tandis que son extrémité* B *décrit sans frottement une verticale fixe* (D).

1° *Étudier et discuter le mouvement de la barre.*

[Notations. — On prendra pour axe Oz la droite (D), pour axes Ox et Oy deux droites rectangulaires du plan (P) issues de la trace O de (D) sur (P); on désignera par ψ l'angle du plan passant par AB et (D) avec le plan xOz et par θ l'angle de AB avec Oz; dans la discusion on supposera que la barre peut traverser le plan (P).]

2° *On supposera que la barre puisse se soulever au-dessus de* (P); *à quelle condition doivent satisfaire les quantités* ψ'_0 *et* θ'_0 *qui définissent les vitesses initiales pour que la barre ne se soulève pas au début du mouvement. Peut-on écrire la condition obtenue en n'employant comme éléments variables que la vitesse* v *du point* C (*milieu de* AB) *et sa hauteur* ζ *au-dessus de* (P)?

3° *La barre étant supposée immobile à l'instant* t_0, *une balle de dimensions négligeables vient la frapper en son milieu* C, *avec une vitesse* V, *dans une direction horizontale, perpendiculaire au plan vertical passant par la barre; aussitôt après le choc, la balle s'incorpore à la barre. Calculer les valeurs de* ψ' *et* θ' *immédiatement après le choc.*

(Poitiers, novembre 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque carrée, homogène, pesante* PQRS *est assujettie aux liaisons suivantes, réalisées sans frottement : deux sommets consécutifs* P *et* Q *glissent sur une même circonférence* C *fixe dont le plan est horizontal et dont le diamètre est égal aux diagonales de la plaque. Celle-ci peut donc librement tourner autour de l'axe* Oz *de* C *et autour du côté* PQ.

1° *Étudier le mouvement de la plaque. On limitera la discussion au cas où, à l'instant initial, la plaque fait un angle* θ_0 *avec le plan de* C *et se trouve animée d'une rotation de vitesse* ω *autour de* Oz, *en cherchant uniquement le sens de la variation initiale de l'angle* θ *du plan de la plaque avec celui de* C;

2° *La plaque étant immobile, verticale, au-dessous du plan de* C, *on applique une percussion en son centre; quel est l'état des vitesses immédiatement après la percussion?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une roue de poids* P *est assimilable à une circonférence homogène de rayon* r, *dont le centre* O *est situé sur l'axe* Oz *de rotation, mais dont le plan* Q *fait un angle* α *avec le plan* R *normal à l'axe. On prend pour origine le centre* O, *pour axe* Oy, *l'intersection de* Q *et de* R.

1° *Équation de l'ellipsoïde d'inertie de la roue relatif au point* O ;

2° *Évaluer les réactions qui s'exerceraient, pendant un mouvement de la roue de vitesse angulaire* ω *autour de* Oz *supposé horizontal et fixe, sur les tourillons qu'on assimilera à deux points situés sur* Oz *à une même distance* r *du centre. Application* $\alpha = 1°$; $\omega = 200$ *tours par minute;*

3° *Même question en supposant qu'au poids* P *s'ajoute un couple d'axe* Oz, *de moment connu* N.

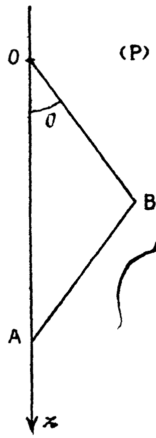
(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une tige rectiligne homogène pesante* AB *de masse* M *se meut dans un plan vertical* P; *l'une de ses extrémités* A *décrit la verticale descendante* Oz; *l'autre* B *est reliée à* O *par un fil* OB, *de même longueur* $2l$ *que la tige. Il n'y a pas de frottement :*

1° *Le plan* P *étant fixe, touver le mouvement de la tige, le fil étant censé tendu. On suppose qu'à l'instant initial,*

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

2° *Dans les mêmes conditions, calculer la réaction* $M \times R$ *agissant en* A *et la tension* $M \times T$ *du fil. Quelles sont les valeurs de* R *et de* T *à l'instant initial?*



3° *On suppose, en second lieu, que le plan* P *tourne autour de* O*z avec une vitesse angulaire constante* ω. *Quelle est l'équation du mouvement de la tige, les conditions initiales étant les mêmes? Peut-on choisir* ω *de manière que* θ *reste constamment égal à* $\frac{\pi}{6}$?

Epreuve pratique. — *Un solide homogène* S, *de masse* M, *est limité par deux sphères concentriques de rayon* r *et* $2r$.

1° *Ellipsoïde d'inertie de* S *relatif à un point* O *de sa surface extérieure;*

2° S_1 *étant censé non pesant et mobile autour de* O, *supposé fixe, prend un mouvement à la Poinsot. A l'instant initial, il est animé d'une rotation autour d'un axe* OΩ *faisant un angle de* 45° *avec la droite qui joint* O *au centre commun* C *des deux sphères. On demande la* *force vive de* S, *son moment cinétique* $O\sigma$ *par rapport à* O; *on donnera les projections* $O\sigma_1$ *et* $O\sigma_2$ *de ce vecteur sur le plan tangent en* O *et sur* OC;

3° *Définir géométriquement les deux cônes roulants correspondant au mouvement précédent.*

(Grenoble, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide* S *est limité extérieurement par un cylindre circulaire droit; la distribution des masses est telle que le centre de gravité* G *est sur l'axe* Gx *du cylindre, que* Gx *est un des axes principaux d'inertie relatif à* G, *et que les moments d'inertie par rapport aux trois axes principaux sont : pour* Gx, $A = 3MK^2$; *pour* Gy, $B = 4MK^2$; *pour* Gz, $C = 5MK^2$, M *étant la masse de* S. *Le solide étant placé sur un plan horizontal parfaitement poli, étudier son mouvement et effectuer la réduction au point* G *des réactions exercées par le plan. On appelle* ψ *l'angle de* Gx *et d'une horizontale fixe* Ox_1; θ *l'angle de* Gz *et de la verticale ascendante* Oz_1. *On désignera par* ξ, η, *a les coordonnées de* G *par rapport au trièdre* $Ox_1y_1z_1$ *fixe; a est constant. A l'instant initial,*

$$\psi' = \frac{d\psi}{dt} = \omega, \qquad \theta = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \theta' = \omega\alpha.$$

On discutera en faisant varier α.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une plaque homogène pesante est limitée par deux circonférences concentriques* C *et* c, *de centre* O *et de rayons* R *et* r :

1° *Elle oscille autour d'un point fixe de la petite circonférence, dans un plan vertical fixe. Longueur du pendule synchrone de ce pendule composé;*

2° *On considère un second mouvement de la plaque dans un plan vertical fixe où c roule sans glisser sur une circonférence fixe* c_1 *de centre* O_1, *et de rayon* $r_1 < r$, *intérieure à c. Etudier les petites oscillations correspondant à ce roulement sans glissement.*

Dans cette seconde partie, on appellera A_1 *le point le plus élevé de* c_1, A *le point de c qui vient coïncider avec* A_1; *on prendra comme paramètre l'angle* θ *de* OA *avec* O_1A_1.

(Grenoble, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un disque circulaire homogène, de rayon* R, *et une tige* OA *rectiligne homogène de longueur* 4R, *de même masse* M, *se meuvent dans un plan vertical fixe sous l'action de la pesanteur. Le disque repose sur une horizontale fixe* Ox, *la tige tourne autour du point fixe* O, *qui est son extrémité, et elle touche le disque. Il n'y a pas de frottement.*

1° *Étudier le mouvement du système. On prend pour paramètres l'abscisse* x *du centre du disque et l'angle* φ *de* Ox *avec un rayon marqué sur le disque*

$$\text{A}t = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad x = a > \text{R}\,\frac{dx}{dt} = 0;$$

2° *Déterminer, à l'instant initial, la réaction au point de contact du disque et de la tige.*

N. B. — On ne s'occupera pas du cas où la tige cesse d'être tangente au disque.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point de masse* m, *soumis à une résistance* $m\text{K}v^2$, *tombe verticalement. Son mouvement tend à devenir uniforme; quelle est la vitesse limite* a? *Quel espace* E *parcourt le mobile pendant que sa vitesse passe d'une valeur* v_0 *à une valeur* v_1 *et quel est le temps* T *correspondant à cette variation de vitesse ?*

Application numérique — Un parachute et son passager pèsent ensemble 100^{kg}; *la résistance de l'air, mesurée dans le système industriel, est* $0,16\,\text{S}v^2$. *Calculer* S *de manière que la vitesse limite soit de* 4^{m} *par seconde. Calculer alors* E *et* T *pour* $v_0 = 30\ \text{m : s}$ *et* $v_1 = 4,4\ \text{m : s}$.

(Grenoble, novembre 1921.)