NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. THÉBAULT

Sur un théorème classique de Dandelin

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 200-205

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__200_1>

[L¹1e]

SUR UN THÉORÈME CLASSIQUE DE DANDELIN;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

La figure relative au théorème de Dandelin sur les sections planes du cône de révolution, que contiennent tous les Traités de Géométrie, nous semble particulièrement suggestive. La méthode employée par Hermary pour déterminer les contacts des sphères tangentes aux quatre plans des faces d'un tétraèdre ([1]), appliquée à cette figure, nous a conduit aux résultats suivants dont certains sont peut-être inédits.

1. Considérons un cône de révolution de sommet D coupé par un plan (P) qui, pour fixer les idées, rencontre toutes les génératrices. La section obtenue est une conique (Γ), (ellipse ou hyperbole), dont les sommets S, S′ sont situés sur deux génératrices contenues dans un plan avec l'axe du cône et la perpendiculaire DH au plan (P). Les foyers F, F′ de cette

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1879, p. 138. Cette méthode nous a conduit déjà à de curieux résultats qui complètent ou généralisent ceux de nos devanciers MM. Neuberg, Kœnigs (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, p. 233-241; 1922, p. 128-134; *Mathesis*, 1922, p. 16-18).

conique sont les contacts, sur le plan (P), de deux sphères de centres I, I_d inscrites au cône. De plus, $SS' = TT'$, T, T' étant les contacts d'une génératrice avec les sphères I, I_d. Enfin les plans (Π), (Π_d), déterminés par les cercles de contact du cône D avec les sphères I, I_d, rencontrent le plan (P) suivant deux droites Δ, Δ', directrices de la conique (Γ).

Ces résultats sont classiques. Si d, r, r_d désignent la distance II_d et les rayons des sphères, on a

$$\overline{SS'}^2 = \overline{TT'}^2 = d^2 - (r_d - r)^2,$$

et

$$\overline{FF'}^2 = d^2 - (r_d + r)^2.$$

Le petit axe BB' de l'ellipse, ou l'axe non transverse de l'hyperbole, est donc tel que

$$\overline{BB'}^2 = \overline{SS'}^2 - \overline{FF'}^2 = 4rr_d \quad (1)\text{[1]}.$$

2. Soit une génératrice quelconque DM du cône limitée à la conique (Γ) en M, qui touche en T, T' les sphères I, I_d. Le plan (p), tangent au cône suivant DM, a pour trace sur le plan (P) une tangente t à (Γ) en M.

Une sphère étant inscrite dans un dièdre, si l'on ferme le dièdre dans le sens convenable, de manière à *écraser* la sphère, les points de contact de la sphère avec les faces du dièdre viennent en coïncidence. En rabattant le plan (p) autour de t, sur le plan (P), de manière à *écraser* la sphère I, la génératrice DTM tourne autour de M et le contact T de DM avec la sphère vient coïncider avec le foyer F. Cette génératrice prend donc une position

$$D_1MF \qquad \text{et} \qquad D_1F = DT = \text{const.},$$

[1] Cette relation a été obtenue autrement par M. J. Neuberg (*Mémoire sur le tétraèdre*, p. 23).

lorsque M varie sur la conique (Γ). Le rabattement D_1 de D décrit par suite une circonférence fixe (Σ), de centre F, de rayon DT.

Pareillement, si l'on rabat le plan (p) autour de t, sur le plan (P) de façon à *écraser* la sphère I_d, on obtient une circonférence (Σ'), de centre F', de rayon DT', lieu du rabattement D_2 de D sur le plan (P).

Remarques. — Lorsque le point M varie sur la conique (Γ), *la somme ou la différence des rayons des circonférences* (Σ), (Σ') *est égale à*

$$DT' \pm DT = TT' = SS',$$

suivant que (Γ) *est une hyperbole ou une ellipse.*

Si (Γ) est une parabole, (Σ') dégénère en une droite à l'infini perpendiculaire à l'axe de la courbe; (Σ) a pour centre le foyer de cette parabole.

Dans les rabattements du sommet D, l'angle (DM, t) se rabat en vraie grandeur suivant deux angles égaux

$$(t, MF) = (t, MF') = (t, DM).$$

Ainsi apparaît cette propriété fondamentale des coniques :

La tangente en un point quelconque bissecte l'angle des rayons vecteurs en ce point.

Enfin si δ désigne le pied de la perpendiculaire $D\delta$ sur t, $D\delta = \delta D_1 = \delta D_2$. Le triangle D_1DD_2 est rectangle en D; H est un point de SS', et

$$\overline{HD_1}.\overline{HD_2} = \overline{DH}^2 = \text{const.},$$

lorsque M décrit (Γ). Les deux circonférences (Σ), (Σ')

se correspondent dans une inversion de centre H et de module $\overline{DH}^2$ ([1]).

Les propriétés précédentes s'appliquent à un tétraèdre ABCD. Les angles trièdres de ce solide sont en effet circonscrits chacun à un cône de même sommet que ces angles, lequel est coupé par la face opposée suivant une conique (Γ). On retrouve ainsi cette propriété due à Hermary et à M. Neuberg :

Si l'on rabat en D_1, D_2, D_3 *et* D'_1, D'_2, D'_3 *le sommet* D *d'un tétraèdre* ABCD *autour des arêtes* BC, CA, AB *sur le plan* (P) *de la face* ABC, *de façon à écraser les sphères inscrite* I *et exinscrite* I_d, *les centres des cercles* $D_1 D_2 D_3$, $D'_1 D'_2 D'_3$ *coïncident avec les foyers* F, F′ *de* (Γ), *c'est-à-dire avec les contacts des sphères* I, I_d *sur le plan* (P).

3. La conique (Γ) étant donnée, il existe une infinité de cônes de révolution qui contiennent cette conique. Le lieu du sommet D de ces cônes est une *focale* (Γ') de (Γ). Si r, r_d désignent encore les rayons des sphères I, I_d inscrites au cône variable D qui touchent le plan (P) de (Γ), le produit rr_d reste constant et égal au carré de la moitié du petit axe BB′ de (Γ), d'après la relation (1).

Cette remarque suffit à déterminer l'enveloppe de l'axe DII_d du cône variable [enveloppe qui n'est autre que (Γ')], et à montrer que la sphère de diamètre II_d passe en S, S′, sommets de (Γ). On en conclut aussi que les projections orthogonales de S, S′ sur II_d décrivent une circonférence concentrique à (Γ).

A chaque position du cône D correspondent deux

([1]) Nous avons déjà signalé cette inversion, ainsi que M. Neuberg. Le module donné ici est peut-être nouveau.

circonférences (Σ), (Σ'), de centres fixes F, F', dont la somme ou la différence des rayons reste constante et égale au grand axe SS' de (Γ).

Lorsque D est en F, (Σ) se réduit à son centre F, (Σ') a pour rayon SS' et se confond avec le *cercle directeur* de centre F'. Si D est en F', (Σ) est l'autre cercle directeur. (Σ), (Σ') *sont alors les cercles directeurs de la conique* (Γ) *avec leur propriété fondamentale d'être les lieux géométriques des symétriques des foyers* F, F' *par rapport à une tangente variable.*

Ces cercles (Σ), (Σ') sont peut-être nouveaux; ils constituent en tout cas une extension de la notion de *cercles directeurs* des coniques.

4. Pour terminer cette Note, voici une démonstration très simple, de théorèmes sur le tétraèdre, qui apparaît nettement sur la figure relative au théorème de Dandelin. Désignons par I, I_a, I_b, I_c, I_d, I_1, I_2, I_3 les centres des sphères inscrite, exinscrites dans les trièdres tronqués et des combles d'un tétraèdre ABCD. En joignant deux par deux ces huit centres on détermine 28 droites.

Soient ω le milieu du segment II_d par exemple et α, β, γ, δ les projections orthogonales de ce point sur les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre. δ coïncide avec le centre de la conique (Γ), section plane du cône D inscrit au trièdre de même sommet, par le plan de la face ABC. α, β, γ, qui appartiennent aux génératrices de contact du cône D avec les plans des faces du trièdre de sommet D, sont situés dans un plan équidistant des plans (Π), (Π_d) déterminés par les contacts des sphères I, I_d sur le cône. Or, (Π), (Π_d) rencontrent le plan ABC suivant les directrices de la conique (Γ), droites également distantes de δ. Le plan $\alpha\beta\gamma$ contient donc aussi le point δ. De plus, ce plan $\alpha\beta\gamma\delta$, parallèle aux plans (Π), (Π_d), est perpendiculaire à la droite $D\Pi_d$. D'où ces théorèmes obtenus par le calcul ou moins directement par leurs auteurs :

Les points milieux des 28 *droites qui joignent deux par deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque sont sur une même surface du troisième ordre qui contient les arêtes du tétraèdre* (BELTRAMI, *N. A.*, 1863, p. 336).

Les pieds des perpendiculaires abaissées de l'un de ces points milieux sur les plans des faces du tétraèdre sont dans un même plan (SARTIAUX, *N. A.*, 1867, p. 367).

Les plans qui contiennent les projections du milieu de la droite de deux centres est d'ailleurs perpendiculaire à cette droite (FONTENÉ, *N. A.*, 1909, p. 57).