Nouvelles annales de mathématiques

E. Vessiot

# Sur l'étude algébrique des problèmes de division des arcs

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 1 (1922), p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__1_0>

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.


[K[1]20c]

## SUR L'ÉTUDE ALGÉBRIQUE DES PROBLÈMES DE DIVISION DES ARCS;


PAR M. E. VESSIOT.


1. Il existe une démonstration classique pour prouver la réalité des racines de l'équation algébrique qui donne $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{n} = t$ en fonction de $\operatorname{tang}\alpha = k$. On peut lui donner la forme suivante :

L'équation en question résulte de l'identité

$$\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n}{\left(\cos\frac{\alpha}{n} - i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha},$$

et s'écrit, par suite,

$$\left(\frac{1+it}{1-it}\right)^n = \frac{1+ik}{1-ik}.$$

Le nombre $k$ étant réel, le module du second membre est égal à 1. Il en est de même de ses racines $n^{\text{ièmes}}$. Donc toute solution de l'équation se présente sous la forme

$$\frac{1 + it}{1 - it} = c,$$

où $c$ est une quantité complexe de module égal à 1.

On tire de là

$$t = i\,\frac{c - 1}{c + 1} = -\,i\,\frac{\frac{1}{c} - 1}{\frac{1}{c} + 1}.$$

Or, $c$ ayant pour module 1, $\frac{1}{c}$ est la quantité complexe conjuguée de $c$. La formule précédente montre donc que la quantité complexe $t$ est égale à sa conjuguée, c'est-à-dire qu'elle est reelle. C. Q. F. D.

2. Le mode de démonstration précédent, sous la forme que nous venons de lui donner, s'étend bien facilement aux systèmes qui donnent les valeurs de $\cos\frac{\alpha}{n} = x$, $\sin\frac{\alpha}{n} = y$, quand on se donne, soit $\cos\alpha = a$, soit $\sin\alpha = b$.

Ces systèmes, qui proviennent des identités

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} + i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n} - i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

sont, respectivement,

$$\text{(I)} \qquad (x + iy)^n + (x - iy)^n = 2a, \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{(II)} \qquad (x + iy)^n - (x - iy)^n = 2ib, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Si l'on introduit l'inconnue auxiliaire $x + iy = z$, en tenant compte de

$$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy),$$

ils deviennent

$$(\mathrm{I}') \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2a, \qquad x + iy = z, \qquad x - iy = \frac{1}{z},$$

$$(\mathrm{II}') \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2ib, \qquad x + iy = z, \qquad x - iy = \frac{1}{z};$$

et les équations résolvantes en $z$ des deux systèmes,

$$(1) \qquad (z^n)^2 - 2a(z^n) + 1 = 0,$$

$$(2) \qquad (z^n)^2 - 2ib(z^n) - 1 = 0,$$

donnent, respectivement,

$$(1') \qquad z^n = a \pm i\sqrt{1 - a^2},$$

$$(2') \qquad z^n = ib \pm \sqrt{1 - b^2}.$$

Comme, par hypothèse, $a$ et $b$ sont réels et de modules au plus égaux à 1, les seconds membres de ces dernières équations sont des quantités complexes de modules égaux à 1. Il en est donc de même de leurs racines $n^{\text{ièmes}}$; c'est-à-dire que les valeurs de l'inconnue auxiliaire $z$ ont l'unité pour module.

Toute solution de l'un ou l'autre des systèmes considérés est donc de la forme

$$z = c, \qquad x + iy = z, \qquad x - iy = \frac{1}{z},$$

où $c$ est une quantité complexe de module égal à 1.

On en tire

$$(3) \qquad x = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right), \qquad y = \frac{1}{2i}\left(c - \frac{1}{c}\right).$$

Or $c$ étant de module 1, $\frac{1}{c}$ est la quantité complexe conjuguée, et ces valeurs (3) sont réelles. On conclut, de plus, des formules (3)

$$|x| \leqq \frac{1}{2}\left\{|c| + \left|\frac{1}{c}\right|\right\} = 1, \qquad |y| \leqq \frac{1}{2}\left\{|c| + \left|\frac{1}{c}\right|\right\} = 1,$$

puisque

$$|c| = \left|\frac{1}{c}\right| = 1.$$

Les systèmes considérés ne peuvent donc avoir que des solutions réelles, formées de nombres appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$. C. Q. F. D.

3. On voit, de plus, que la solution de chacun des trois problèmes considérés dépend, en définitive, de l'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ d'une quantité complexe de module égal à 1; ce qui est bien naturel, en raison des rapports étroits de ces problèmes avec la résolution des équations binomes de degré $n$.

Dans les deux derniers cas, la décomposition du problème qui résulte de la résolution préliminaire des équations du second degré, à coefficients réels, (1) et (2), correspond à celle qu'on effectue dans l'étude géométrique de ces problèmes, qui est classique. Il serait facile de déduire de ces équations (1) et (2) les conclusions que fournit cette étude géométrique au point de vue du nombre des solutions de chacun des deux problèmes.