NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

D'OCAGNE

Sur les systèmes de quadriques ayant mêmes projections de leurs lignes de courbure sur un plan principal commun

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 277-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__277_0>

[L²11d]

SUR LES SYSTÈMES DE QUADRIQUES AYANT MÊMES PROJECTIONS DE LEURS LIGNES DE COURBURE SUR UN PLAN PRINCIPAL COMMUN;

PAR M. D'OCAGNE.

1. Soit

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$$

(avec $A=a^2$, $B=\pm b^2$, $C=\pm c^2$, et, suivant l'habitude, $a>b>c$ dans le cas de l'ellipsoïde) l'équation d'une quadrique rapportée à ses axes.

En vertu du théorème de Dupin, ses lignes de courbure sont données par ses intersections avec les quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+\frac{z^2}{C+\lambda}=1,$$

d'où l'on déduit immédiatement l'équation des projections de ces lignes de courbure sur l'un ou l'autre des plans de projection, Oxy par exemple,

$$\frac{x^2(A-C)}{A(A+\lambda)}+\frac{y^2(B-C)}{B(B+\lambda)}=1.$$

Le moyen le plus simple de trouver l'enveloppe de ces lignes est de former leur équation en coordonnées plückériennes

$$\frac{u^2A(A+\lambda)}{A-C}+\frac{v^2B(B+\lambda)}{B-C}=1.$$

Elle définit un faisceau tangentiel comprenant (pour $\lambda = -C$) la section même de la quadrique, et (pour $\lambda = \infty$) la conique dégénérée formée par le système de deux points

$$u^2 \frac{A}{A-C} + v^2 \frac{B}{B-C} = 0,$$

c'est-à-dire par les points à l'infini des droites

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{B(A-C)}{A(C-B)}},$$

qui ne sont autres que les traces, sur le plan principal considéré, des plans cycliques diamétraux perpendiculaires à ce plan. Autrement dit : *les projections des lignes de courbure de la quadrique sur un de ses plans principaux sont données par les coniques inscrites dans le losange formé par les tangentes à la section principale contenue dans ce plan, menées par les ombilics situés sur cette section* [1].

2. Chacune des coniques inscrites dans ce losange peut être prise pour section principale d'une quadrique ayant pour ombilics les points de contact de cette conique avec les côtés du losange. Pour chacune de ces quadriques les projections des lignes de courbure sur le plan principal considéré seront donc les mêmes. Étudions le système de quadriques ainsi obtenu.

Voyons d'abord comment les longueurs des axes de chacune d'elles sont géométriquement déterminées, et, pour que la construction en soit réelle, plaçons-nous dans le cas d'un ellipsoïde dont on projette les lignes

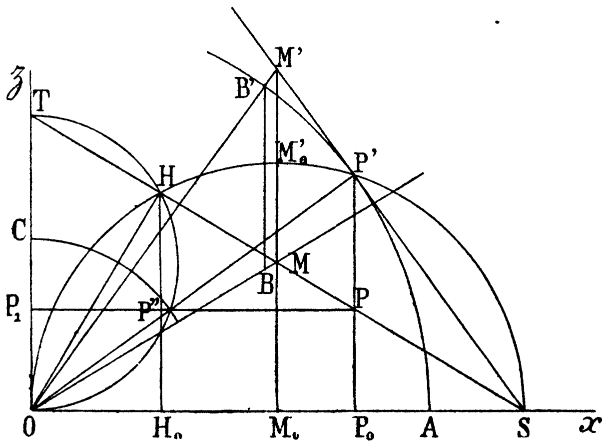
---

[1] Nous avons donné une démonstration géométrique de ce théorème dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, (1re sem. 1921, p. 1640).

de courbure sur la section dite *moyenne*, contenue dans Oxz (demi-axes a et c), pour laquelle les ombilics sont réels.

Soit ST l'un des côtés du losange formé par les tangentes menées par les ombilics. Donnons-nous sur cette droite l'ombilic P d'une des quadriques du système.

Le point P' correspondant du cercle principal décrit sur le grand axe pour diamètre étant tel que la tangente en ce point à ce cercle coupe Ox en S, se trouve sur le cercle décrit sur OS pour diamètre; il est donc à la rencontre de ce dernier cercle et de la perpendiculaire menée par P à OS. Il suffit dès lors de rabattre OP' en OA sur OS pour avoir le demi-grand axe a cherché.



De même, si la perpendiculaire menée par P à OT rencontre en P'' le cercle dècrit sur OT pour diamètre, le rabattement de OP'' en OC sur OT fait connaître le demi-petit axe c de la section de la quadrique d'ombilic P par le plan Oxz.

Reste à trouver le demi-axe b dirigé suivant Oy. Le plan cyclique diamétral intérieur à l'angle xOz ayant pour trace la médiane OM du triangle OST, toute la question se réduit à déterminer le point B situé sur OM de l'ellipse dont les demi-axes sont OA et OC, problème bien facile à résoudre. En effet, si la perpendiculaire à Ox menée par M rencontre en M′ la droite SP′, OM′ est le diamètre du cercle principal correspondant au diamètre OM de l'ellipse; si donc ce diamètre OM′ rencontre ce cercle principal en B′, la perpendiculaire abaissée de B′ sur Ox donne sur OM le point B cherché.

On a ainsi les trois demi-axes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ de l'ellipsoïde d'ombilic P [1].

Pour nous rendre compte de la façon dont varie le demi-axe OB avec la position de l'ombilic P sur la tangente ST, nous ferons la remarque que voici :

On a

$$\frac{OB}{OM} = \frac{OB'}{OM'} = \frac{OP'}{OM'}.$$

Or, la similitude des triangles rectangles $OP'P_0$ et $OM'M_0$ donne

$$\frac{OP'}{OM'} = \frac{P_0P'}{OM_0}.$$

Donc

$$\frac{OB}{OM} = \frac{P_0P'}{OM_0}.$$

Le demi-axe OB varie donc, à un facteur constant près, comme l'ordonnée P_0P' du cercle décrit sur OS pour diamètre.

Lorsque le point P vient en H, pied de la perpendiculaire abaissée de O sur ST, les points P′ et P″ se con-

---

[1] La construction ici donnée fournit la solution de la question posée par nous sous le n° 2369 (1918, p. 399).

fondent aussi avec ce point; en ce cas $a = c$ et, par suite, nécessairement $a = b = c$. Il est, au reste, facile de vérifier qu'on a bien, en ce cas, OB = OH. En effet, la dernière égalité écrite donne alors

$$\frac{OB}{OM} = \frac{H_0H}{OM_0}.$$

Mais, d'après la similitude des triangles rectangles OHH_0 et OMM_0, on a

$$\frac{OH}{OM} = \frac{H_0H}{OM_0}.$$

Il en résulte bien que, dans ce cas,

$$OB = OH.$$

3. Étudions maintenant l'enveloppe des quadriques du système. Posant $OS = h$, $OT = k$, $ST = l$, prenons comme paramètre variable le rapport $\frac{TP}{PS} = \rho$. Nous avons immédiatement

$$OP_0 = \frac{\rho h}{1+\rho}, \qquad P_0S = \frac{h}{1+\rho}, \qquad OP_1 = \frac{k}{1+\rho},$$

puis

$$OA^2 = OP_0.OS = \frac{\rho h^2}{1+\rho},$$

$$OB^2 = \frac{OM^2.P_0P'^2}{OM_0^2} = \frac{OM^2.OP_0.P_0S}{OM_0^2}$$

$$= \frac{l^2}{h^2}\cdot\frac{\rho h}{1+\rho}\cdot\frac{h}{1+\rho} = \frac{\rho l^2}{(1+\rho)^2},$$

$$OC^2 = OP_1.OT = \frac{k^2}{1+\rho}.$$

L'équation de l'ellipsoïde correspondant est donc

$$(1)\qquad (1+\rho)\frac{x^2}{h^2} + (1+\rho)^2\frac{y^2}{l^2} + \rho(1+\rho)\frac{z^2}{k^2} = \rho,$$

ou

$$\rho^2\left(\frac{y^2}{l^2}+\frac{z^2}{k^2}\right)+\rho\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{2y^2}{l^2}+\frac{z^2}{k^2}-1\right)+\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{l^2}=0;$$

dont l'enveloppe est donnée par

$$\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{2y^2}{l^2}+\frac{z^2}{k^2}-1\right)^2-4\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{l^2}\right)\left(\frac{y^2}{l^2}+\frac{z^2}{k^2}\right)=0$$

ou

$$(2)\qquad \left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{z^2}{k^2}\right)^2-2\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{2y^2}{l^2}+\frac{z^2}{k^2}\right)+1=0.$$

Cette surface du quatrième ordre présente des particularités intéressantes, et tout d'abord celle d'admettre une *double génération par un système de deux coniques*. En effet, l'équation précédente peut s'écrire *ad libitum*

$$(2')\qquad \left(\frac{z^2}{k^2}-\frac{x^2}{h^2}-1\right)^2-4\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{l^2}\right)=0$$

ou

$$(2'')\qquad \left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{z^2}{k^2}-1\right)^2-4\left(\frac{z^2}{k^2}+\frac{y^2}{l^2}\right)=0.$$

Si l'on fait soit $y=\mu x$ dans $(2')$, soit $y=\nu z$ dans $(2'')$, le premier membre se décompose en un produit de deux facteurs du second degré, et, par suite, on peut dire que *la section de l'enveloppe par tout plan passant soit par* Oz, *soit par* Ox, *se compose de deux coniques.*

En particulier, si l'on fait $z=0$ dans $(2'')$, on obtient

$$\left(\frac{x^2}{h^2}-1\right)^2-4\frac{y^2}{l^2}=0$$

ou

$$\left(\frac{x^2}{h^2}-1-\frac{2y}{l}\right)\left(\frac{x^2}{h^2}-1+\frac{2y}{l}\right)=0,$$

système des deux paraboles d'axe Oy, ayant pour sommets, sur cet axe, les points $y = \pm \frac{l}{2}$, que nous appellerons U et U′, passant en outre par S et son symétrique S′ par rapport à O, et dont, par suite, si V et V′ sont sur Oy les points $y = \pm l$, les tangentes en S et S′ sont respectivement VS et VS′ pour l'une, V′S et V′S′ pour l'autre.

De même, faisant $x = 0$ dans (2′), on voit que la section de l'enveloppe par le plan Oyz se compose des deux paraboles de sommets U et U′, et passant par T et T′ où les tangentes sont VT et VT′ pour l'une, V′T et V′T′ pour l'autre.

La surface offre donc en S et S′ d'une part, T et T′ de l'autre des points doubles où les tangentes sont situées sur des cônes du second degré admettant évidemment pour plans principaux ceux qui, passant par leurs sommets, sont communs à toutes les quadriques du système. On en déduit immédiatement que les cônes des tangentes en S et S′ sont coupés par le plan Oyz suivant l'ellipse dont les axes sont TT′ et VV′, et les cônes des tangentes en T et T′ par le plan Oxy suivant l'ellipse dont les axes sont SS′ et VV′.

4. Nous ferons encore la remarque que voici : chaque quadrique du système, d'équation (1), touche l'enveloppe de ce système suivant la courbe définie, en plus de cette équation, par sa dérivée relativement à ρ, c'est-à-dire par

$$\frac{x^2}{h^2} + 2(1+\rho)\frac{y^2}{l^2} + (1+2\rho)\frac{z^2}{k^2} = 1.$$

Or, l'élimination de $\frac{z^2}{k^2}$, d'une part, de $\frac{x^2}{h^2}$, de l'autre, entre cette dernière équation et (1) donne

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{l^2} = \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2}$$

et

$$\frac{y^2}{l^2} + \frac{z^2}{k^2} = \frac{1}{(1+\rho)^2},$$

ellipses homothétiques, par rapport au centre O, respectivement de celle de sommets S, S', V, V', d'une part, T, T', V, V', de l'autre, que nous venons de trouver comme définissant les cônes des tangentes aux points doubles T et T', d'une part, S et S', de l'autre.

D'ailleurs, on voit que les demi-axes de l'une sont égaux à OP_0 suivant Ox, TP suivant Oy, et ceux de l'autre, à OP_1 suivant Oz et PS suivant Oy.

Quant à la projection de la courbe de contact de la quadrique et de son enveloppe, sur le plan Oxz, elle est donnée par

$$\frac{z^2}{k^2} - \frac{x^2}{h^2} = \frac{1-\rho}{1+\rho},$$

hyperbole ayant pour asymptotes les traces, sur ce plan, des plans diamétraux cycliques, et qui se réduit à ce système de deux droites pour $\rho = 1$, c'est-à-dire pour le cas où l'ombilic P se confond avec le milieu M de ST.