

B. NIEWENGLOWSKI

**Démonstration de la formule de
l'accélération dans le mouvement relatif**

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 1
(1922), p. 147-150

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__147_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

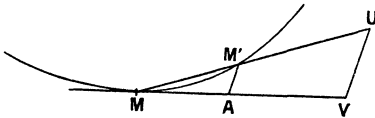
[R1 d]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE L'ACCÉLÉRATION
DANS LE MOUVEMENT RELATIF ;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

1. Soient (*fig. 1*) M et M' les positions d'un point

Fig. 1.



matériel aux époques t et $t + \Delta t$. Portons sur la tangente en M à la trajectoire de ce mobile le vecteur

$$\overline{MA} = \bar{v} \Delta t,$$

\bar{v} désignant le vecteur vitesse au temps t . On sait que le vecteur $\overline{AM'}$ est la *déviations* et que le vecteur accélération $\bar{\gamma}$, à l'époque t , vérifie l'équation

$$\bar{\gamma} = \lim \frac{2 \cdot \overline{AM'}}{\Delta t^2}.$$

Il en résulte immédiatement que, si $\overline{MV} = \bar{v}$ et $\overline{MU} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \bar{u}$, \bar{u} désignant le vecteur vitesse moyenne,

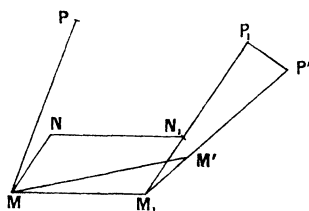
pour l'intervalle $(t, t + \Delta t)$, on a aussi

$$\bar{\gamma} = \lim_2 \frac{\overline{VU}}{\Delta t} = \lim_2 \frac{\bar{u} - \bar{v}}{\Delta t}$$

quand Δt tend vers zéro.

2. Cela étant, supposons qu'un mobile se déplace sur une courbe C (*fig. 2*), qu'il y soit au point M à

Fig. 2.



l'époque t et au point N à l'époque $t + \Delta t$; en même temps, cette courbe se déplace sans se déformer, de telle façon que le point de cette courbe qui coïncidait avec M à l'époque t occupe la position M_1 à l'époque $t + \Delta t$, la courbe C se confondant alors avec une courbe égale C' , passant par M_1 , et enfin le point N de la courbe C occupe sur C' , à l'époque $t + \Delta t$, la position du point M' . En définitive, le point M aura subi le déplacement $\overline{MM'}$. Pour obtenir ce déplacement, on peut, en premier lieu, soumettre la courbe C à la translation $\overline{MM_1}$ qui l'amène à une position C_1 ; en second lieu, faire subir à C_1 une rotation autour d'un axe passant par M_1 , qui amènera C_1 en C' . Les deux déplacements successifs feront passer N en N_1 , puis en M' .

Soit \bar{v} le vecteur *vitesse absolue* de M sur sa trajectoire MM' ; soit \bar{v}_r le vecteur *vitesse relative* de M sur

la courbe C, et enfin soit \bar{v}_e le vecteur *vitesse d'entraînement* du point de C, coïncidant successivement avec M et M₁; on sait que

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r.$$

L'égalité vectorielle

$$\overline{MM'} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M'},$$

en posant

$$\frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \bar{u}, \quad \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \bar{u}_e, \quad \frac{\overline{M_1M'}}{\Delta t} = \bar{\omega},$$

peut s'écrire

$$(1) \quad \bar{u} = \bar{u}_e + \bar{\omega}.$$

Si, en outre, on pose

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta t} = \frac{\overline{M_1N_1}}{\Delta t} = \bar{u}_r,$$

on a encore

$$(2) \quad \bar{u} = \bar{u}_e + \bar{u}_r + (\bar{\omega} - \bar{u}_r).$$

Les quantités \bar{u} , \bar{u}_e , \bar{u}_r , $\bar{\omega}$ sont des vitesses moyennes. En retranchant membre à membre les équipollences (1) et (2), on a

$$(3) \quad \bar{u} - \bar{v} = \bar{u}_e - \bar{v}_e + \bar{u}_r - \bar{v}_r + (\bar{\omega} - \bar{u}_r).$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{2}{\Delta t}$ et si l'on fait tendre Δt vers zéro, en vertu de la remarque faite au début, on obtient

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_r + 2 \lim \frac{\bar{\omega} - \bar{u}_r}{\Delta t},$$

$\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}_e$, $\bar{\gamma}_r$ désignant les vecteurs accélération absolue, accélération d'entraînement, accélération relative; il nous reste à calculer le dernier terme. Si l'on pose

$\overline{M_1 P_1} = \frac{\overline{M_1 N_1}}{\Delta t} = \overline{u_r}$, $\overline{M_1 P'} = \frac{\overline{M_1 M'}}{\Delta t} = \overline{\omega}$, on voit que

$$\frac{\overline{\omega} - \overline{u_r}}{\Delta t} = \frac{\overline{P_1 P'}}{\Delta t}.$$

Donc si $\overline{MP} = \overline{v}$, la limite de $\frac{\overline{P_1 P'}}{\Delta t}$ n'est pas autre chose que la vitesse de P autour de l'axe instantané de rotation mené par M. On sait que cette vitesse est équipollente au moment-vecteur de la rotation ω par rapport au point P, soit (ω, P) , ayant pour valeur numérique $\omega v_r \sin(\omega, v_r)$. On a, par suite,

$$\overline{\dot{\gamma}} = \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_r} + 2 \overline{\omega v_r \sin(\omega, v_r)}.$$

Le dernier terme, qui se nomme souvent γ_c pour rappeler le nom de Coriolis qui l'a calculé le premier, est un vecteur perpendiculaire au plan contenant la vitesse v_r et la rotation ω et dirigé dans le sens dans lequel l'extrémité du vecteur v_r est entraînée par la rotation instantanée.