RAOUL BRICARD

Sur le théorème de Morley

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 254-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__254_1>

[K[1]2e]

SUR LE THÉORÈME DE MORLEY;

PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Le théorème de Morley, peu connu en France, est un des plus jolis qui soient en géométrie élémen-

taire. Il paraît avoir été donné par son auteur vers 1900, qui l'a obtenu comme conséquence de résultats relatifs à la cardioïde (le lieu du foyer d'une telle courbe, inscrite à un triangle fixe, se compose de neuf droites) [1]. Ce théorème est le suivant :

Soit ABC *un triangle quelconque; menons les trisectrices de ses angles; soit* D *le point de rencontre des trisectrices de* $\widehat{B}$ *et de* $\widehat{C}$, *voisines du côté* BC; *soient* E *et* F *les points analogues. Le triangle* DEF *est équilatéral.*

De nombreuses démonstrations en ont été données par la géométrie élémentaire, par la géométrie projective, par la trigonométrie, par la géométrie analytique. La plupart sont assez compliquées. Celle que voici, obtenue par divers géomètres, se recommande par sa brièveté. Elle est malheureusement d'un caractère artificiel.

LEMME. — *Soit* ABC *un triangle quelconque. Marquons sur la bissectrice de l'angle* $\widehat{A}$ *un point* I, *intérieur au triangle, tel que l'on ait*

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}.$$

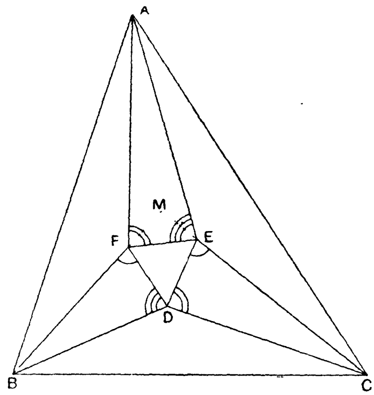
Le point I *est le centre du cercle inscrit au triangle* ABC.

La démonstration est immédiate.

---

(1) *Voir* trois Mémoires de F.-G. Taylor et W.-L. Marr; de F.-G. Taylor; de W.-L. Marr dans les *Proceedings of the Edinburgh mathem. Society*, 1913-1914, p.p. 119, 132 et 136; *voir* aussi *Periodico di Mathematiche*, 1921, p.p. 220 et 291.

Cela posé, partons d'un triangle équilatéral DEF, et sur ses côtés, extérieurement au triangle, construisons



(*voir* la figure) trois triangles AEF, BFD, CDE, tels que l'on ait les égalités d'angles suivantes :

$$\widehat{BFD} = \widehat{CED} = \alpha, \qquad \widehat{CDE} = \widehat{AFE} = \beta, \qquad \widehat{AEF} = \widehat{BDF} = \gamma,$$

α, β, γ satisfaisant aux relations

$$(1) \qquad \alpha + \beta + \gamma = 240^\circ,$$

$$(2) \qquad 30^\circ \leqq \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq 120^\circ$$

et étant d'ailleurs quelconques.

Soient FM′ et EM″ les prolongements de BF et CE. On a

$$\widehat{M''EF} = \widehat{M'FE} = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha < 90^\circ,$$

d'après (1). FM′ et EM″ se rencontrent donc en un point M et le triangle MEF est isoscèle. Il en résulte évidemment que le point D est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$.

On a d'ailleurs

$$\widehat{BDC} = 360^\circ - 60^\circ - \beta - \gamma = 300^\circ - \beta - \gamma$$

et

$$\widehat{BMC} = 180^\circ - 2\widehat{MEF} = 180^\circ - 2(120^\circ - \alpha) = 2\alpha - 60^\circ.$$

On a donc

$$\widehat{BDC} = 90^\circ = \frac{\widehat{BMC}}{2},$$

car cela revient à

$$300^\circ - \beta - \gamma = 90^\circ + \alpha - 30^\circ,$$

c'est-à-dire à (1).

Donc, en vertu du lemme, D est le centre du cercle inscrit au triangle BMC. On a par conséquent

$$\widehat{CBD} = \widehat{DBF}, \quad \text{et de même} \quad \widehat{DBF} = \widehat{FBA}.$$

BD et BF sont donc les deux trisectrices de $\widehat{ABC}$. De même CD et CE celles de $\widehat{BCA}$, AE et AF celles de $\widehat{CAB}$.

D'autre part, on a

$$\widehat{CAB} = 3(180^\circ - \beta - \gamma) = 3(\alpha - 60^\circ),$$
$$\widehat{ABC} = 3(\beta - 60^\circ),$$
$$\widehat{BCA} = 3(\gamma - 60^\circ).$$

Par conséquent, α, β, γ n'étant assujettis qu'à satisfaire à (1) et à (2), on peut faire en sorte que le triangle ABC soit semblable à un triangle donné *a priori*. Cela suffit évidemment à démontrer le théorème de Morley.

Je ne donnerai pas d'autres démonstrations. laissant au lecteur le plaisir d'en chercher une qui ne mérite pas le même reproche que la précédente.

2. Chaque angle a six trisectrices, si l'on étend convenablement le sens de ce mot. Par exemple, celles de l'angle $\widehat{BAC}$ sont, outre AE et AF, deux droites inclinées à 120° sur AE et deux droites inclinées à 120° sur AF. On peut se proposer d'étudier la configuration formée par l'ensemble des trisectrices.

On trouve qu'elles donnent lieu en tout à 18 triangles équilatéraux qui ont entre eux des relations assez remarquables. Il est nécessaire, pour étudier convenablement la configuration, de raisonner en *géométrie dirigée*. Je n'y insiste pas davantage, car si ces recherches de caractère combinatoire sont attrayantes à poursuivre, l'exposition en est lourde.