NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HENRI LEBESGUE

Sur les cercles focaux

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 340-350

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__340_0>

[L¹7]

SUR LES CERCLES FOCAUX;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. Je rappelle, par quelques mots, la théorie analytique des cercles focaux (ou bitangents) à une conique. Si $C = 0$ est un tel cercle pour la conique S, on a

$$S = C + \lambda D^2 = 0,$$

$D = 0$ étant l'équation de la corde des contacts, ou, comme on dit, de la directrice. Mais on a

$$S = [C - 2\lambda h(D + h)] + \lambda(D + h)^2 = 0,$$

quelle que soit la constante h; ceci fait apparaître une série de cercles focaux, les cercles

$$\Gamma = C - 2\lambda h(D + h) = 0,$$

ayant évidemment leurs centres sur l'un des axes de la conique.

Si d'ailleurs on trouve un cercle Γ ayant son centre sur la directrice $D + h = 0$ correspondante, auquel cas on peut supposer $\Gamma \equiv x^2 + y^2 - R^2$, $D + h \equiv x$, on a

$$S = (x^2 + y^2 - R^2) + \lambda x^2 = (\lambda + 1)\left[x^2 + y^2 - \frac{R^2}{\lambda + 1}\right] - \lambda y^2,$$

ce qui met en évidence un nouveau cercle focal

$$x^2 + y^2 - \frac{R^2}{\lambda + 1} = 0;$$

d'où une nouvelle série de cercles focaux.

Cette étude est très rapide, très simple et c'est assurément la plus instructive; pourtant il peut y avoir intérêt à faire effectuer géométriquement, à titre d'exercice, la recherche des cercles focaux. Ceux de la première série, c'est-à-dire ceux dont les centres sont situés sur l'axe focal, s'obtiennent comme on sait par la méthode de Dandelin; on peut aussi les obtenir, à partir des foyers qui sont des cercles focaux particuliers, en traduisant géométriquement ce qui est dit plus haut.

On aura ensuite la seconde série, toujours en interprétant géométriquement les calculs précédents. Cette méthode, qui est excellente, est clairement indiquée dans la géométrie élémentaire de M. Hadamard (*voir* surtout, Exercices 840 à 845, t. II). Voici un procédé plus artificiel, mais qui permet de traiter de la même façon les deux séries de cercles focaux, autant du moins que cela est possible en géométrie élémentaire où la définition même des coniques distingue entre les axes. Il a aussi cet intérêt de faire appel à une propriété capitale des normales aux coniques, trop peu utilisée en géométrie pure.

2. Il est indispensable de dire quelques mots des cercles imaginaires; je le ferai en distinguant cercle et circonférence. Laissant au mot circonférence son sens géométrique, appelons puissance d'un point A par rapport à un cercle O de grandeur K, la quantité

$$\overline{AO}^2 - K.$$

Les poiuts du cercle, s'ils existent, sont, par définition, les points pour lesquels cette puissance est nulle; cela n'arrive que pour $K > 0$ et les points forment alors la circonférence de rayon $\sqrt{K}$.

Si l'on appelle P_1 et P_2 les puissances d'un point M par rapport à deux cercles (O_1, K_1), (O_2, K_2), on a

$$P_1 - P_2 = \overline{MO}_1^2 - \overline{MO}_2^2 - K_1 + K_2 = 2\,\overline{O_1O_2}.\overline{IM_1} - K_1 + K_2,$$

I étant le milieu de O_1O_2, M_1 la projection de M sur O_1O_2, et $\overline{O_1O_2}$, $\overline{IM_1}$ étant les mesures de deux vecteurs dirigés.

Le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux cercles est donc une perpendiculaire à la ligne des centres, c'est l'axe radical.

Si m est la projection de M sur l'axe radical, l'égalité précédente appliquée à m donne

$$o = 2\,\overline{O_1O_2}.\overline{Im_1} - K_1 + K_2,$$

et, par soustraction,

$$(1) \qquad P_1 - P_2 = 2\,\overline{O_1O_2}.\overline{mM}.$$

Cette égalité est fondamentale en géométrie élémentaire, c'est elle qui permet la traduction des calculs du paragraphe 1 en démonstration géométrique, comme il a été indiqué à la fin de ce même paragraphe.

On dit que des cercles forment un faisceau s'ils ont deux à deux même axe radical. Si une circonférence C et deux cercles C_1, C_2, de centres O, O_1, O_2, font partie d'un même faisceau et si P_1 et P_2 sont les puissances d'un point de C par rapport à C_1 et C_2, on a

$$(2) \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}.$$

En effet, si M est un point de C, m sa projection sur l'axe radical, l'égalité (1) appliquée d'abord à C_1 et C, ensuite à C_2 et C, donne pour le point M

$$P_1 = 2\,\overline{O_1O}.\overline{mM}, \qquad P_2 = 2\,\overline{O_2O}.\overline{mM};$$

en divisant membre à membre on a la relation (2).

Réciproquement, le lieu des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles C_1, C_2 a une valeur donnée est, s'il existe, une circonférence du faisceau C_1; C_2.

Deux cercles sont dits orthogonaux si l'on a entre leurs grandeurs K_1 et K_2 et la distance d de leurs centres, la relation $d^2 = K_1 + K_2$; de là découle la généralisation des propriétés des circonférences orthogonales.

3. Propriété des coniques a centre. — *La normale* MNn *et la tangente* MTt *en un point* M *d'une conique de centre* O *coupent les axes de cette conique en des points* N, T; n, t *tels que l'on ait*

$$\alpha.\overline{MN} = \beta.\overline{Mn}; \qquad \overline{ON}.\overline{OT} = -\overline{On}.\overline{Ot} = \alpha - \beta = \gamma;$$

α *et* β *étant les carrés des demi-axes portés respectivement par* ONT *et* Ont. C'est-à-dire les quantités a^2 et b^2 pour l'ellipse, a^2 et $-b^2$ pour l'hyperbole.

Il est clair que la propriété ne distingue pas entre les axes; pour la démontrer supposons que ONT soit l'axe focal. MTt et MNn étant alors les bissectrices de FMF', les points t et n sont diamétralement opposés sur la circonférence circonscrite à FMF' (*fig.* 1). S'il s'agit d'une ellipse n et M sont de part et d'autre de FF', sinon ils sont du même côté; le rapport $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{Mn}}$ est donc positif pour l'ellipse, négatif pour l'hyperbole et il suffit de calculer sa valeur absolue.

La similitude des triangles F'MN, nMF, nFN donne

$$MN.Mn = MF.MF', \qquad MN.Nn = NF.NF',$$

d'où

$$\frac{Mn}{Nn} = \frac{MF}{NF}\,\frac{MF'}{NF'}.$$

Mais, d'après la propriété fondamentale de la bissectrice, les deux rapports du second membre sont égaux, donc

$$\text{(ellipse)} \qquad \frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{N}n} = \left(\frac{\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'}{\mathrm{NF}+\mathrm{NF}'}\right)^2 = \frac{4a^2}{4c^2};$$

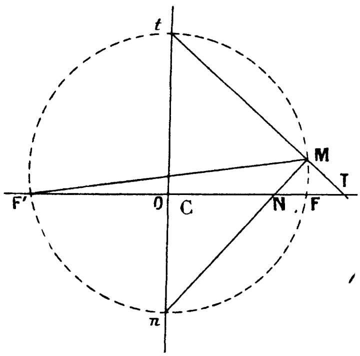
$$\text{(hyperbole)} \qquad \frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{N}n} = \left(\frac{\mathrm{MF}-\mathrm{MF}'}{\mathrm{NF}-\mathrm{NF}'}\right)^2 = \frac{4a^2}{4c^2};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{M}n}{\overline{\mathrm{MN}}} = \frac{\mathrm{M}n}{\mathrm{M}n-\mathrm{N}n} = \frac{a^2}{a^2-c^2} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Si, d'autre part, on remarque que OtT, ONn sont

Fig. 1.



semblables et que N et T sont conjuguées harmoniques par rapport à F et F', on a

$$-\overline{\mathrm{O}n}.\overline{\mathrm{O}t} = \overline{\mathrm{ON}}.\overline{\mathrm{OT}} = -\overline{\mathrm{OF}}.\overline{\mathrm{OF}'} = c^2 = \gamma.$$

Le théorème étant ainsi démontré ; notons de plus, pour la suite, que si C est sur ONT, il a pour puissance par rapport aux circonférences nMt

$$(3) \qquad \overline{\mathrm{OC}}^2 + \overline{\mathrm{O}n}.\overline{\mathrm{O}t} = \overline{\mathrm{OC}}^2 - \gamma,$$

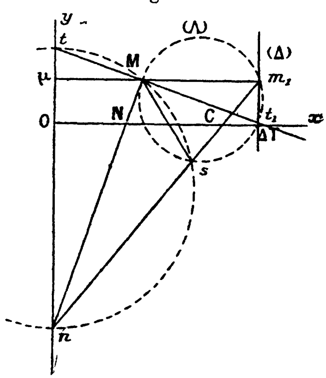
que ONT soit axe focal, ou non.

4. Construction des cercles focaux et des directrices. — *Étant donnés une conique à centre* (Γ) *déterminée par des axes* Ox Oy, *un point* M *de la courbe et sa normale* MNn, *je me propose d'attacher à chaque point* C *de l'un quelconque* Ox *des axes : a, une directrice* (Δ) *perpendiculaire à* Ox; *b, un cercle* (C) *de centre* C, *et cela de façon que, c, entre la puissance* P *d'un point quelconque de* (Γ) *par rapport à* (C) *et sa distance* D *à* (Δ) *on ait la relation*

$$\alpha P - \gamma D^2 = 0. \tag{4}$$

a. Joignons nC (*fig*. 2), qui coupe en m_1 la parallèle à Ox menée par M. Je choisis (Δ) passant par m_1.

Fig. 2.



Pour que cela soit légitime, il faut tout d'abord que (Δ) ne dépende pas du choix fait sur (Γ) d'un point M particulier. Or, appelons μ la projection de M sur Oy, on a

$$\frac{\overline{O\Delta}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{\mu m_1}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{\mu M}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{Mn}}{\overline{Nn}} = \frac{\alpha}{\gamma}; \tag{5}$$

(Δ) ne dépend donc pas du choix de M.

b. Soit t_1 le point où la tangente en M coupe (Δ) et soit (Λ) la circonférence circonscrite à $\mathrm{M}m_1t_1$. Je choisis (C) orthogonale à (Λ).

Pour que cela soit légitime, il faut tout d'abord que C ait même puissance par rapport à toutes les circonférences (Λ). Or, soit s le point de rencontre de $n\mathrm{C}m_1$ avec la circonférence circonscrite à $\mathrm{M}nt$, on a

$$\widehat{\mathrm{M}sm_1} = \widehat{\mathrm{M}tn} = \widehat{\mathrm{M}t_1m_1},$$

donc s est sur (Λ) et la puissance G de C par rapport à (Λ) est $\mathrm{G} = \overline{\mathrm{C}s}.\overline{\mathrm{C}m_1}$. Mais, le produit $\overline{\mathrm{C}s}\,\overline{\mathrm{C}n}$ étant, d'après (3), constant et égal à $\overline{\mathrm{OC}}^2 - \gamma$, le lieu de s, pour M variable, est une circonférence dont le diamètre dirigé porté par $\mathrm{O}x$ est $\dfrac{\overline{\mathrm{OC}}^2-\gamma}{\overline{\mathrm{CO}}}$, et par suite G est la puissance de l'inversion qui transforme cette circonférence en (Δ); savoir

$$\mathrm{G} = \frac{\overline{\mathrm{CO}}^2-\gamma}{\overline{\mathrm{CO}}}.\overline{\mathrm{C}\Delta} = -\frac{\beta}{\gamma}\left(\overline{\mathrm{OC}}^2-\gamma\right).$$

c. Reste à vérifier la propriété $\alpha\mathrm{P} - \gamma\mathrm{D}^2 = 0$; pour le seul point M, puisque le choix de (Δ) et de (C) est indépendant de celui de M.

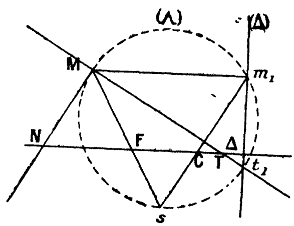
$\mathrm{M}n$, perpendiculaire au diamètre $\mathrm{M}t_1$ de (Λ), est tangente à (Λ); donc $\overline{n\mathrm{M}}^2 = \overline{ns}.\overline{nm_1}$; or, ceci exprime que le faisceau des cercles déterminé par les deux circonférences (s) et (m_1), de centres s et m_1 et de rayons nuls, contient la circonférence de centre n et passant par M. Ce faisceau contient aussi (C); appliquons donc la relation (2) au point M et aux cercles (m_1)

et (C), nous avons

$$\frac{\mathrm{P}}{\overline{\mathrm{M}m_1}^2} = \frac{\overline{n\mathrm{C}}}{\overline{nm_1}} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

5. Le cas de la parabole se traite sans difficulté. Les lettres conservant la même signification que dans le numéro précédent, et F étant le foyer de la parabole (Γ); nous construisons (Δ) et (C) par des procédés se déduisant par un passage à la limite de ceux que nous venons d'utiliser (*fig.* 3). Donc $\mathrm{C}m_1$ est maintenant parallèle

Fig. 3.



à MN, par suite $\overline{\mathrm{C}\Delta}$ est égal à la sous-normale, c'est p.

s est maintenant à l'intersection de $\mathrm{C}m_1$ et de MF et la grandeur G de (C) est $\mathrm{G} = \overline{\mathrm{C}s}.\overline{\mathrm{C}m_1}$. Mais la normale MN faisant des angles égaux avec le rayon vecteur FM et l'axe FN, les triangles MFN, sFC sont isoscèles et, quand M décrit (Γ), s décrit la circonférence de centre F et qui passe par C. Donc G est la puissance de l''inversion transformant cette circonférence en (Δ), c'est

$$\mathrm{G} = 2\overline{\mathrm{CF}}.\overline{\mathrm{C}\Delta} = 2p.\overline{\mathrm{CF}}.$$

Ainsi (Δ) et (C) sont bien indépendants du choix de M. Mais $m_1 \mathrm{M}s$ étant isoscèle, M est sur l'axe radical du faisceau (s), (m_1) qui contient (C), donc la relation (4) devient ici

$$P = \overline{Mm_1}^2 = D^2.$$

6. La propriété démontrée admet une réciproque : *Le lieu des points* M *dont la puissance* P *par rapport à un cercle* (C) *est liée à la distance* D *à une droite* (Δ) *par la relation* $P = K.D^2$ *est une conique* (Γ); (C) *et* (Δ) *sont deux des éléments focaux associés à* (Γ) *comme il a été dit ci-dessus.*

Nous supposons essentiellement que le lieu existe; soit M l'un de ses points. Admettant pour un instant la réciproque, construisons m_1 par la parallèle Mm_1 à Ox, puis s tel que $\overline{Cs}.\overline{Cm_1} = \rho$, puis (Λ) circonscrit à Mm_1s, d'où t_1 sur (Λ) et sur (Δ), d'où Mt_1, d'où la perpendiculaire Mn qui coupe m_1C en n. De n on déduit Oy.

Or, il est clair que la conique (Γ) d'axes Ox, Oy qui passe par M et y admet Mn pour normale admet (C) et (Δ) pour éléments focaux associés. Si n était à l'infini, la conclusion serait analogue, mais (Γ) serait une parabole. M faisant partie de (Γ) et du lieu, la relation $P = K'D^2$, relative à (Γ), est d'ailleurs bien celle qui nous est donnée; $K' = K$.

Il reste seulement à prouver que (Γ) constitue tout le lieu et pour cela il suffira de montrer que, sur toute droite issue de M, il n'y a qu'un autre point du lieu. Or, soit A le point de rencontre de la droite et de (Δ) et M' un point du lieu situé par cette droite; on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{KD^2}{KD'^2} = \frac{D^2}{D'^2} = \frac{\overline{MA}^2}{\overline{M'A}^2}.$$

Mais, d'après (2), ceci exprime que M et M' appartiennent à la même circonférence du faisceau déterminé par (C) et le cercle (A) réduit au point A. M' est donc unique.

Quant à la situation respective de (C) et (Γ), quand (C) est une circonférence, elle résulte de suite soit de la construction, soit de la relation $P = KD^2$. Si, en effet, M est un point commun à deux des trois courbes (Γ), (C), (Δ), les points m_1 et s sont aussi en M; donc M appartient aux trois courbes, de plus (Γ) et (C) sont tangentes en ce point.

On pourrait aussi dire : la relation montre que tout point commun à deux des trois courbes précitées appartient à la troisième; (Γ) est d'ailleurs située tout entière dans la même région par rapport à (C), puisque P a le signe de K pour tout point de (Γ).

7. Bien que les considérations précédentes fournissent très simplement les principales propriétés des cercles focaux, je n'en parlerai pas ici; je me contente de caractériser les familles de cercles focaux des coniques à centre.

Pour cela, modifiant dans des rapports constants la grandeur G de (C), associons à tout point C deux nouveaux cercles $(C)_1$, $(C)_2$, de grandeurs G_1 et G_2,

$$G = -\frac{\beta}{\gamma}\left(\overline{OC}^2 - \gamma\right); \qquad G_1 = \overline{OC}^2 - \gamma; \qquad G_2' = \gamma - \overline{OC}^2.$$

De même, chaque point c de Oy sera centre de trois cercles (c), $(c)_1$, $(c)_2$ de grandeurs

$$g = \frac{\alpha}{\gamma}\left(\overline{Oc}^2 + \gamma\right); \qquad g_1 = \left(\overline{Oc}^2 + \gamma\right); \qquad g_2 = -\overline{Oc}^2 - \gamma.$$

Si l est la distance de deux points C et c, on a

$$l^2 = \overline{OC}^2 + \overline{Oc}^2 = G_1 + g_1 = G_1 - g_2 = g_1 - G_2.$$

Donc les cercles $(C)_1$ *et* $(c)_1$ *forment deux fais-*

ceaux orthogonaux ; l'un d'eux comprend les cercles réduits aux foyers.

Les circonférences $(C)_1$ [*ou* $(c)_1$] *coupent les circonférences* $(c)_2$ [*ou* $(C)_2$] *en deux points diamétralement opposés.*

Les quatre systèmes $(C)_1$, $(c)_1$, $(C)_2$, $(c)_2$ sont ainsi définis, et par suite les (C) et (c) sont caractérisés de deux façons différentes, mais il n'y a lieu de s'arrêter qu'aux relations entre circonférences réelles. Cela conduit à dire :

Les circonférences focales de la première série sont : pour l'ellipse, celles que l'on obtient en modifiant dans le rapport $\frac{b}{c}$ *le rayon de celles qui sont coupées en deux points diamétralement opposés par toutes les circonférences passant par les foyers; pour l'hyperbole, celles que l'on obtient en modifiant dans le rapport* $\frac{b}{c}$ *le rayon des circonférences du faisceau défini par les foyers.*

Les circonférences de la deuxième série sont celles qu'on obtient en modifiant dans le rapport $\frac{a}{c}$ *le rayon des circonférences passant par les foyers; si c est le centre d'une telle circonférence, le diamètre perpendiculaire à Fc est vu du foyer F sous l'angle* 2φ,

$$\tang\varphi = \frac{a}{c}.$$

Pour l'hyperbole, on peut encore dire que ce sont les circonférences vues des foyers sous l'angle 2ψ,

$$\sin\psi = \frac{a}{c}.$$