

R. THIRY

**Étude d'un problème particulier où  
intervient le frottement de glissement**

*Nouvelles annales de mathématiques 5<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1922), p. 208-216

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1922\\_5\\_1\\_\\_208\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__208_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**ÉTUDE D'UN PROBLÈME PARTICULIER  
OU INTERVIENT LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT;**

PAR M. R. THIRY

(Strasbourg).

---

1. C'est un fait bien connu que les lois ordinaires du frottement sont insuffisantes pour expliquer les phénomènes naturels et qu'on est exposé, en les appliquant aux équations générales de la mécanique, à des impossibilités ou à des indéterminations (1).

Le présent article ne prétend donc pas signaler quelque chose de nouveau, mais simplement reprendre ces faits déjà connus sur un exemple dont le développement analytique peut présenter quelque intérêt.

2. Le problème que nous considérons est le suivant :

*Un corps solide pesant est en contact par deux de ses points A et B avec deux droites fixes Ox et Oy (Oy vertical et dirigé vers le haut, Ox horizontal), le long desquelles les points peuvent glisser avec*

---

(1) Voir pour les références, APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 123.

*frottement. Le coefficient de frottement  $f$  est le même pour les deux droites et a une valeur inférieure à l'unité. Les données du problème sont symétriques par rapport au plan  $xOy$  et les liaisons sont bilatérales. Le solide est lâché sans vitesse initiale en une position telle que A et B soient sur les parties positives des axes. Nous nous proposons d'étudier s'il y a équilibre ou mouvement.*

Pour traiter ce problème, deux méthodes se présentent à nous; nous pouvons chercher les conditions pour qu'il y ait équilibre, ou celles pour qu'il y ait mouvement. Dans un grand nombre de cas simples, ces deux études se complètent, les inégalités trouvées s'excluent mutuellement et l'on arrive ainsi à une solution satisfaisante du problème.

Or, précisément ici il n'en est pas ainsi.

3. Étudions tout d'abord les *conditions pour qu'il y ait équilibre*. C'est là un problème très simple dont la solution est tout à fait classique <sup>(1)</sup>. Nous supposons (pour avoir un cas précis de figure, mais cette restriction n'a rien d'essentiel) que l'angle aigu de la droite AB dans sa position initiale avec la verticale est compris entre l'angle de frottement  $\varphi$  et son complément  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ . Nous considérerons alors les droites issues de A et de B faisant respectivement avec les normales à  $Ox$  et à  $Oy$  en ces points des angles égaux à  $\pm \varphi$ . Ces quatre droites formeront un quadrilatère. S'il y a équilibre, les réactions de  $Ox$  et de  $Oy$  se coupent à l'intérieur du quadrilatère et la verticale du point G, centre de gravité du corps, doit passer par leur point

---

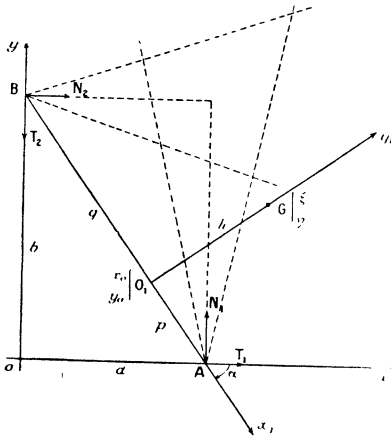
(1) Voir également le Traité de M. Appell, t. I, p. 305.

de rencontre. Inversement, si la verticale de G traverse le quadrilatère, on peut transporter le poids le long de sa propre direction en un point D intérieur au quadrilatère et le décomposer en deux forces suivant DA et DB, forces qui seront détruites par les réactions de  $O_x$  et de  $O_y$ .

Il semble donc assuré que la condition nécessaire et suffisante d'équilibre est que la verticale de G traverse le quadrilatère en question.

4. Cherchons au contraire les *conditions pour qu'il y ait mouvement*. Pour cela nous attacherons au corps solide deux axes de coordonnées  $O_1x_1$  et  $O_1y_1$ ,

Fig. 1.



l'axe  $O_1x_1$  coïncidant en position et en direction avec BA, le centre de gravité G se trouvant sur  $O_1y_1$ . (fig. 1) (1).

(1) De telle sorte que l'angle  $x_1O_1y_1$  ait même sens que l'angle  $xOy$ .

Nous poserons

$$\overline{O_1A} = p, \quad \overline{O_1B} = q$$

(ce qui entraîne  $p > q$  et  $\overline{BA} = l = p - q$ )

$$\overline{O_1G} = h, \quad \widehat{Ox, O_1x_1} = \alpha \quad \left( \text{ici } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \right).$$

Soient de plus  $x_0$  et  $y_0$  les coordonnées du point  $O_1$  et  $\xi$  et  $\eta$  celles de  $G$  par rapport au premier système d'axes.

Les formules de transformation de coordonnées s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 + x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = y_0 + x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Les conditions géométriques exprimant que  $A$  et  $B$  sont sur  $Ox$  et  $Oy$  se traduisent par les équations

$$\begin{aligned} 0 &= y_0 + p \sin \alpha, \\ 0 &= x_0 + q \cos \alpha, \end{aligned}$$

et les formules (1) peuvent s'écrire

$$(2) \quad \begin{cases} x = (x_1 - q) \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = (x_1 - p) \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

En particulier, on aura

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = -q \cos \alpha - h \sin \alpha, \\ \eta = -p \sin \alpha + h \cos \alpha. \end{cases}$$

On en déduira pour la vitesse et l'accélération de  $G$

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = [q \sin \alpha - h \cos \alpha] \frac{d\alpha}{dt}, \\ \frac{d\eta}{dt} = [-p \cos \alpha - h \sin \alpha] \frac{d\alpha}{dt}, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = [q \sin \alpha - h \cos \alpha] \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \xi \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = [-p \cos \alpha - h \sin \alpha] \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \eta \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2. \end{cases}$$

Si nous appelons  $T_1, N_1, N_2, T_2$  les projections sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  des réactions en A et B (*fig. 1*), le théorème du mouvement du centre de gravité, celui des moments des quantités de mouvement autour du centre de gravité, joints aux lois du frottement donneront les équations

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} m[-l \sin \alpha - \eta] \alpha'' - m\xi \alpha'^2 = T_1 + N_2, \\ m[-l \cos \alpha + \xi] \alpha'' - m\eta \alpha'^2 = N_1 + T_2 - mg, \\ mk^2 \alpha'' = (l \cos \alpha - \xi) N_1 + \eta T_1 - \xi T_2 + (l \sin \alpha + \eta) N_2, \\ T_1 = \varepsilon_1 f N_1, \\ T_2 = \varepsilon_2 f N_2, \end{array} \right.$$

formules dans lesquelles  $k$  désigne le rayon de giration du corps autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure mené par le centre de gravité et  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  des quantités égales à  $\pm 1$ .

Si nous éliminons entre ces équations  $T_1, N_1, T_2, N_2$ , nous aurions une équation différentielle fournissant  $\alpha$  en fonction de  $t$ ; on sait, d'après les théorèmes d'existence, qu'une telle équation admet une solution bien déterminée si l'on se donne à l'avance les valeurs initiales de  $\alpha$  et de  $\alpha'$ . Dans le cas qui nous occupe, la valeur initiale de  $\alpha'$  est nulle puisqu'on part du repos.

Mais la solution ainsi fournie par les équations (6) ne sera acceptable au point de vue mécanique que si les composantes tangentielles des réactions qu'elles permettent de calculer après coup sont dirigées en sens contraire des vitesses des points A et B. Or le sens de ces vitesses au départ dépend évidemment du signe de  $\alpha''$  (puisque ici  $\alpha'$  est nul) et l'on voit immédiatement que ces conditions de validité mécanique s'expriment par les deux inégalités

$$(7) \quad \alpha'' T_1 < 0, \quad \alpha'' T_2 > 0.$$

En appelant  $a$  et  $b$  les longueurs OA et OB, respec-

tivement égales à  $l \cos \alpha$  et  $-l \sin \alpha$ , on aura les équations, valables à l'instant initial,

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} -m\alpha''(\eta - b) = T_1 + N_2, \\ +m\alpha''(\xi - a) = N_1 + T_2 - mg, \\ mk^2\alpha'' = -(\xi - a)N_1 + \eta T_1 - \xi T_2 + (\eta - b)N_2 \quad (1), \\ T_1 = \varepsilon_1 f N_1, \\ T_2 = \varepsilon_2 f N_2, \end{array} \right.$$

et si l'on peut déterminer  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  de façon que ces équations entraînent les inégalités (7), on sera assuré que, tout au moins pendant le début du mouvement, la solution correspondante tirée des équations différentielles (6) sera acceptable au point de vue mécanique.

Un calcul facile permet de résoudre le système (8), je pense qu'il est inutile d'en transcrire les détails; on trouve tous calculs faits

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -g \frac{\Delta}{k^2 + \Sigma}, \\ N_1 &= \frac{mg}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2} \frac{H}{k^2 + \Sigma}, \\ N_2 &= \frac{mg}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2} \frac{K}{k^2 + \Sigma}, \\ T_1 &= \varepsilon_1 f N_1, \\ T_2 &= \varepsilon_2 f N_2, \end{aligned}$$

en posant pour abrégier

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2)\Sigma &= [\xi - a - \varepsilon_1 f \eta][\xi - a - \varepsilon_2 f(\eta - b)] \\ &\quad + [-\varepsilon_2 f \xi + \eta - b][\varepsilon_1 f(\xi - a) + \eta - b], \\ (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2)\Delta &= (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 f^2)\xi - \varepsilon_1 f b - a, \\ H &= k^2 - (\eta - b)(\varepsilon_2 f \xi - \eta + b), \\ K &= -\varepsilon_1 f k^2 + (\eta - b)(\xi - a - \varepsilon_1 f \eta). \end{aligned}$$

---

(1) On pourrait mettre dans ces équations des indices zéro pour préciser qu'il s'agit des valeurs initiales de  $\alpha$ ,  $\alpha''$ ,  $T_1$ ,  $N_1$ ,  $T_2$ ,  $N_2$ ; mais comme il ne sera plus question par la suite que de ces valeurs initiales, on peut supprimer les indices sans crainte de confusion.

Avec ces notations, les inégalités (7), débarrassées des facteurs positifs, prennent la forme

$$- \varepsilon_1 \cdot \Delta \cdot H < 0,$$

$$- \varepsilon_2 \cdot \Delta \cdot K > 0.$$

On voit donc que la validité des solutions dépend, en même temps que du choix des  $\varepsilon$ , de la position du point G par rapport à la droite  $\Delta = 0$  et aux hyperboles  $H = 0$  et  $K = 0$ . Il n'y a donc qu'à étudier le régionnement correspondant aux différents cas possibles.

On obtient, suivant les signes de  $\varepsilon_1$  et de  $\varepsilon_2$ ; quatre droites  $\Delta$  qui sont, comme on le vérifie facilement, les quatre verticales issues des sommets du quadrilatère rencontré au paragraphe 3. On obtient aussi quatre hyperboles ayant une asymptote commune  $\eta = b$  et pour seconde asymptote respectivement les côtés du quadrilatère en question.

Les deux hyperboles H et K relatives à des valeurs données de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  se coupent sur la droite  $\Delta$  correspondante et le cercle  $k^2 + \Sigma = 0$  passe également par ces deux points. Les points d'intersection de ces deux hyperboles ne sont pas nécessairement réels, mais ils le sont certainement, pour toutes les combinaisons de signe des  $\varepsilon$  si le rayon de giration  $k$  est assez petit.

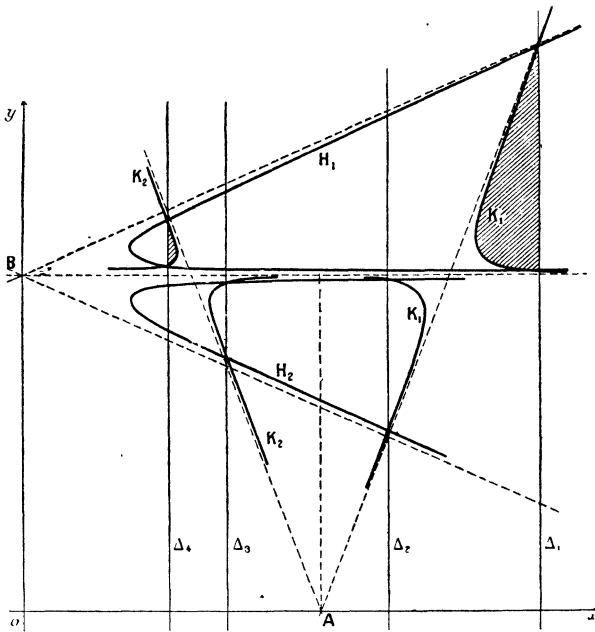
En se plaçant dans ce cas et en se bornant à ce qui se passe à droite de l'axe  $Oy$ , on a la disposition indiquée dans la figure 2. Je note dans le tableau ci-dessous la correspondance des signes des  $\varepsilon$  avec les diverses courbes tracées.

	$\varepsilon_1$ .	$\varepsilon_2$ .			
I.....	+	+	$\Delta_1$	$H_1$	$K_1$
II.....	+	-	$\Delta_2$	$H_2$	$K_1$
III.....	-	-	$\Delta_3$	$H_2$	$K_2$
IV.....	-	+	$\Delta_4$	$H_1$	$K_2$



La discussion de répartition dans chacun des quatre cas signalés dans ce tableau ne présente aucune difficulté de principe, mais comme elle est assez longue

Fig. 2.



je n'en donne pas le détail, qu'on rétablira facilement et qui met en évidence les particularités suivantes :

Si le point  $G$  se trouve en dehors des deux droites extrêmes  $\Delta_1$  et  $\Delta_4$ , le mouvement est possible et pour un seulement des quatre cas. Ceci est normalement ce que l'on devait attendre d'après les résultats du paragraphe 3.

Si le point  $G$  est entre les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_4$ , en général pas de mouvement possible, à moins qu'il ne se trouve

**dans l'une ou l'autre des régions couvertes de hachures sur la figure 2.**

Pour ces régions, deux mouvements sont possibles (les mouvements I et II pour la région de droite, III et IV pour la région de gauche).

3. En résumé, cette étude met donc en évidence des dispositions possibles du corps en question pour lesquelles trois éventualités, toutes trois également acceptables au point de vue mécanique, sont à envisager : deux mouvements différents (1) et l'état d'équilibre.

Remarquons enfin pour terminer que ces particularités se présentent même pour de faibles valeurs du coefficient de frottement sous la seule condition que le rayon de giration  $k$  soit suffisamment petit.