NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 316-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__316_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2402.

(1919, p. 120; 1922, p. 40)

Si l'on joint un point d'une ellipse aux deux sommets situés sur un axe et le point diamétralement opposé aux deux sommets situés sur l'autre axe, les quatre droites ainsi obtenues et les axes de l'ellipse sont six tangentes d'une parabole.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. FAUCHEUX.

Tout d'abord, soient dans un cercle de centre O deux diamètres rectangulaires AA' et BB'; un autre diamètre PP'; soit F le point de la circonférence symétrique à la fois de P par rapport à BB' et de P' par rapport à AA'.

PA et PA' bissectrices de $\widehat{P'PF}$; P'B et P'B' bissectrices de $\widehat{PP'F}$, AA' et BB' bissectrices de $\widehat{P'OF}$ sont tangentes à la parabole de foyer F et de directrice PP'.

En projetant orthogonalement (1), on démontre une généralisation du théorème proposé, dans l'énoncé duquel on peut remplacer les sommets par les extrémités de deux diamètres conjugués quelconques; l'axe de la parabole a évidemment la direction conjuguée du diamètre de l'ellipse projection de PP'.

Autres solutions par l'AUTEUR et par MM. COLUCCI, H. DUMAS, HARMEGNIES, LEMAIRE, PARROD, PELVOISIN, G. ROY, SERBAN A. GHEORGHIN, PIEDVACHE, TULOUP.

2405.

(1919, p. 159; 1922, p. 40.)

L'équation

$$1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^m-(\beta x)^n=0,$$

α et β étant des quantités positives, a deux racines positives si

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}>(\alpha\beta)^{mn};$$

on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}}>\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}.$$

A. PELLET.

SOLUTION

Par M. JOSEPH DENAUX.

1. Il est commode d'effectuer le changement de variable

$$(\beta x)^n=t,$$

(1) Une projection conique conduira à un énoncé, plus général encore, que le lecteur obtiendra aisément.

qui conduit à l'équation

$$(\alpha\beta)^m = t^{\frac{m}{n}}(1-t)$$

dont les racines positives sont nécessairement comprises entre *zéro* et *un*. En élevant à la puissance n on obtient enfin

$$(\alpha\beta)^{mn} = t^m(1-t)^n.$$

Le second membre, nul pour $t=0$ et $t=1$, atteint son maximum pour

$$\frac{m}{t} = \frac{n}{1-t} = \frac{m+n}{1}.$$

et la valeur de ce maximum est donc

$$\mathrm{M} = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}};$$

il en résulte bien, pour l'équation proposée, deux racines positives dans le seul cas où

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} > (\alpha\beta)^{mn}.$$

2. Le maximum M de la fonction $t^m(1-t)^n$ est au moins égal à la valeur de cette fonction pour $t=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}$. C'est la limite inférieure indiquée dans l'énoncé

Pour obtenir la limite supérieure il suffit de rechercher le maximum de

$$\log t^m(1-t)^n = m\log t + n\log(1-t),$$

lorsque, t étant fixe, on fait varier m et n en maintenant leur produit constant. On a, pour ce maximum,

$$\frac{\log t}{n} = \frac{\log(1-t)}{m} = \frac{m\log t + n\log(1-t)}{2mn} = \frac{\log t(1-t)}{m+n},$$

d'où, quels que soient m, n, t (t compris entre o et 1), l'inégalité

$$\log t^m(1-t)^n \leqq \frac{2mn}{m+n}\log t(1-t),$$

et, *a fortiori*,

$$\leqq \frac{4mn}{m+n} \log \frac{1}{2};$$

M est donc bien au plus égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4mn}{m+n}}$.

Autre solution par M. M.-F. EGAN.

2421.

(1919, p. 360 ; 1922, p. 79.)

La courbe (M′) *se déduit de la courbe* (M) *par la construction suivante : le point* M′ *est à la rencontre de la perpendiculaire élevée en* M *au rayon vecteur* OM *et de la perpendiculaire menée de* O *à la tangente en* M *à la courbe* (M).

Construire le centre de courbure μ *de la courbe* (M), *connaissant la normale de la courbe* (M′).

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

La construction cherchée est la suivante :

La normale à (M′) *en* M′ *rencontre en* N *la perpendiculaire* ON *à* OM′, *la parallèle à* OM *menée par* N *rencontre* OM′ *en* K, KM′ *est le double du rayon de courbure de la courbe* (M) *en* M.

En effet si

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$$

est la tangente à (M) en M, (M′) aura pour équation

$$\begin{cases} x = \left(p + \dfrac{p'^2}{p}\right)\cos\varphi, \\ y = \left(p + \dfrac{p'^2}{p}\right)\sin\varphi, \end{cases}$$

on aura

$$\overline{\mathrm{ON}} = \left(p + \frac{p'^2}{p}\right)' = \frac{p'}{p}\left[2(p+p'') - \frac{p^2+p'^2}{p}\right],$$

d'où, H étant l'intersection de la tangente à (M) en M avec OM′,

r le rayon de courbure de (M) en M,

$$\frac{\overline{\mathrm{ON}}}{2r-\overline{\mathrm{OM}'}}=\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{OH}},\qquad \text{d'où}\qquad 2r=\mathrm{KM}'.$$

Autre solution par M. G. Roy.

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION PRÉCÉDENTE,
Par M. J. P.

Des considérations cinématiques très élémentaires peuvent conduire à la construction demandée.

Le centre instantané de l'angle droit OMM′ est immédiat et l'on en déduit, comme il est bien connu, que MM′ touche son enveloppe en M″, symétrique de M′ par rapport à M. La droite joignant M″ au centre de courbure cherché μ, coupe OM′ en un point P qu'il suffit de déterminer.

Soit pour cela une règle disposée à chaque instant suivant OM′, son extrémité étant en M′. Soit $\overrightarrow{W}$ la vitesse du point de la règle qui est en P; soient $\overrightarrow{V_M}$, $\overrightarrow{V_{M'}}$, $\overrightarrow{V_{M''}}$ les vitesses des points M, M′, M″. On a (PM′ étant parallèle à μM et de longueur double)

$$\overrightarrow{V_{M'}}-\overrightarrow{W}=2\overrightarrow{V_M}$$

et (M étant le milieu de M′M″)

$$\overrightarrow{V_{M'}}+\overrightarrow{V_{M''}}=2\overrightarrow{V_M}.$$

Donc $\overrightarrow{W}$ égale $-\overrightarrow{W_{M''}}$ et est un vecteur parallèle à MM′. Le point P s'obtient par suite en menant par N (centre instantané de la règle) la parallèle à OM : c'est le point K de M. Bouvaist et la droite KM″ coupe la normale à (M) au point μ cherché.