Nouvelles annales de mathématiques

Certificat de mécanique appliquée

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 268-269

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__268_0>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Étudier par la méthode graphique la fonction dynamique du régulateur à action directe.*

2° *Déterminer approximativement en partant de l'équation*

$$\rho.g.H = uv\cos\alpha - u_1 v_1 \cos\alpha_1$$

la vitesse de régime et le rendement d'une roue Pelton.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une poutre horizontale de longueur* $2l$ *est encastrée à son extrémité* A *et repose sur un appui de même niveau à son extrémité* B. *Elle supporte en son milieu une charge verticale unique* P. *Calculer les réactions aux appuis, le moment d'encastrement. Donner, en fonction de* x, *l'expression du moment fléchissant, et l'ordonnée* y *de la fibre élastique. (On appelle* x *la distance comptée à partir de l'appui encastrée, positivement vers l'autre appui.) Où est obtenu le maximum du moment fléchissant (en valeur absolue), et donner la valeur de ce maximum.*

SOLUTION. — Appelons R, R′ les réactions en A et B et M le moment d'encastrement en A compté positivement dans le sens de AB vers la verticale descendante. On a les égalités statiques

$$R + R' = P,$$
$$M = l(2R' - P) = l(P - 2R).$$

Par ailleurs, l'expression du moment fléchissant en un point d'abscisse x, est, en tenant compte de la valeur de M en fonction de R :

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} Rx + l(P - 2R) & (0 \leqq x \leqq l), \\ Rx + l(P - 2R) - P(x - l) & (l \leqq x \leqq 2l). \end{cases}$$

En intégrant deux fois l'équation d'équarrissage et tenant compte de l'encastrement en A et de ce que la fibre élastique n'est pas cassée en son milieu (on néglige ainsi l'effet de l'effort tranchant)

$$-\mathrm{EI}\,y = \begin{cases} \frac{1}{6}\mathrm{R}.x^3 + l(\mathrm{P}-2\mathrm{R})\frac{x^2}{2} & (0 \leqq x \leqq l), \\ \frac{1}{6}\mathrm{R}.x^3 + l(\mathrm{P}-2\mathrm{R})\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\mathrm{P}(x-l)^3 & (l \leqq x \leqq 2l). \end{cases}$$

En exprimant que la poutre passe par B, c'est-à-dire que pour $x = 2l$, y est nul, on obtient la valeur de R :

$$\frac{4}{3}\mathrm{R}.l^3 + 2l^3(\mathrm{P}-2\mathrm{R}) - \frac{1}{6}\mathrm{P}l^3 = 0,$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{11}{16}\mathrm{P}, \qquad \mathrm{R}' = \frac{5}{16}\mathrm{P}, \qquad \mathrm{M} = -\frac{3}{8}\mathrm{P}l.$$

En revenant à l'expression du moment fléchissant et remplaçant R par sa valeur,

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \frac{1}{16}\mathrm{P}(11x - 6l) & (0 \leqq x \leqq l), \\ \frac{1}{16}\mathrm{P}(-5x + 10l) & (l \leqq x \leqq 2l), \end{cases}$$

il varie linéairement de $-\frac{6}{16}\mathrm{P}.l$ à $\frac{5}{16}\mathrm{P}.l$ pour x variant de 0 à l et de $\frac{5}{16}\mathrm{P}.l$ à 0 pour x variant de l à $2l$. Son maximum en valeur absolue est donc atteint à l'encastrement et c'est $\frac{3}{8}\mathrm{P}.l$.

(Lille, juillet 1920.)