J. LARRAS

La construction du centre de courbure des coniques d'après Mannheim démontrée par le théorème de Pascal

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 338-339

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__338_1>

[L^1 6a]

LA CONSTRUCTION DU CENTRE DE COURBURE DES CONIQUES D'APRÈS MANNHEIM DÉMONTRÉE PAR LE THÉORÈME DE PASCAL;

Par M. J. LARRAS,

Soient une conique C, de centre O, les points X et Y à l'infini sur ses axes, un point M de la conique, et la normale en ce point. D'un point m du plan, on peut mener quatre normales à cette conique : l'hyperbole équilatère H, passant par les pieds de ces normales, admet pour directions asymptotiques les axes de la conique donnée; de plus, elle passe par le centre de cette conique et le point m (hyperbole d'Apollonius).

Inversement, les points communs à l'hyperbole d'Apollonius — supposée connue — et à C définissent les pieds des normales à la conique issues de m. Si le point m est le centre de courbure de la conique C, répondant à M, deux des normales se confondent en mM, et les coniques C et H, ayant deux points communs confondus, M et M_1, sont tangentes en M.

Ainsi l'hexagone MM_1OXYmM est inscrit à l'hyperbole d'Apollonius qui correspond au point m et à la conique C. Soit Δ la droite sur laquelle — d'après le théorème de Pascal — se coupent deux à deux les côtés opposés de cet hexagone. Si l'on désigne par N le point où la normale en M à la conique coupe l'axe OX ([1]), Δ est la perpendiculaire, élevée en N, à cette normale.

Le point N appartient, en effet, à Δ comme point de rencontre de deux côtés opposés de l'hexagone, OX et mM. En outre, C et H étant tangentes en M, la droite MM_1 est la perpendiculaire, élevée en M, à la normale Mm. Son point à l'infini appartient à Δ, puisque situé sur la droite de l'infini XY, côté opposé à MM_1 dans l'hexagone envisagé. Ainsi Δ est parallèle à MM_1 et, comme Δ passe par N, c'est bien la droite annoncée.

La droite Δ coupe le diamètre OM de la conique en un point I tel que Im passe par le point Y — mY et OM étant côtés opposés de l'hexagone considéré. Donc Im, parallèle à OY, est perpendiculaire à OX.

D'où la construction de Mannheim :

Si la normale en M à la conique C — de centre O — coupe, au point N, un axe de cette conique, et si la perpendiculaire élevée en N à cette normale coupe, en I, le diamètre OM, la perpendiculaire, abaissée de I sur l'axe donné, passe par le centre de courbure m répondant à M.

([1]) OX ne représente pas forcément le grand axe.