

## Certificats de mathématiques générales

*Nouvelles annales de mathématiques 5<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1922), p. 223-234

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1922\\_5\\_1\\_\\_223\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__223_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

## CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad (x^2 + x) \frac{dy}{dx} + y^2 + (1 - 2x)y - 2x = 0;$$

on pose  ~~$x^2 - x + z^2 - x + 2x^2 - 2x$~~

$$y \rightarrow x = \frac{1}{z}.$$

1° Former l'équation différentielle (E) à laquelle satisfait la fonction  $z$  de la variable  $x$  quand  $y$  est solution de l'équation différentielle (1).

2° Intégrer l'équation (E) et déduire de la solution générale de cette équation celle de l'équation (1).

3° Deux axes rectilignes  $Ox$ ,  $Oy$  étant tracés dans un plan, montrer que les courbes intégrales de l'équation (1) passent toutes par deux points fixes A et B, à distance finie.

II. Les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  étant rectangulaires :

1° Quelle est la courbe décrite, quand on fait varier  $t$ , par le point P de coordonnées

$$x_1 = \cos t,$$

$$y_1 = -\sin t,$$

$$z_1 = 1.$$

Que peut-on dire de la droite OP?

2° Soit (C) la courbe décrite, quand on fait varier  $t$ , par le point M de coordonnées

$$x = 1 + \frac{3}{2} \operatorname{tang}^2 t, \quad y = -\operatorname{tang}^3 t, \quad z = \frac{1}{\cos^3 t}.$$

Calculer les quantités directrices de la tangente MT à (C) au point M et vérifier que, pour toute valeur de  $t$ , MT est parallèle à OP.

3° Soit M' le point où la tangente MT perce le plan  $xOy$ . Calculer les coordonnées de M' en fonction de  $t$ . Montrer que M' décrit une parabole ( $\pi$ ) et que MM' est normale à cette parabole en M'.

4° Construire la projection (C') de la courbe (C) sur le plan  $xOy$ .

5° Des résultats établis, que peut-on conclure :

$\alpha$ . Quant à la nature de (C) ?

$\beta$ . Quant à la relation géométrique qui existe entre (C') et la parabole ( $\pi$ ) ?

Peut-on déduire de là une définition géométrique simple de la courbe (C) ?

Indications pour la solution. — I. On trouve pour  $z$  l'équation

$$(x^2 + x)z'_x = 1 + z$$

et l'on en déduit pour  $y$

$$y = \frac{x^2 + K}{x - K}.$$

II. La parabole ( $\pi$ ) a l'équation

$$y^2 = 2x.$$

La courbe (C) est une hélice tracée sur le cylindre de génératrices parallèles à  $Oz$  et de section droite la développée de la parabole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Calculer, pour  $n = -1, 0, 1, 2$ , la valeur de l'intégrale

$$\varphi(n) = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{nx^2 + 2x + 1}}.$$

2° Montrer que si  $n$  augmente indéfiniment par valeurs positives,  $\varphi(n)$  a pour limite zéro.

Quelle est la partie principale de  $\varphi(n)$  par rapport à l'infiniment petit principal  $\frac{1}{n}$  ?

Que peut-on dire de la différence entre  $\varphi(n)$  et sa partie principale ?

Indications :

$$1^\circ \quad \varphi(-1) = 0,785; \quad \varphi(0) = 0,504; \quad \varphi(1) = 0,404; \\ \varphi(2) = 0,368.$$

2° En écrivant l'intégrale sous la forme

$$\varphi(n)\sqrt{n} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{2}{nx} + \frac{1}{nx^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

et en développant au second membre, on constate que  $\varphi(n)$  a pour partie principale  $\frac{L_2}{\sqrt{n}}$  et que l'on a

$$\varphi(n) = \frac{L_2}{\sqrt{n}} - \frac{11}{16n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\theta}{n^{\frac{5}{2}}}.$$

(Caen, juin 1920.)

ÉPREUVE THEORIQUE. — Soit  $C$  la courbe d'intersection de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  représentées, avec des axes rectangulaires d'origine  $O$ , par

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

1° Nature des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

2° Construire les projections de  $C$  sur les plans  $y = 0$  et  $x = 0$ .

3° Aire de la projection sur  $x = 0$ .

4° Volume et aire des diverses faces du solide limité par  $S_1$  et  $S_2$ .

5°  $m$  désignant la projection sur  $z = 0$  d'un point  $M$  et  $\theta$  étant l'angle  $xOm$ , exprimer en fonction de  $\theta$  les coordonnées d'un point  $M$  de  $C$ .

6° On suppose que C est la trajectoire d'un point M mobile sous l'action d'une force F et que la vitesse angulaire de Om est une constante  $\omega$ . Montrer que la force F rencontre une droite fixe parallèle à Oz.

7° On suppose que le point M de masse 1, non pesant, est mobile sans frottement sur C sous l'action d'une force dirigée de M vers O et d'intensité  $k^2 \cdot OM$ . Équation différentielle du mouvement, en supposant qu'à l'instant initial le mobile soit en O et que la vitesse initiale soit  $2\lambda ak$ . Nature du mouvement suivant la valeur de  $\lambda$ .

8° On suppose, dans 7°,  $\lambda = \sqrt{2}$ . Intégrer.

9° On suppose  $\lambda = 2$ . Trouver la loi du mouvement et la force exercée par C sur le point.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y'(y^3 - 3xy^2 - x^3) + y(y^2 + xy + x^2) = 0.$$

Construire la courbe

$$x = \frac{t^2}{(t-1)^3} e^{\frac{1-4t}{t-1}}, \quad y = \frac{t^3}{(t-1)^3} e^{\frac{1-4t}{t-1}}.$$

Nombre de points où la tangente est parallèle aux axes.

Points sur les axes, et tangentes en ces points.

Étude des branches infinies.

(Lyon, juillet 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Établir la formule de Cauchy qui transforme une certaine intégrale double étendue à une aire plane en une intégrale curviligne relative au contour de cette aire.

II. Une courbe C rapportée à deux axes rectangulaires a pour équation  $y = f(x)$ . En un point quelconque M de C, on mène la normale MN et la perpendiculaire MH à Oz, N et H étant sur cet axe. On demande de trouver les équations des courbes C, pour lesquelles on a

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 + 2a \left( \frac{OH}{a} \right)^n \cdot MH,$$

a représentant une longueur donnée, n une constante.

On examinera en particulier le cas de  $n = 1$ ; on tracera sommairement celle des courbes C qui passe par le point  $M_1$  de l'axe Ox d'abscisse 1, et l'on calculera l'aire comprise entre la courbe et le segment  $OM_1$ .

III. L'axe Oz étant la verticale descendante, on réalise la parabole d'équation

$$x^2 = 2pz.$$

Un élément matériel pesant de masse  $m$  est lancé sur la courbe qu'il ne peut quitter, la vitesse de passage au sommet étant  $v_0$ .

1° Déterminer les quadratures qui permettent de calculer le mouvement de l'élément; quelle est l'allure de ce mouvement?

2° Quelle est la pression de la masse  $m$  sur la courbe?

3° Si l'élément est simplement posé sur la convexité de la courbe et est lancé à partir du sommet suivant la tangente, quelles sont les vitesses  $v_0$  acceptables pour qu'il ne quitte pas la courbe; cas particulier où  $v_0 = \sqrt{pg}$ .

4° On suppose que la courbe, au lieu d'être fixe, tourne autour de son axe avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ ; reprendre, dans ce cas, la première question, indiquer la nature de la pression de la masse sur la courbe et la marche du calcul qui donnerait cette pression.

Solution. — II. L'équation différentielle des courbes C est

$$xy' - y = \frac{x^n}{a^{n-1}};$$

lorsque  $n$  est différent de l'unité, sa solution générale est

$$y = Cx + \frac{x^n}{(n-1)a^{n-1}};$$

dans le cas où  $n = 1$ , elle est

$$y = Cx + x \log |x|.$$

La courbe particulière a pour équation

$$y = x \log |x|$$

et l'aire demandée est égale à  $-\frac{1}{4}$ .

III. — 1° L'équation de l'énergie cinétique est

$$v^2 = 2gz + v_0^2 - 2gz_0;$$

en exprimant  $v$  en fonction de  $z$ , elle donne

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2z}{p+2z}(2gz + v_0^2 - 2gz_0);$$

dans le cas du problème,  $z_0 = 0$  et le mouvement a toujours lieu dans le même sens.

En projetant les forces et l'accélération sur la normale, on obtient la réaction

$$N = \frac{mv^2}{\rho} - mg\sqrt{\frac{p}{p+2z}} = m(v_0^2 - gp)\sqrt{\frac{p}{(p+2z)^3}};$$

elle est nulle si  $v_0 = \sqrt{gp}$ , et dans ce cas la masse décrit librement la parabole comme un projectile. Si  $v_0$  est supérieur à  $\sqrt{gp}$ , la masse supposée placée sur la convexité de la courbe la quitte dès le sommet.

2° Lorsque la parabole tourne autour de son axe, l'étude du mouvement relatif conduit à l'équation

$$v^2 - v_0^2 = 2(g + \omega^2 p)(z - z_0)$$

et les circonstances du mouvement sont analogues aux précédentes. On obtient la réaction en calculant l'accélération par le théorème de Coriolis; la composante de la réaction suivant la tangente au parallèle est

$$N_1 = 2m\omega v\sqrt{\frac{p}{p+2z}}$$

et sa composante suivant la normale au méridien est, en supposant  $z_0 = 0$ ,

$$N_2 = m[v_0^2 - gp + 4\omega^2 z(p+z)]\sqrt{\frac{p}{(p+2z)^3}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la parabole d'équation

$$x^2 + 4y - 4 = 0$$

et la portion AB de cette parabole comprise dans l'angle positif des coordonnées.

Déterminer l'aire du secteur OAB, les coordonnées du centre de gravité de cette aire supposée homogène et la longueur de l'arc AB.

Calculer une valeur approchée de l'abscisse d'un point M de cet arc tel que la droite OM partage l'aire du secteur en deux parties équivalentes.

Indications : aire =  $\frac{4}{3}$ ; arc =  $\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})$ ; coordonnées du centre de gravité :  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{2}{5}$ ; abscisse du point M : 1,192.

(Nancy, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation différentielle

$$(e) \quad 4x^2y(xy' - y) + x^4 - y^4 = 0.$$

1° Y effectuer le changement de variables défini par

$$x^2 = u, \quad y^2 = v.$$

On est conduit à une nouvelle équation différentielle entre  $u$  et  $v$  que l'on intégrera.

2° En déduire que la solution générale de (e) peut s'exprimer par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = a \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = at \frac{1-t^2}{1+t^2}, \end{cases}$$

où  $a$  est une constante arbitraire. Construire l'une des courbes représentées par les équations (1). Montrer qu'elle peut être engendrée de la façon suivante : sur une droite variable issue de  $A(a, 0)$ , on porte à partir du point  $P$ , où cette droite rencontre  $Oy$ , une longueur  $PM$  ou  $PM'$  :

$$PM = PM' = PO.$$

Les points  $M$  et  $M'$  décrivent la courbe en question.

3° Déterminer le volume engendré par la surface de la boucle de la courbe en tournant autour de son axe de symétrie.

II. Un point matériel pesant M, de masse  $m$ , est suspendu à un point fixe O par un fil élastique, de masse négligeable, exerçant sur M une force attractive proportionnelle à son allongement et égale en valeur absolue à

$$m\omega^2(x - a), \quad \text{pour } x \geq a,$$

$x$  étant la longueur du fil à l'instant envisagé et  $a$  sa longueur à l'état naturel.

Déterminer le mouvement du point M sur la verticale du point O.

Examiner en particulier le cas où, après avoir tiré verticalement sur le fil de manière à lui donner une longueur  $l$ , on abandonne le système à lui-même sans vitesse initiale. Discuter en supposant l'action du fil nulle pour  $x < a$ .

Solution. — I. 1° Le changement de variables indiqué conduit à l'équation

$$4u^2 \frac{dv}{du} = 4uv - u^2 + v^2,$$

que l'on intègre en posant  $v = \tau u$ : on trouve

$$u = k \left( \frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^2, \quad v = k\tau \left( \frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^2.$$

2° On retrouve les formules indiquées en posant

$$\tau = t^2, \quad k = a^2.$$

Les courbes obtenues sont des strophoïdes homothétiques par rapport à l'origine, point double commun, admettant pour asymptotes les droites  $x + a = 0$ .

3° Le volume demandé est égal à  $\frac{2\pi a^3}{3} (3L_2 - 2)$ .

II. Pour  $x \geq a$ , on obtient un mouvement vibratoire simple, de période  $\frac{2\pi}{\omega}$ , le centre étant la position d'équilibre du point M.

Si  $|a - l|$  est  $\leq \frac{2g}{\omega^2}$ , le mouvement est représenté par la formule

$$x = \left( a + \frac{g}{\omega^2} \right) (1 - \cos \omega t) + l \cos \omega t.$$

Si  $|a - l|$  est  $> \frac{2g}{\omega^2}$ , on obtient alternativement le mouvement vibratoire représenté par la formule précédente et le mouvement vertical d'un point pesant. ●

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_{3,9}^4 \frac{\sqrt{x^2+2}(x+3)(x^2+2,2x-5,09) + x(3-x)(x+0,1)^2}{\sqrt{x^2+2}(9-x^2)(x+0,1)^2} dx$$

à  $10^{-2}$  près. (On pourra calculer d'abord l'intégrale indéfinie.)

*Solution.* — L'intégrale indéfinie est, à une constante additive près,

$$\begin{aligned} & A L |3 - x| + B L |x + 0,1| \\ & - \frac{C}{x + 0,1} + L \left| x + \sqrt{x^2 + 2} \right| \\ & - \frac{3}{\sqrt{11}} L \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 2} + 3 - \sqrt{11}}{x + \sqrt{x^2 + 2} + 3 + \sqrt{11}} \right|, \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{10,51}{9,61}, \quad B = A - 1, \quad C = -\frac{5,3}{3,1}.$$

On achèvera le calcul au moyen des tables.

(Dijon, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On donne les expressions

$$x = 3r \sin \varphi - r \sin 3\varphi,$$

$$y = 3r \cos \varphi - r \cos 3\varphi;$$

on demande de trouver la forme de la courbe, lieu du point de coordonnées  $(x, y)$  par rapport à des axes rectangulaires, lorsque  $\varphi$  varie. Montrer que cette courbe est

une épicycloïde, lieu d'un point d'une circonférence de rayon  $r$ , roulant sans glisser sur une circonférence de rayon  $2r$ . Indiquer la position de ces circonférences par rapport aux axes de coordonnées.

Trouver la longueur  $S$  de l'arc parcouru par  $M$ , lorsque  $\varphi$  varie de la valeur 0 à la valeur  $\alpha$ . Trouver l'aire totale enfermée par la courbe.

II. Chercher la solution de l'équation différentielle

$$ay'' = 2$$

( $a$  étant une constante) qui s'annule pour  $x = 0$ , et dont la dérivée prend alors la valeur  $\lambda$ . Construire la courbe (C) représentant, en axes rectangulaires, la variation de cette fonction. Montrer que si  $\lambda$  varie, les courbes (C) restent égales entre elles.

En un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  passe une courbe (C) correspondant à une valeur convenable du paramètre  $\lambda$ . Calculer, en fonction de  $x, y, a$ , le coefficient angulaire de la tangente  $Mt$  à cette courbe.

Déterminer une courbe (C') telle qu'en chaque point  $M'$  sa tangente  $M't'$  soit symétrique par rapport à  $Mx$ , parallèle à  $Ox$ , de la tangente  $M't$  à la courbe (C) qui passe par le même point  $M'$ . Indiquer la forme des diverses courbes C'.

Indications sur la solution. — I. La courbe est une épicycloïde à deux rebroussements, engendrée par un point  $M$  d'un cercle de rayon  $r$  roulant sans glisser sur un cercle de rayon  $2r$ . Le point  $M$  coïncide avec le point de contact  $P$  des deux cercles, lorsque ce point  $P$  vient sur l'axe  $Oy$ , ce qui donne les deux rebroussements. L'angle  $\varphi$  est égal à

$$\varphi = (\text{OP}, \text{O}y).$$

On trouve immédiatement

$$ds^2 = 36r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2,$$

d'où  $S$  sans difficultés.

Pour l'aire, on peut prendre la différentielle de l'aire

balayée par le rayon vecteur :

$$\frac{1}{2} (x dy - y dx) = -6r^2(1 - \cos 2\varphi) d\varphi.$$

L'aire totale est

$$12\pi r^2.$$

II. La solution demandée est manifestement

$$y = \frac{x^2}{a} + \lambda x.$$

Le coefficient angulaire  $m$  de la parabole passant par le point  $(x, y)$  est

$$m = \frac{y}{x} + \frac{x}{a}.$$

La courbe  $(C')$  est définie par l'équation différentielle

$$y' = -\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{a}\right),$$

dont la solution s'écrit

$$y = -\frac{x^2}{3a} + \frac{\mu}{x} \quad (\mu = \text{const.}).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$f(x) = \frac{3x^4 - 8x^3 + 10x^2 - 1}{(x-1)^2(x^2+1)^2},$$

les éléments simples étant des fractions ayant pour dénominateurs respectifs des puissances de binômes du premier degré, réels ou imaginaires.

Chercher celle des primitives de  $f(x)$  qui tend vers zéro lorsque  $x$  augmente indéfiniment.

II. Calculer à un millième près la valeur de l'intégrale définie :

$$\int_0^2 \frac{t+1}{t^2+1} dt.$$

*Indications.* — I. La décomposition de la fraction rationnelle est

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1+i}{(x-i)^2} + \frac{1-i}{(x+i)^2}$$

et la primitive s'annulant à l'infini est

$$\frac{-3x^2 + 4x - 3}{(x-1)(x^2+1)}.$$

II. La valeur de l'intégrale définie est

$$\frac{1}{2}L5 + \text{arc tang } 2 = 1,912.$$

(Lille, juillet 1920.)