NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. CASABONNE

Un théorème sur les équations algébriques entières

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 161-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__161_0>

[A3e]

UN THÉORÈME SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ENTIÈRES;

Par M. G. CASABONNE.

Une équation algébrique entière à m termes peut toujours être mise sous la forme

$$1 + x^{\alpha} + a_3 x^{\beta} + a_4 x^{\gamma} + \ldots + a_m x^{\mu} = 0, \tag{1}$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de x.

M. Landau a posé la question de savoir si, lorsque $\alpha = 1$, l'équation (1) admet toujours une racine dont le module est inférieur à un nombre fixe ne dépendant que du nombre des termes [1].

Je me propose d'établir le théorème suivant, dont la proposition de M. Landau est un cas particulier :

Toute équation algébrique entière à m termes, de la forme

$$1 + x^{\alpha} + a_3 x^{\beta} + a_4 x^{\gamma} + \ldots + a_m x^{\mu} = 0, \tag{1}$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de x, admet toujours une racine de module inférieur ou égal à 2^{m-2}.

[1] *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 198). — *Voir* aussi, pour cette question, P. Montel, *Sur un théorème d'Algèbre* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 1220).

Considérons d'abord l'équation à trois termes

$$(2)\qquad 1 + x^{\alpha} + a_3 x^{\beta} = 0.$$

L'équation

$$1 + x^{\alpha} = 0$$

admet α racines dont le module est égal à 1. Soit x' l'une d'elles. Faisons la transformation

$$x = x' + y.$$

L'équation (2) devient

$$1 + (x' + y)^{\alpha} + a_3(x' + y)^{\beta} = 0$$

ou

$$1 + x'^{\alpha} + a_3 x'^{\beta} + by + cy^2 + \ldots + a_3 y^{\beta} = 0.$$

Or, par hypothèse, on a

$$1 + x'^{\alpha} = 0,$$

donc l'équation en y se réduit à

$$a_3 x'^{\beta} + by + cy^2 + \ldots + a_3 y^{\beta} = 0.$$

Le produit des β racines de cette équation est égal à $(-1)^{\beta} x'^{\beta}$, donc l'une d'elles au moins a un module inférieur ou égal à celui de x'. Soit y' cette racine. On a, par hypothèse,

$$|y'| \leqq |x'|;$$

à cette racine y' de l'équation en y correspond, pour l'équation (2), la racine

$$x = x' + y'$$

et l'on a

$$|x| \leqq |x'| + |y'| \leqq |x'| + |x'|,$$

et, puisque $|x'| = 1$,

$$|x| \leqq 2.$$

Supposons, maintenant, la proposition démontrée pour une équation algébrique entière à $m-1$ termes et prouvons qu'elle est vraie pour une équation ayant un terme de plus.

Soient l'équation à m termes

$$(1) \qquad 1 + x^{\alpha} + a_3 x^{\beta} + \ldots + a_{m-1} x^{\lambda} + a_m x^{\mu} = 0,$$

et x' la racine de module inférieur ou égal à 2^{m-3} qu'admet, par hypothèse, l'équation à $m-1$ termes

$$(3) \qquad 1 + x^{\alpha} + a_3 x^{\beta} + \ldots + a_{m-1} x^{\lambda} = 0.$$

Posons

$$x = x' + y,$$

et remplaçons x par $x' + y$ dans l'équation (1). On a

$$1 + (x' + y)^{\alpha} + a_3 (x' + y)^{\beta} + \ldots \\ + a_{m-1} (x' + y)^{\lambda} + a_m (x' + y)^{\mu} = 0$$

ou

$$1 + x'^{\alpha} + a_3 x'^{\beta} + \ldots + a_{m-1} x'^{\lambda} \\ + a_m x'^{\mu} + by + cy^2 + \ldots + a_m y^{\mu} = 0.$$

Par hypothèse,

$$1 + x'^{\alpha} + a_3 x'^{\beta} + \ldots + a_{m-1} x'^{\lambda} = 0,$$

puisque x' est racine de l'équation (3); il reste donc

$$(4) \qquad a_m x'^{\mu} + by + cy^2 + \ldots + a_m y^{\mu} = 0.$$

Cette équation a μ racines dont le produit est égal à $(-1)^{\mu} x'^{\mu}$. Donc l'une de ces racines, au moins, a un module inférieur ou égal à celui de x'. Soit y' cette racine. On aura

$$|y'| \leqq |x'|.$$

A cette racine y' de l'équation (4) correspond, pour l'équation (1), la racine

$$x = x' + y'$$

et l'on a

$$\begin{aligned} |x| &\leqq |x'| + |y'| \\ &\leqq |x'| + |x'|, \end{aligned}$$

et, comme $|x'| \leqq 2^{m-3}$ par hypothèse,

$$|x| \leqq 2^{m-2} \quad [1].$$

Voici une conséquence de la proposition précédente :

Soit l'équation algébrique entière à m termes

$$(5) \qquad A_1 + A_2 X^\alpha + A_3 X^\beta + \ldots + A_m X^\mu = 0.$$

Ramenons-la à la forme étudiée

$$(1) \qquad 1 + x^\alpha + a_3 x^\beta + \ldots + a_m x^\mu = 0;$$

il suffit, pour cela, de diviser les deux membres par A_1, puis de poser

$$\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} X = x.$$

A toute racine x de l'équation (1) correspond, pour l'équation (5), la racine

$$X = x\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et, par suite, à la racine de module inférieur ou égal à 2^{m-2} que possède toujours l'équation (1) correspond, pour l'équation (5), une racine de module inférieur ou égal à

$$2^{m-2}\left|\frac{A_1}{A_2}\right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

---

[1] Dans le cas où $\alpha = 1$ et $m = 3$ ou 4, la proposition a déjà été établie par M. Landau (*loc. cit.*), qui trouve 2 dans le premier cas et $5\frac{2}{3}$ dans le second, comme limite supérieure du module de la racine de plus petit module.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Toute équation algébrique entière à m termes

$$A_1 + A_2 X^\alpha + A_3 X^\beta + \ldots + A_m X^\mu = 0,$$

où le premier membre est un polynome entier ordonné par rapport aux puissances croissantes de X, *admet toujours une racine de module inférieur ou égal à*

$$2^{m-2} \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^{\frac{1}{\alpha}}.$$