NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. TITS

Identités nouvelles pour le calcul des nombres de Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 191-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__191_0>

[Dbcδ]

IDENTITÉS NOUVELLES POUR LE CALCUL DES NOMBRES DE BERNOULLI [1];

PAR M. L. TITS.

L'identité fondamentale qui sert au calcul des nombres de Bernoulli est la suivante

$$f(x+B+1)-f(x+B)=f'(x),$$

dans laquelle $f(x)$ est un polynome *entier*, x peut prendre une valeur quelconque, zéro par exemple, et les exposants de B doivent, *tous calculs faits*, être remplacés par des indices.

Si $f(x)=x^p(x-1)^q$, on obtient la formule de Stern

$$(B+1)^p B^q - B^p(B-1)^q = 0,$$

---

[1] On a l'habitude, en France, de considérer les nombres de Bernoulli comme les coefficients successifs du développement de $\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$, par la formule

$$\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}=1-B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}-\ldots.$$

D'autres auteurs écrivent au contraire

$$\frac{x}{e^x-1}=1+\sum_1^\infty B_n\frac{x^n}{n!},$$

et, par suite,

$$\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}=1-B_2\frac{x^2}{2!}+B_4\frac{x^4}{4!}-\ldots.$$

C'est la notation employée dans cet article, et le lecteur est prié de ne pas l'oublier.

qui était jusqu'ici la plus avantageuse pour le calcul des nombres B.

Nous allons la transformer, et en déduire d'autres qui permettent d'abréger notablement les calculs.

Posons $p = q + 1$. L'identité précédente devient

$$(1)\qquad (B+1)^{q+1}B^q - B^{q+1}(B-1)^q = 0.$$

Puisque, pour $k > 0$, on a $B_{2k+1} = 0$, la relation (1) peut être remplacée par celle-ci

$$(2)\qquad (B+1)^{q+1}B^q + B^{q+1}(B+1)^q = 0,$$

ou

$$(2')\qquad B^q(B+1)^q(2B+1) = 0,$$

car, seuls, les coefficients des B_{2k+1} y sont altérés.

Remplaçons q par $q-1$ dans (2') et retranchons la nouvelle relation multipliée par 2 de la précédente; il vient

$$(3)\qquad B^{q-1}(B+1)^{q-1}(2B+1)(B+2)(B-1) = 0 \quad (^1).$$

Désignons le premier membre par F(B); on voit aisément que

$$F(B) = -B^{2q+1}F\left(\frac{1}{B}\right),$$

ce qui prouve que dans cette relation développée et ordonnée suivant les indices croissants, les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires. C'est là un premier avantage sur la formule de Stern, car le nombre des coefficients à calculer est réduit de moitié. Même, lorsque q est pair, les termes équidistants des extrêmes

---

(1) Il est important de remarquer qu'il faut, dans ces identités symboliques, effectuer *tous* les produits avant de remplacer les exposants par des indices. Pour qu'un produit symbolique soit nul, il ne faut pas qu'un de ses facteurs le soit.

ont des indices de même parité, et le terme du milieu est nul, de sorte que le nombre des coefficients utiles est réduit au quart, puisque les coefficients des B_{2k+1} ne doivent pas figurer dans les formules, sauf pour B_1.

Le développement de la relation (3) n'est pas très utile. En effet, si l'on examine attentivement la genèse de cette relation, on observe que les coefficients qui y figurent sont de la forme

$$(C_{q+1}^i + C_q^i) - 2(C_q^{i-2} + C_{q-1}^{i-2}),$$

et que, par suite, ils peuvent se calculer *par un triangle analogue à celui de Pascal.* Nous écrirons ci-dessous les premières lignes de ce triangle, en marquant en caractères plus gros les coefficients utiles.

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{array}{rrrrrrr}
\mathbf{2} & \mathbf{3} & -3 & & & & \\
\mathbf{2} & \mathbf{5} & 0 & -5 & & & \\
2 & 7 & 5 & -5 & & & \\
2 & \mathbf{9} & 12 & \mathbf{0} & & & \\
2 & 11 & 21 & 12 & -12 & & \\
2 & \mathbf{13} & 32 & \mathbf{33} & 0 & & \\
2 & 15 & 45 & 65 & 33 & -33 & \\
2 & \mathbf{17} & 60 & \mathbf{110} & 98 & \mathbf{0} & \\
2 & 19 & 77 & 170 & 208 & 98 & -98 \\
2 & \mathbf{21} & 96 & \mathbf{247} & 378 & \mathbf{306} & 0
\end{array}\right.$$

Pour la raison indiquée plus haut, la relation (3) n'est réellement intéressante que si q est pair. C'est pourquoi nous ne porterons notre attention que sur les rangées paires du Tableau. Elles fournissent les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&3(B_2 - B_1) = 2,\\
&5(B_4 - B_2) = 2B_1 = -1,\\
&9(B_8 - B_4) = 0,\\
&13(B_{12} - B_6) + 33(B_{10} - B_8) = 0,\\
&17(B_{16} - B_8) + 110(B_{14} - B_{10}) = 0,\\
&21(B_{20} - B_{10}) + 247(B_{18} - B_{12}) + 306(B_{16} - B_{14}) = 0.
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir une identité qui offre les mêmes avantages pour les valeurs impaires de q, nous partons de l'identité de Stern

$$(B+1)^{q+3}B^q-(B-1)^qB^{q+3}=0.$$

Par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, nous en déduisons successivement

$$(B+1)^{q+3}B^q+(B+1)^qB^{q+3}=0$$

ou

$$B^q(B+1)^q(B^2+B+1)(2B+1)=0; \tag{5}$$

puis, en remplaçant q par $q-1$ et en retranchant deux fois cette nouvelle égalité,

$$B^{q-1}(B+1)^{q-1}(B+2)(2B+1)(B^3-1)=0. \tag{6}$$

Cette formule présente la même symétrie que la relation (3), et ses coefficients, dont l'expression générale est la suivante

$$(C_{q+3}^i+C_q^i)-2(C_{q+2}^{i-2}+C_{q-1}^{i-2}),$$

se calculent aisément par un triangle arithmétique, dont voici les premières rangées :

(II)

2	5	2	−2			
2	7	7	0			
2	9	14	7	−7		
2	11	23	21	0		
2	13	34	44	21	−21	
2	15	47	78	65	0	
2	17	62	125	143	65	−65
2	19	79	187	268	208	0

On a ainsi

$$
\begin{aligned}
&7(B_6 - B_2) = -1,\\
&11(B_{10} - B_4) + 21(B_8 - B_6) = 0,\\
&15(B_{14} - B_6) + 78(B_{12} - B_8) = 0,\\
&19(B_{18} - B_8) + 187(B_{16} - B_{10}) + 208(B_{14} - B_{12}) = 0.
\end{aligned}
$$

Observons encore cette particularité, que si l'on retranche une ligne du triangle (I) de celle qui a même rang dans le triangle (II), on obtient la ligne suivante de (I). La soustraction des identités (3) et (6) en fournit immédiatement la raison.

Clausen et Staudt ont énoncé, concernant les nombres de Bernoulli, le beau théorème suivant : Si l'on désigne par A_q un nombre entier, et par $2, b, c, \ldots, l$ tous les nombres premiers qui surpassent de 1 les diviseurs de q, on a

$$B_q = A_q - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \ldots - \frac{1}{l}.$$

Si nous remplaçons dans les égalités trouvées plus haut les nombres B en fonction des nombres A, nous trouvons des égalités qui ne diffèrent des précédentes que par le terme indépendant, et qui sont extrêmement avantageuses pour le calcul des nombres A, parce que ceux-ci sont entiers. Il est inutile d'écrire les premières, car on sait que

$$A_0 = A_2 = A_4 = \ldots = A_{12} = 1; \qquad A_{2q+1} = 0.$$

Voici les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&15(A_{14} - A_6) = 15;\\
&17(A_{16} - A_8) + 110(A_{14} - A_{10}) = -9;\\
&19(A_{18} - A_8) + 187(A_{16} - A_{10}) + 208(A_{14} - A_{12}) = -56.
\end{aligned}
$$

La détermination des termes indépendants n'est guère laborieuse, et l'on y rencontre cette vérification que le résultat doit être toujours un nombre entier.