CH. BIOCHE

# Remarques sur les jacobiens

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 1 (1922), p. 150-153

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__150_1>

[$M^2 1 e$]

# REMARQUES SUR LES JACOBIENS;

PAR M. CH. BIOCHE.

1. J'ai eu occasion de faire quelques remarques que je vais signaler parce qu'elles peuvent, je crois, suggérer quelques recherches intéressantes. On appelle *Jacobien* d'un système de quatre quadriques, le lieu des points dont les plans polaires par rapport à ces quadriques se coupent en un point. C'est, en général,

une surface du quatrième ordre. On appelle *Jacobienne* d'un système de trois quadriques le lieu des points dont les plans polaires par rapport à ces quadriques se coupent suivant une droite. C'est, en général, une courbe du sixième ordre, intersection de deux surfaces du troisième ordre qui se coupent, en outre, suivant une cubique gauche.

Les propriétés fondamentales des *Jacobiens* et des *Jacobiennes* étant données dans les ouvrages classiques de Salmon, je n'insiste pas davantage.

**2.** Lorsque, dans un système de quatre quadriques, il y a un plan double, le Jacobien se décompose en ce plan et une surface du troisième ordre, chaque point de la surface ayant son conjugué sur le plan, de sorte que l'on obtient une représentation de la surface sur le plan. J'ai étudié le cas où les trois quadriques proprement dites ont une cubique gauche commune (*Bull. Soc. math.*, t. **18**, 1899). On peut voir que si l'on a trois quadriques ayant un tétraèdre autopolaire commun la surface du troisième ordre correspondant à un plan double est la réciproque de la surface de Steiner; et la représentation sur le plan est celle que Laguerre a donnée de la surface en question (*Bull. Soc. math.*, t. **1**, 1873); les points fondamentaux étaient les traces, sur le plan, des arêtes du tétraèdre autopolaire.

Si l'une des quadriques passe par un quadrilatère gauche formé par des arêtes du tétraèdre autopolaire commun à deux autres quadriques, au plan double contenant deux des côtés de ce quadrilatère correspond une surface du troisième degré qui serait la transformée homographique d'un conoïde de Plucker.

Il doit y avoir d'autres cas analogues intéressants.

3. Si l'on considère un système de quatre quadriques passant par six points, le Jacobien est, en général, une surface du quatrième ordre ayant pour asymptotique la cubique des six points et divisant harmoniquement toutes les cordes de cette cubique. Si les six points se confondaient deux à deux, on obtiendrait la décomposition que j'ai signalée au début du paragraphe précédent.

Si les six points sont, trois par trois, sur deux droites le Jacobien n'est plus une surface, mais l'espace tout entier.

Si l'on considère trois quadriques ayant deux génératrices communes, de même système, le lieu des points pour lesquels les plans polaires se coupent suivant une droite n'est plus une courbe, mais une quadrique; si les équations des surfaces sont de la forme

$$A_i YZ + B_i ZX + C_i XT + D_i YT = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

cette quadrique a pour équation

$$\begin{vmatrix} XT & -YT & YZ & -ZX \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Si l'on considère quatre quadriques dont trois ont deux génératrices communes, d'un même système, la quatrième étant quelconque, le Jacobien se décompose en deux quadriques.

L'une d'elles ne dépend pas de la quatrième des quadriques données; c'est celle dont je viens de donner l'équation. Il est clair que les plans polaires d'un point de cette surface par rapport à trois quadriques se coupant suivant une droite, les plans polaires par rapport à ces quadriques et à une quatrième ont un point commun.

La seconde des quadriques, qui constituent le Jacobien complet, a ses points qui se correspondent deux à deux de façon que la droite qui les joint soit divisée harmoniquement par les deux génératrices communes aux trois premières quadriques. Autrement dit, cette quadrique et la quatrième des quadriques de base forment un système qui peut être transformé homographiquement en deux quadriques symétriques par rapport à une droite.

On voit qu'il y a des cas, curieux et variés, de décomposition ou de dégénérescence des Jacobiens. Il doit y en avoir encore d'autres.