J. LEMAIRE

Système harmonique de trois coniques

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 121-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__121_0>

[L¹17e]

SYSTÈME HARMONIQUE DE TROIS CONIQUES;

Par M. J. LEMAIRE,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

1. On donne ce nom à tout système de trois coniques dont deux quelconques sont polaires réciproques par rapport à la troisième. Admettant d'abord l'existence de tels systèmes, nous allons en établir quelques propriétés.

Soient (A), (B), (C) trois coniques formant un système harmonique : si T est le triangle conjugué commun à (A) et (B), et si nous remplaçons la figure formée par ces deux coniques et ce triangle par sa polaire réciproque par rapport à (A), nous obtenons les deux coniques (A) et (C) et le même triangle T, d'où ce théorème :

Théorème I. — *Les trois coniques d'un système harmonique ont un triangle conjugué commun.*

Appelons M et N les points où (A) et (B) sont touchés par une de leurs tangentes communes; puisque (C) est la polaire réciproque de (B) par rapport à (A), cette conique C doit passer par M; et comme elle est aussi la polaire réciproque de (A) par rapport à (B), elle passe de même par N.

Les quatre points tels que M et les quatre points tels que N appartiennent d'autre part à la conique lieu des points d'où l'on peut mener à (A) et (B) des tangentes formant un faisceau harmonique, laquelle coïncide par suite avec (C), de sorte qu'on a cette proposition :

THÉORÈME II. — *Chacune des coniques d'un système harmonique est le lieu des points d'où l'on peut mener aux deux autres des tangentes formant un faisceau harmonique.*

La conique (C) est de même tangente aux tangentes aux deux autres aux points communs à ces deux coniques. Comme ces huit droites touchent aussi la conique enveloppe des droites sur lesquelles (A) et (B) déterminent une division harmonique, laquelle coïncide par suite avec (C), on a ce théorème :

THÉORÈME III. — *Chacune des coniques d'un système harmonique est l'enveloppe des droites sur lesquelles les deux autres déterminent des points formant une division harmonique.*

Cette proposition se déduit d'ailleurs de la précédente par dualité : si, en effet, nous transformons l'ensemble des trois coniques par polaires réciproques par rapport à (C), cette conique se transforme en elle-même, et les deux autres se permutent; à un faisceau harmonique formé par les tangentes menées d'un point de (C) à (A) et (B), correspond une division harmonique déterminée par (B) et (A) sur une tangente à (C).

2. Considérons une tangente Δ à (C) qui coupe (A) en A et A′, et (B) en B et B′; le pôle P de cette droite par rapport à (A) appartient à (B), et son pôle Q par rapport à (B) appartient à (A); comme $(AA'BB') = -1$, le triangle PBB′ est conjugué par rapport à la conique (A); la conique (B) est donc harmoniquement circonscrite à (A). La polaire PB′ de B par rapport à (A) touche (C); de même PB; le triangle PBB′ est circonscrit à la conique (C) qui est ainsi harmoniquement inscrite à (A); donc :

Théorème IV. — *Dans un système harmonique de trois coniques, chacune d'elles est à la fois harmoniquement circonscrite et harmoniquement inscrite à chacune des deux autres.*

Le triangle PBB′ étant à la fois inscrit à (B) et circonscrit à (C), on peut encore dire que :

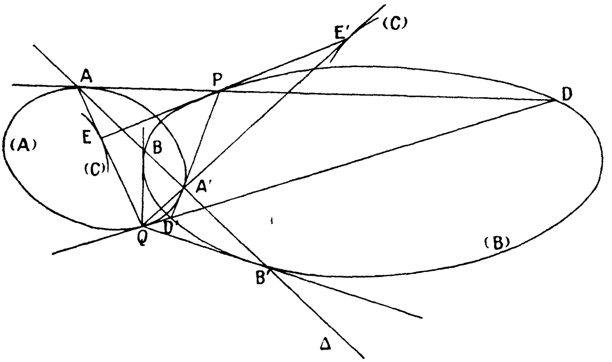
Théorème V. — *Si l'on considère deux quelconques des coniques d'un système harmonique, on peut inscrire ou circonscrire à chacune une infinité de triangles circonscrits ou inscrits à l'autre; chacun de ces triangles est conjugué par rapport à la troisième conique.*

Il faut bien observer qu'il existe une infinité de triangles tels que PBB′ inscrits à (B) et circonscrits à (C) et aussi une infinité de triangles inscrits à (C) et circonscrits à (B).

3. M et N désignant les points où les coniques (A) et (B) sont touchées par une tangente commune, la conique (C) passe en ces points; comme MN est tangente à (A), son pôle P par rapport à (C) est sur (B); il est de même sur (A), et est par suite commun à (A) et (B), de sorte que :

Théorème VI. — *Les tangentes à deux des coniques* (A) *et* (B) *d'un système harmonique, en un point* P *commun à ces coniques, les coupent* *respectivement en* N *et* M, *et sont tangentes en ces points à la troisième conique* (C); *de plus* MN *est une tangente commune aux deux premières.*

Fig. 1.



4. Transformons la figure faite plus haut de manière que B et B' deviennent les points cycliques du plan; employant de petites lettres pour la nouvelle figure, nous voyons que (A) devient une hyperbole équilatère (a), et (B) un cercle (b); le centre p de l'hyperbole est sur le cercle, le centre q du cercle est sur l'hyperbole.

La troisième conique (C) devient une parabole (c) tangente aux droites isotropes passant par p, qui est ainsi un foyer.

Nous avons vu que PBB' est conjugué par rapport à (A) et circonscrit à (C); de même QAA' est conjugué par rapport à (B) et circonscrit à (C).

QA étant tangente à (C), son pôle D par rapport à (A) est sur (B); de même le pôle D' de QA' par rapport à la même conique (A). Le triangle PDD', circonscrit à (A), inscrit à (B), est conjugué par rapport à (C).

Ainsi la tangente en Q à (A) est la polaire de P par rapport à (C); de même la tangente en P à (B) est la polaire de Q par rapport à (C).

Les points E et E′ où cette tangente à (B) coupe (C) sont sur QA et QA′.

Dans la figure transformée, la tangente dqd' en q à l'hyperbole (a) est la polaire de p par rapport à la parabole (c), c'est-à-dire la directrice de cette parabole; on voit donc que :

Théorème VII. — *Un système harmonique de trois coniques peut être transformé par projection en un système comprenant : une hyperbole équilatère (a), un cercle (b) ayant son centre q sur (a) et passant lui-même par le centre p de l'hyperbole, une parabole (c) ayant p pour foyer et la tangente en q à l'hyperbole pour directrice.*

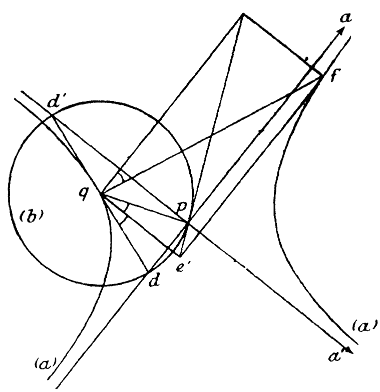
Comme il est possible de construire un tel système particulier, on obtient, par la transformation inverse, un système harmonique, dont l'existence se trouve ainsi établie.

Appliquant au système particulier les théorèmes généraux obtenus plus haut pour un système harmonique quelconque, on aurait diverses propositions relatives à l'hyperbole, au cercle et à la parabole ci-dessus, pris ensemble ou associés deux à deux.

5. On aurait pu d'abord démontrer ces théorèmes pour ce système spécial, et les étendre par projection à un système harmonique quelconque.

C'est ainsi que nous allons maintenant procéder : les tangentes issues de q à la parabole (c), bissectrices des angles $\widehat{dqp}$ et pqd' (*fig.* 2), sont parallèles aux asymptotes de (a), et ont leurs points de contact e' et e sur la perpendiculaire menée à qp au foyer de la courbe, c'est-à-dire sur la tangente en p au cercle (b) [revenant à la figure générale, nous retrouvons que la polaire de Q par rapport à (C) touche (B) en P].

Fig. 2.



Construisons le rectangle $eqe'f$; les égalités d'angles marqués sur la figure montrent que qf est normale en q à l'hyperbole, et par suite un diamètre de la parabole (c). Mais qf et le segment déterminé sur cette droite par les asymptotes de l'hyperbole ont le même milieu, de sorte que f est sur l'hyperbole.

Les droites qe, qe' et la droite à l'infini du plan forment un triangle circonscrit à (c), inscrit à (a) et conjugué par rapport à (b); les droites $e'f$, ef, qf joignant les sommets de ce triangle, points de (a), aux points où les côtés opposés touchent (c), si nous revenons à la figure primitive, nous avons ce théorème :

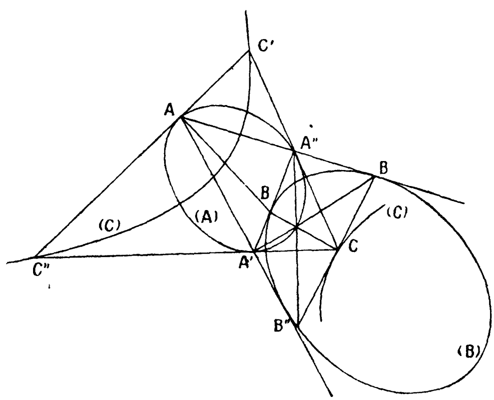
Théorème VIII. — *Un triangle étant inscrit à* (A) *et circonscrit à* (C), *les droites qui joignent ses* *sommets aux points de contact des côtés opposés concourent en un point de* (A).

Appliquant ce théorème aux couples de coniques particulières obtenues en associant de toutes les façons possibles deux des trois coniques du système (a), (b), (c), on aurait des propositions faciles à énoncer.

6. $AA'A''$ étant un triangle inscrit à (A), et circonscrit à (B) qui touche ses côtés en B, B′, B″, *les droites* AB, $A'B'$, $A''B''$ *concourent en un point de* (A).

Le triangle $BB'B''$ étant autopolaire par rapport à (A), le pôle C de la droite $A'A''$, qui passe en B, est un point de $B'B''$; comme $A'A''$ touche (B), son pôle C est sur (C); de plus $B'B''$, étant la polaire de A par rapport à (B), touche (C); cette conique est ainsi tangente en C à $B'B''$.

Fig. 3.



De même $B''B$ touche (C) au pôle C′ de $A''A$ par rapport à (A); et BB' touche (C) au pôle C″ de AA' par rapport à cette même conique (A).

Nous voyons que $BB'B''$ et $CC'C''$ sont à (B) et (C) ce que sont $AA'A''$ et $BB'B''$ à (A) et (B), de sorte que *les droites* BC, $B'C'$, $B''C''$ *concourent en un point de* (B).

De même CA, $C'A'$, $C''A''$ *concourent en un point de* (C).

On a donc ce théorème :

THÉORÈME IX. — *Trois coniques (A), (B), (C) formant un système harmonique, si* $AA'A''$ *est un triangle inscrit à (A) et dont les côtés touchent (B) en* B, B', B'', *les côtés du triangle* $BB'B''$ *touchent (C) en* C, C', C'', *et les côtés du triangle* $CC'C''$ *touchent (A) en* A, A', A''. *Les groupes de trois droites* AB, $A'B'$, $A''B''$ — BC, $B'C'$, $B''C''$ — CA, $C'A'$, $C''A''$, *concourent en trois points situés respectivement sur* (A), (B), (C).

7. Soient deux coniques (A) et (B) déterminant sur une sécante Δ deux couples de points A et A', B et B', qui forment une division harmonique, et telles que le pôle P de cette droite par rapport à (A) soit sur (B), et le pôle Q par rapport à (B) sur (A), ce qui est évidemment possible; projetant la figure de manière que B et B' deviennent les points cycliques, on obtient une hyperbole équilatère (a) et un cercle (b), le centre de chacune de ces courbes étant sur l'autre; ces coniques appartiennent donc à un système harmonique; il en est de même des coniques primitives, d'où ce théorème :

THÉORÈME X. — *Pour que deux coniques* (A) *et* (B) *fassent partie d'un système harmonique, il suffit qu'il existe une droite sur laquelle elles déterminent deux segments se divisant harmoniquement, et telle* *que son pôle par rapport à chacune des coniques soit sur l'autre.*

8. *Systèmes harmoniques particuliers.* — Outre le système hyperbole-cercle-parabole considéré plus haut, en voici d'autres :

Reprenons d'abord la figure du n° 3, et projetons-la de manière que les coniques (A) et (B) deviennent deux cercles (a) et (b), deux points communs autres que P devenant les points cycliques : le triangle pmn, transformé de PMN, est équilatéral, les deux cercles sont égaux et se coupent suivant un angle de 60° ; la troisième conique (c) du système harmonique passe aux points de contact, tels que m et n, des tangentes communes aux cercles, et touche en ces points les tangentes telles que pm et pn : c'est une hyperbole ; et comme elle est la polaire réciproque de chacun des cercles par rapport à l'autre, elle a pour foyers les centres des cercles ; cela résulte d'ailleurs de ce que chaque conique touche les tangentes menées aux autres en leurs points communs. Observons encore que l'hyperbole (c) coupe chaque cercle suivant un angle de 60°.

Le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la ligne des centres des cercles ayant même polaire par rapport aux trois coniques (a), (b), (c), on peut dire que tout point ayant même polaire par rapport à deux coniques d'un système harmonique a même polaire par rapport à la troisième ; on retrouve que les trois coniques d'un tel système ont un triangle conjugué commun.

Ainsi la hessienne de trois pareilles coniques se réduit à trois droites, les côtés du triangle conjugué commun ; la cayleyenne se réduit aux trois sommets de ce triangle. Les 18 cordes communes à ces trois coniques, prises deux à deux, passent six à six par les points constituant la cayleyenne; leurs 18 ombilics sont six à six sur les droites constituant la hessienne.

Nous avons vu que si deux coniques font partie d'un système harmonique, à chacune on peut inscrire un triangle circonscrit à l'autre.

Si deux coniques vérifient cette condition, on peut les projeter suivant deux cercles la vérifiant aussi, donc nécessairement égaux (en vertu, par exemple, de la relation d'Euler); la tangente à chacun en un de leurs points communs passe en un point où l'autre est touché par une tangente commune, et il en résulte que l'angle des cercles vaut 60°; ils font donc partie d'un système harmonique, et si l'on revient à la figure primitive on obtient la réciproque de la première partie du théorème V : *si deux coniques sont telles qu'il existe pour chacune un triangle inscrit qui est en même temps circonscrit à l'autre, les deux coniques font partie d'un système harmonique.*

9. En projetant le système particulier du n° 4 sur un plan parallèle à une asymptote de l'hyperbole équilatère (a), on obtient un système harmonique formé par une ellipse, une hyperbole d'Apollonius ayant son centre sur l'ellipse, et la parabole de Chasles correspondante.

On voit donc qu'une ellipse et une hyperbole d'Apollonius ayant son centre sur elle peuvent être transformées homographiquement en deux cercles égaux se coupant sous un angle de 60°.

10. Transformons homographiquement les coniques d'un système harmonique de manière que deux de

sommets de leur triangle conjugué commun deviennent les points cycliques, nous obtenons trois hyperboles équilatères concentriques. Mais ce système d'hyperboles peut être projeté suivant un système harmonique contenant deux cercles égaux; les deux hyperboles transformées suivant ces cercles sont alors égales, et comme elles peuvent être choisies arbitrairement, elles sont égales toutes les trois.

Dans le système du n° 8, appelons l et l' les points limites et k, k' les traces, sur la ligne des centres des deux cercles (a) et (b), des tangentes en un de leurs points communs p; un calcul simple donne

$$(kk'll') = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{2i\frac{\pi}{3}};$$

comme, pour obtenir un système d'hyperboles, on peut projeter la figure de telle sorte que l et l' deviennent les points cycliques, il résulte de la conservation du rapport anharmonique, et du théorème de Laguerre, que l'angle des cercles se conserve en projection; un calcul analogue montre que la propriété est vraie aussi pour chacun des cercles et l'hyperbole qui est la troisième conique du système harmonique, calcul d'ailleurs superflu, puisque deux quelconques des hyperboles équilatères peuvent être considérées comme correspondant aux deux cercles.

Ainsi, *ces trois hyperboles équilatères égales se coupent mutuellement suivant des angles de* 60°; on en conclut aisément que leurs axes transverses font entre eux des angles de 60°, de sorte que les trois courbes sont disposées régulièrement autour de leur centre commun.

Elles se coupent deux à deux en six points réels qui forment un hexagone régulier; le diamètre de chacun de ces points, faisant avec les axes des hyperboles auxquelles appartient ce point des angles de 30°, est égal à la distance focale des hyperboles, de sorte que le cercle qui contient ces six points passe aussi aux foyers réels des hyperboles. En vertu du principe de continuité, les six autres points communs et les six autres foyers appartiennent à un même cercle imaginaire concentrique, comme le précédent, aux hyperboles. Revenant au système harmonique général, on a ce théorème :

Théorème XI. — *Si* O *est un sommet du triangle conjugué* (T) *commun aux trois coniques d'un système harmonique, six sécantes communes à ces courbes associées deux à deux passent en* O; *les douze points communs peuvent être partagés en deux groupes de six, tels que les points de chaque groupe appartiennent à une conique passant aux deux autres sommets* I *et* J *de* (T) *et tangente en ces points à* OI *et* OJ, *et contenant aussi six des douze points de rencontre des tangentes menées de* I *et* J *aux coniques du système.*

Sans nous arrêter au théorème corrélatif, signalons encore le suivant :

Théorème XII. — *A chaque sommet* O *de* (T) *correspond une conique bitangente aux trois coniques d'un système harmonique, et tangente à* OI *et* OJ *aux autres sommets du triangle conjugué commun ; les cordes de contact de cette conique avec chacune des premières passent au point* O.

11. Reprenons, pour terminer, le système hyperbole-cercle-parabole considéré au début : nous savons que

si, l'hyperbole équilatère (a) restant fixe, le centre q du cercle (b) se déplace sur cette hyperbole, le cercle enveloppe une lemniscate de Bernoulli tangente aux asymptotes de (a) en son centre q; revenant à un systeme harmonique quelconque, nous avons ce théorème :

THÉORÈME XIII. — *Étant donnée une conique fixe* (A), *une conique* (B) *faisant partie avec elle d'un même système harmonique, et restant circonscrite à un triangle fixe conjugué à* (A), *a pour enveloppe une courbe de quatrième ordre et de sixième classe, qui admet les sommets du triangle pour points doubles à tangentes inflexionnelles, les tangentes d'inflexion étant les tangentes menées de ces sommets à la conique* (A); *la troisième conique du système harmonique enveloppe la polaire réciproque de la première enveloppe par rapport à* (A).

Par exemple, si (A) est une ellipse, et (B) une hyperbole d'Apollonius dont le centre décrit l'ellipse, cette hyperbole a pour enveloppe une courbe (β) de quatrième ordre et de sixième classe; la parabole de Charles (C), qui forme avec l'ellipse fixe et l'hyperbole variable un système harmonique, enveloppe la courbe (γ) polaire réciproque de (β) par rapport à l'ellipse.

Il est aisé de déterminer la nature de ces courbes : considérons le cercle (A′) décrit sur l'axe focal de l'ellipse comme diamètre, et qui se projette suivant l'ellipse, et dans le plan de ce cercle l'hyperbole équilatère (B′) et la parabole (C′) dont les projections sont (B) et (C); et cherchons d'abord l'enveloppe de (C′) : cette parabole a son foyer F mobile sur le cercle, et touche deux diamètres rectangulaires fixes X′OX et $Y'OY$; P et Q étant les projections de F sur ces deux tangentes, PQ est la tangente au sommet de la parabole, lequel est la projection S de F sur cette droite. Comme le segment PQ est égal au rayon du cercle, cette tangente à la parabole enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements dont les points de rebroussement sont les extrémités des diamètres appartenant aux tangentes fixes de la parabole; la parabole a la même enveloppe, qu'elle touche en son sommet S.

Soit T le point qui a pour projections, sur $X'X$ et $Y'Y$, les traces U et V sur ces axes de la tangente en F au cercle; les points P et Q ayant TU et TV pour polaires par rapport au cercle, le point T est le pôle de PQ, appartient par suite à l'hyperbole équilatère (B'). Comme PQ est la tangente à l'enveloppe de (C') au point S où la parabole touche cette enveloppe, T est le point où l'hyperbole, polaire réciproque de la parabole par rapport au cercle, touche son enveloppe, et la tangente en T est la polaire de S par rapport au cercle, elle est perpendiculaire à OS.

L'enveloppe de l'hyperbole est, comme on voit, la *kreuzcurve* dérivée du cercle et ayant ses points à l'infini sur $X'X$ et $Y'Y$; et nous avons incidemment une construction de la tangente à cette courbe.

Revenant à la figure primitive, nous obtenons pour l'enveloppe (β) de l'hyperbole d'Apollonius (B) la kreuzcurve dérivée de l'ellipse, et pour l'enveloppe (γ) de la parabole de Chasles (C) une développée d'ellipse dont les rebroussements sont les sommets de l'ellipse (A).

Remarque. — On peut observer que dans les divers systêmes harmoniques particuliers que nous avons considérés, deux quelconques des coniques se coupent en deux points réels et deux points imaginaires; il en est de même pour tout système harmonique. Le triangle conjugué commun a un seul sommet réel; et des sécantes communes, seules, sont réelles : celles qui concourent en ce sommet, trois d'entre elles joignant deux à deux les points réels communs aux coniques du système, et les trois autres joignant les points imaginaires conjugués.

On pourra lire, dans les Exercices de Géométrie de J. Kœhler (*Géométrie plane*, p. 227), un intéressant exposé analytique des principales propriétés des systèmes harmoniques, obtenues comme application des coordonnées trilinéaires.