Nouvelles annales de mathématiques

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1922

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 23-34

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__23_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1922.

Mathématiques (1re COMPOSITION) (1).

NOTATION. — *Le symbole* th u *désigne la tangente hyperbolique*

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}.$$

I. *Exprimer* $Y = \operatorname{th} 3u$ *en fonction de* $X = \operatorname{th} u$.

Soit $Y = f(X)$ *la fonction obtenue. Calculer avec une décimale exacte l'aire comprise entre la courbe* $Y = f(X)$ *et les droites* $X = 3Y$, $X = 0$, $X = 1$.

Développer $f(X)$ *en série convergente procédant suivant les puissances entières positives croissantes de* X.

Soit $\varphi(X)$ *la fonction formée par l'ensemble des trois premiers termes, à coefficients non nuls, du*

(1) *Voir* plus loin l'énoncé et la solution de la deuxième composition.

développement précédent. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ, *la réalité des racines de l'équation*

$$\varphi(\operatorname{th} u) = 3 \operatorname{th} u + \lambda.$$

II. *Exprimer, pour* n *entier positif*, $Y = \operatorname{th} nu$ *en fonction de* $X = \operatorname{th} u$.

Soit $Y = F(X)$ *la fonction obtenue. Décomposer les deux termes de la fraction rationnelle* $F(X)$ *en facteurs du premier et du second degré à coefficients réels.*

Montrer que la relation $Y = F(X)$ *équivaut, si l'on pose* $X = \sin x$, $Y = \sin y$, *à une relation simple entre les tangentes trigonométriques*

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right).$$

Étudier les variations de la fonction $Y = F(X)$, X *variant de* $-\infty$ *à* $+\infty$, *et les représenter graphiquement.*

Soit l'équation $F(X) = F(X_0)$, X_0 *étant une constante donnée différente de* -1 *et de* $+1$. *Calculer ses racines à l'aide de* X_0 *et des tangentes trigonométriques des angles* $\frac{K\pi}{n}$ (K *entier*). *Discuter la réalité.*

Épure de Géométrie descriptive.

La ligne de terre étant figurée par le petit axe de la feuille, un tore a son centre O *dans le premier dièdre à* 14^{cm} *de chacun des plans de projection; ce point* O *est dans le plan de profil figuré par le grand axe de la feuille. L'axe du tore est vertical; son cercle générateur et son cercle de* *gorge ont tous deux* 4$^{\text{cm}}$ *de rayon. Par le diamètre du tore parallèle à la ligne de terre, on mène un plan bitangent au tore, et l'on fait tourner autour de ce diamètre la surface limitée par le contour extérieur de la courbe de section : on engendre ainsi un solide* Σ.

On considère d'autre part un hyperboloïde de révolution à une nappe H, *ayant même axe que le tore, et dont la méridienne admet pour cercles osculateurs en ses sommets les cercles formant la méridienne du tore. (A défaut d'une détermination géométrique de l'hyperbole méridienne, on pourra opérer analytiquement; dans ce cas, on indiquera le calcul dans un angle inférieur de la feuille.)*

1° *Représenter le solide* S *commun à* H *et à* Σ.

2° *On considère des projetantes perpendiculaires au deuxième bissecteur. Construire pour le solide* S *le contour apparent dans l'espace et le contour apparent en projection sur le second bissecteur.*

Mathématiques (2$^{\text{e}}$ COMPOSITION).

Un plan vertical est rapporté à deux axes, l'un, Ox, *horizontal, l'autre,* Oy, *vertical, dirigé vers le haut.*

1° *Écrire l'équation de la trajectoire d'un point pesant* M *qui se meut dans ce plan, sachant qu'il passe par l'origine des coordonnées à l'origine du temps, et que sa vitesse lors du passage en* O *fait l'angle* α *avec* Ox *et a pour mesure* $\sqrt{2gh}$, *où* g

désigne l'accélération de la pesanteur et h *une longueur donnée. Lorsque* α *varie,* h *restant constant, on a une famille de trajectoires paraboliques* (T) *admettant toutes pour directrice la droite* $y = h$. *Donner l'équation de la parabole de sûreté, enveloppe de ces courbes* (T).

2° *On fait toujours varier* α, *laissant* h *constant. Former l'équation du lieu* (L) *des points des courbes* (T) *où la tangente fait l'angle* β *donné avec* Ox. *Trouver l'enveloppe des lignes* (L) *quand* β *varie. Montrer qu'on passe simplement du point de contact, variable, de la ligne* (L) *avec son enveloppe au point variable de la ligne* (L), *en lequel la tangente est parallèle à* Ox.

3° *Soient* PQ_1, PQ_2 *les tangentes aux deux trajectoires* (T) *qui passent en un point* $P(x_0, y_0)$ *donné. Trouver les bissectrices* PB, PB′ *de ces droites, et montrer qu'elles ne dépendent pas de* h.

La parabole de sûreté varie avec h; *montrer qu'une telle parabole passe par* P; *trouver une relation simple entre les éléments de cette parabole en* P *et les droites* PB, PB′.

Il y a une infinité de mouvements d'un point pesant l'amenant à passer par les points donnés O *et* P. *Soient, dans un tel mouvement,* OV *et* PV′ *les vecteurs vitesses du mobile lors des passages en ces points. Trouver les lieux géométriques* (H) *et* (H′) *des points* V *et* V′. *Par* O *on mène un vecteur* OV'_1 *se déduisant par translation du vecteur* PV′. *Étudier la variation de* $\overrightarrow{VV'_1}$ *en fonction de la durée* θ *du parcours de l'arc* OP *de la trajectoire correspondant à* OV.

SOLUTION.

PAR M. R. B.

1. Les coordonnées du point M sont, à l'instant t,

$$x = \sqrt{2gh}\cos\alpha\, t,$$
$$y = \sqrt{2gh}\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2.$$

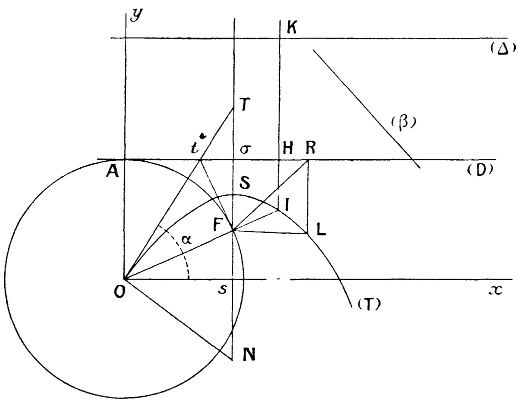
Par élimination de t, on obtient l'équation de la trajectoire (T),

$$x^2 - 4h\sin\alpha\cos\alpha\, x + 4h\cos^2\alpha\, y = 0.$$

Il est plus rapide de traiter le problème par la voie géométrique que par le calcul.

Soient S le sommet de (T) (*fig.* 1), s le pied de son ordonnée. La composante horizontale de la vitesse du point M est constante et égale à $\sqrt{2gh}\cos\alpha$. Telle est donc en particu-

Fig. 1.



lier la vitesse du point M_1 à l'instant où il passe en S, cette vitesse étant horizontale. Appliquons le théorème des forces vives entre le point O et le point S. On a

$$2gh - 2gh\cos^2\alpha = 2gh\sin^2\alpha = 2g.sS,$$

d'où

$$sS = h \sin^2\alpha.$$

Soient T et N les points où la tangente et la normale en O rencontrent l'axe de (T). On a, d'après une propriété classique de la parabole,

$$sT = 2sS = 2h\sin^2\alpha,$$

d'où

$$Ns = Ot \cot\alpha = sT \cot^2\alpha = 2h\cos^2\alpha.$$

Mais la sous-normale Ns est égale au double du paramètre de (T). Si donc on appelle σ le point où la directrice (D) de (T) rencontre sS, on a

$$s\sigma = sS + S\sigma = h\sin^2\alpha + h\cos^2\alpha = h.$$

Donc, *quel que soit l'angle* α, *la directrice* (D) *de* (T) *est la droite* $y = h$ [1].

Soit A le point où (D) rencontre Oy. F étant le foyer de (T), on a

$$OF = OA.$$

Donc, *quand* α *varie, le lieu de* F *est le cercle* $O(h)$ *de centre* O *et de rayon* h.

Soit I le second point de rencontre de OF avec (T). Menons la droite (Δ), d'équation $y = 2h$, et soient H et K les projections du point I sur (D) et sur (Δ). On a

$$OF = HK, \qquad FI = IH,$$

d'où, par addition,

$$OI = IK.$$

Par conséquent, le point I appartient à une parabole (Π) de foyer O et de directrice (Δ). On voit en outre que (T) et (Π) se touchent en I, la tangente en ce point à chacune des paraboles étant la bissectrice de l'angle $\widehat{OIK}$. Donc, *quand* α *varie,* (T) *a pour enveloppe la parabole* (Π), dite *parabole de*

---

[1] On peut aussi écrire

$$\text{paramètre} = \frac{1}{2}\,\frac{\overline{Os}^2}{sS}, \qquad \ldots.$$

sûreté. Remarquons d'ailleurs que la parabole (T) passant par le point O et touchant la droite de l'infini au point à l'infini de Oy, c'est-à-dire passant par trois points fixes, ne peut toucher son enveloppe qu'en un point. On est ainsi assuré que (I) n'a pas d'autre enveloppe que (Π).

L'équation de (Π) est

$$x^2 + y^2 = (y - 2h)^2$$

ou

$$x^2 + 4hy - 4h^2 = 0.$$

2. Soit L le point (*fig.* 1) de la parabole (T), de foyer F, où la tangente est parallèle à une droite donnée (β). R étant la projection de L sur (D), le triangle FLR est isoscèle (LF = LR) et FR est perpendiculaire à (β). FL a donc aussi une direction fixe, quelle que soit la parabole (T). On voit donc qu'on passe du point F au point L par une transformation ($\mathfrak{T}$) définie de la manière suivante : étant donné le point F, on construit le point L tel que le triangle FRL ayant ses trois côtés de directions fixes, son troisième sommet R soit sur (D).

Cette transformation ($\mathfrak{T}$), étendue à tout le plan, est une *transformation homographique :* en effet, si le point F décrit une droite, on reconnaît immédiatement que le point L décrit une droite concourant avec celle-ci et avec (D). En outre, si F s'éloigne à l'infini, L en fait autant. ($\mathfrak{T}$) est donc une transformation homographique conservant la droite de l'infini. C'est ce qu'on appelle une *affinité.* On sait qu'une affinité transforme une conique en conique du même genre. On sait aussi qu'elle conserve les relations de parallélisme et qu'elle n'altère pas les rapports de division sur une droite.

La courbe (L) de l'énoncé est la transformée du cercle $O(h)$ par l'affinité ($\mathfrak{T}$). C'est donc une *ellipse* dont on reconnaît les propriétés suivantes :

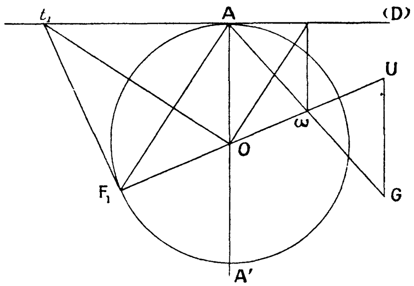
1° (L) passe en A.

2° Soit F_1 (*fig.* 2) le point de $O(h)$ tel que AF_1 soit parallèle à FR (*fig.* 1). Quand F vient en F_1, L vient en O. *Donc* (L) *passe par le point* O.

3° Le centre ω de (L) est le transformé du point O par ($\mathfrak{T}$). Ce point est équidistant de O et de (D). Donc *il appartient à la parabole* (Π') *de foyer* O *et de directrice* (D).

4° Deux triangles FRL et F′R′L′ sont homothétiques. Donc FF′ et LL′ se coupent sur RR′ en (D). En prenant F′ infini-

Fig. 2.



ment voisin de F sur le cercle O(h), on voit que *la tangente à* (L) *en* L *rencontre* (D) *au même point t que la tangente à* O(h) *en* F.

En particulier, la tangente en O à (L), Ot_1, est perpendiculaire à AF_1, *donc parallèle à* (β). On voit encore qu'au point G, transformé du point A′ de O(h) diamétralement opposé à A′, la tangente est horizontale. Mais ce point est diamétralement opposé sur (L) au point A. Donc, en A, la tangente à (L) est aussi horizontale. *C'est donc* (D) *même.*

En résumé, nous avons obtenu les propriétés suivantes de l'ellipse (L) : (L) passe en O où sa tangente est parallèle à (β); en A où sa tangente est (D). Son centre ω est déterminé par une construction simple. L'ellipse doit donc être considérée comme bien connue.

Soit U le point de (L) diamétralement opposé à O. Le point U est sur la parabole homothétique par rapport à O de (Π′), le rapport d'homothétie étant 2. Cette parabole n'est autre que la parabole de sûreté (Π). En outre, la tangente en U à (L) est parallèle à Ot_1. Il en est visiblement de même de la tangente à (Π) au même point. Donc (L) *touche* (Π) *en* U.

Quand β varie, (L) passe par trois points fixes, à savoir le point O et deux points confondus en A. (L) ne peut donc toucher son enveloppe qu'en un point. On en conclut que (L) *a pour seule enveloppe la parabole de sûreté* (H) (*voir* la Note finale).

Le point variable de (L) où la tangente est horizontale est le point G, diamétralement opposé au point A. UG *est équipollent à* AO. Telle est la relation simple qui existe entre les points U et G.

3. *a*. Soit J la projection du point donné P sur (D) (*fig*. 3). Les foyers F_1 et F_2 des deux paraboles (T) qui passent en P sont les points d'intersection du cercle $O(h)$ et du cercle $P(PJ)$. Les tangentes PQ_1 et PQ_2 sont les bissectrices des angles $\widehat{JPF_1}$ et $\widehat{JPF_2}$.

Dans ce qui suit, nous désignerons par (X) l'angle, défini à 2π près, que fait une droite *orientée* X avec Ox, et par K_1, K_2. ... des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

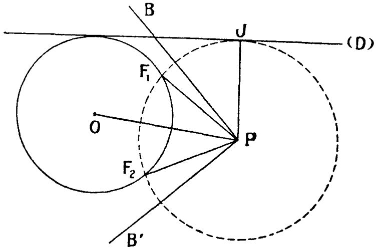
On a les relations

$$\begin{aligned} 2(PQ_1) &= (PJ) + (PF_1) + 2K_1\pi, \\ 2(PQ_2) &= (PJ) + (PF_2) + 2K_2\pi, \\ (PF_1) + (PF_2) &= 2(PO) + 2K_3\pi, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(PQ_1) + (PQ_2) = (PJ) + (PO) + (K_1 + K_2 + K_3)\pi.$$

Fig. 3.



Soit maintenant PB la bissectrice de l'angle $\widehat{Q_1PQ_2}$, on a

$$2(PB) = (PQ_1) + (PQ_2) + 2K_4\pi,$$

d'où

$$(PB) = \frac{(PJ)+(PO)}{2} + K_4\pi + \frac{K_1+K_2+K_3}{2}\pi.$$

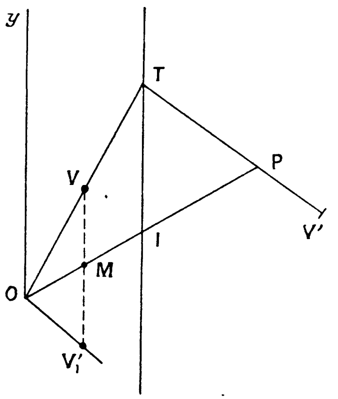
Si l'on fait varier les K de toutes les manières possibles, on obtient pour (PB) les mêmes orientations que pour les quatre demi-bissectrices de l'angle $\widehat{OPJ}$. Donc, laissant maintenant de côté la question de sens, les droites PB et PB′ de l'énoncé sont parallèles aux deux bissectrices, extérieure et intérieure, de l'angle $\widehat{OPJ}$. Elles ne dépendent pas de h.

Il existe une parabole de sûreté (π) passant en P. C'est celle qui correspond à la valeur de $h = \frac{OP}{2}$. Si l'on renversait le sens de la verticale, il y aurait deux paraboles de sûreté, (Π) et (Π'), se coupant orthogonalement en P.

PB *et* PB′ *sont les tangentes* (*ou les normales*) *à ces deux paraboles.*

b. Quelle que soit la parabole (T) passant en O et P, les tangentes à (T) en ces points se coupent en T sur la verticale du point I, milieu de OP (*fig.* 4). Les vecteurs OV et PV′,

Fig. 4



dirigés suivant ces tangentes, ont même composante horizontale, en sorte que, OV'_1 étant équipollent à PV′, les points V et V'_1 sont une même verticale. La droite OP coupe VV'_1 en son milieu M.

Soit θ le temps de parcours de l'arc OP de trajectoire. VV'_1 représente l'accroissement de la composante verticale de la vitesse pendant ce temps. On a donc, en grandeur et en signe.

$$VV'_1 = -g\theta, \qquad \text{ou} \qquad V'_1V = g\theta,$$

ce qui répond à la dernière question.

D'autre part, si l'on projette obliquement le mouvement sur OP, parallèlement à la verticale Oy, la projection du mobile décrit OP avec une vitesse uniforme égale à OM. On a donc

$$OM.\theta = OP,$$

d'où

$$OM.V'_1V = g.OP.$$

Mais

$$V'_1V = 2MV,$$

donc

$$OM.MV = \frac{1}{2}g.OP.$$

Si donc on rapporte le lieu du point V à des axes obliques, OP et Oy, ce lieu a pour équation

$$xy = \frac{1}{2}g.OP.$$

C'est une hyperbole (H), ayant pour asymptotes OP et Oy.

V'_1 décrit l'hyperbole supplémentaire (H''), et V' décrit l'hyperbole (H') qui se déduit de (H'') par la translation du vecteur OP.

On voit que OV est minimum *quand la direction de la vitesse en* O *est bissectrice de l'angle* $\widehat{POy}$.

NOTE.

Au n° 2, nous avons reconnu que l'enveloppe des ellipses (L) se confond avec celle des paraboles (T). Cela rentre dans le théorème général que voici :

Soit une famille de courbes (T) *définies par l'équation*

$$(1) \qquad f(x, y, \lambda) = 0,$$

où λ *est un paramètre variable. Sur chaque courbe* (T) *marquons un point* M *satisfaisant à la condition*

$$(2) \qquad g(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$

où μ est un nombre donné et g une fonction donnée. Quand λ varie, le point M *décrit une courbe* (L) *qui dépend de μ.*

Quand on fait varier μ, les courbes (L) *ont une enveloppe qui comprend celle des courbes* (T) *quand on fait varier λ.*

En effet, une courbe (L) peut être considérée comme ayant pour équation (1), à la condition de remplacer μ par sa valeur, fonction de x, y et λ, tirée de (2). Cette substitution étant faite, posons

$$\varphi(x, y, \mu) = f(x, y, \lambda). \tag{3}$$

(L) a pour équation

$$\varphi(x, y, \mu) = 0. \tag{4}$$

Un point caractéristique de (L) satisfait à l'équation (4) et à l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \frac{\partial f}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} = 0. \tag{5}$$

Mais un point caractéristique de (T) satisfait à l'équation (1) ainsi qu'à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0, \tag{6}$$

(1) et (6) entraînent (4) et (5), ce qui établit la proposition.

Le résultat du n° 2 n'est évidemment qu'un cas très particulier de ce théorème.