NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur un problème de choc avec frottement

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 351-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__351_0>

[R9b]

SUR UN PROBLÈME DE CHOC AVEC FROTTEMENT;

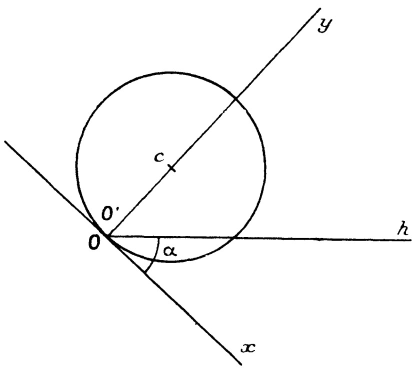
PAR M. H. V.

Dans un récent article (*Nouvelles Annales*, avril 1923, p. 259), M. J. Soula a eu le grand mérite d'attirer l'attention sur certaines difficultés qui se présentent dans les problèmes de choc avec frottement au contact; il a fort judicieusement montré la nécessité de distinguer plusieurs cas dans le traitement de ces problèmes. Je voudrais indiquer ici en quelques mots, qu'on peut, il me semble, simplifier et en même temps compléter ces élégants résultats, et donner, quelles que soient les circonstances, une solution acceptable de la question, en adoptant les principes habituellement mis en usage en Mécanique.

Je reprends l'exemple même du disque homogène pesant qui tombe verticalement, avec une vitesse verticale de translation V_0, sur un clou horizontal O; on suppose la vitesse de rotation du disque autour de son centre, égale à zéro. Je traiterai le cas général, où le coefficient de restitution au contact est égal à e ($0 \leqq e \leqq 1$), les valeurs extrêmes 0 et 1 correspondant aux cas extrêmes des corps mous ou des corps parfaitement élastiques. Il suffira de faire $e = 0$ dans les formules ci-dessous pour se trouver dans le cas du problème de M. Soula.

Soient t_0 et t_1 les instants où commence et où finit le choc, R le rayon du disque, O′ le point du disque qui vient en contact avec le clou, x'_0, y'_0 les projections de la vitesse du centre du disque immédiatement avant le choc ($x'_0 = V_0 \sin\alpha$, $y'_0 = - V_0 \cos\alpha$), x'_1, y'_1 les projections de cette vitesse immédiatement après le choc, ω_1 la vitesse angulaire de rotation du disque à ce même instant (les axes Ox, Oy sont ceux de la figure ci-dessous).

La vitesse tangentielle V_x, suivant Ox, du point O′ est d'abord égale à $V_0 \sin\alpha$, cela veut dire que, au



début, le disque a tendance à glisser sur la surface du clou dans le sens Ox. Le frottement aura pour effet de diminuer cette vitesse tangentielle de glissement. Cela est à peu près évident *a priori*, et cela peut se mettre en évidence par le calcul suivant :

Isolons pendant la durée du choc un petit intervalle de temps $t_2 t_3$ $(t_0 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_1)$ pendant lequel la vitesse V_x ne change pas de signe et appelons p_t la valeur absolue de la portion de la percussion tangentielle qui correspond à cet intervalle. Les équations des quantités de mouvement sur Ox, et des moments autour de C donnent (les notations s'expliquent d'ellesmêmes)

$$m(x'_3 - x'_2) = \varepsilon p_t.$$

$$m\frac{R^2}{2}(\omega_3 - \omega_2) = \varepsilon R p_t,$$

avec $\varepsilon = \mp 1$, suivant que la vitesse de O′, comptée sur Ox, est restée positive ou négative. De là on tire

$$m[(x'_3 + R\omega_3) - (x'_2 + R\omega_2)] = 3\varepsilon p_t.$$

D'où cette conclusion, que la vitesse V_x du point O′ diminue en valeur absolue. Donc cette vitesse, qui part d'une valeur positive, va commencer par décroître, et deux hypothèses seulement sont possibles :

Ou bien la vitesse V_x diminuera, tout en restant positive, de l'instant t_0 à l'instant t_1, sans s'annuler dans cet intervalle, sinon peut-être à l'instant t_1 ; ou bien V_x diminuera jusqu'à zéro, valeur qu'elle atteindra avant l'instant t_1, et alors elle restera nulle jusqu'à ce dernier instant [1].

Dans le premier cas, il est naturel d'admettre que la percussion aura (comme la réaction) deux composantes P_n et P_t dirigées vers le haut, et satisfaisant à la relation $P_t = fP_n$, en désignant par f le coefficient de frottement pendant le choc.

Dans le second cas, le choc se décomposera en deux phases, pendant une seule desquelles la réaction sera assujettie a la condition angulaire précédente ; donc il n'y aura plus aucune raison pour que les composantes P_t et P_n de la percussion globale satisfassent à la condition ci-dessus, tout au plus devra-t-on exiger que $P_t < fP_n$.

Mettons le problème en équations dans les deux cas.

---

[1] M. Thiry nous communique qu'il avait aussi obtenu ce résultat, par la même méthode.

Premier cas. — On a alors les formules, du reste classiques,

$$m(x'_1 - x'_0) = -fP_n,$$
$$m(y'_1 - y'_0) = P_n, \qquad y'_1 = -ey'_0;$$
$$mR\omega_1 = -2fP_n,$$

dont la dernière exprime la définition du coefficient de restitution. On en conclut de suite

$$x'_1 = V_0[\sin\alpha - f(1+e)\cos\alpha],$$
$$y'_1 = eV_0\cos\alpha,$$
$$\omega_1 = -\frac{2fV_0(1+e)\cos\alpha}{R},$$
$$P_n = mV_0(1+e)\cos\alpha, \quad (P_n \text{ est naturellement positif}).$$

A la fin du choc, la vitesse tangentielle du point O′ est

$$(V_x)_1 = x'_1 + R\omega_1 = V_0[\sin\alpha - 3f(1+e)\cos\alpha].$$

Puisque nous sommes dans le premier cas, c'est que cette vitesse est positive ou nulle; les formules précédentes sont donc seulement valables si l'on a l'inégalité

$$\operatorname{tang}\alpha \geqq 3f(1+e).$$

Deuxième cas. — Si cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, c'est alors que nous sommes dans la nécessité d'adopter la seconde hypothèse ci-dessus; alors les équations ordinaires (des quantités de mouvement et des moments autour de C), donnent

$$m(x'_1 - x'_0) = -P_t,$$
$$m(y'_1 - y'_0) = P_n,$$
$$mR\omega_1 = -2P_t.$$

Il faut joindre à ces trois relations les suivantes :

$$y'_1 = -ey'_0,$$
$$x'_1 + R\omega_1 = 0,$$

dont la première a la même origine que plus haut, et dont la seconde exprime que la vitesse tangentielle de O' est nulle à la fin du choc. On en conclut sans peine

$$x'_1 = \frac{2}{3} V_0 \sin\alpha,$$

$$y'_1 = e V_0 \cos\alpha, \qquad P_t = \frac{m V_0 \sin\alpha}{3},$$

$$\omega_1 = -\frac{2}{3} V_0 \frac{\sin\alpha}{R}, \qquad P_n = m V_0 (1 + e) \cos\alpha,$$

et l'on constate qu'on a bien $P_t < f P_n$, car cette inégalité revient à

$$\tan\alpha < 3f(1 + e).$$

On pourrait évidemment, dans le cas actuel, décomposer le calcul en deux stades, correspondant chacun aux deux phases du choc : la première phase pendant que la vitesse V_x n'est pas nulle, et la seconde pendant qu'elle reste nulle. En appliquant deux fois les équations habituelles, et éliminant les résultats intermédiaires relatifs à l'instant de passage de la première à la deuxième phase, on retombe sur les formules écrites plus haut.

Le problème est donc susceptible dans tous les cas d'une solution (et d'une seule) en admettant les principes habituels de la Mécanique classique. Naturellement il ne faut pas se faire d'illusions sur la valeur pratique des résultats, car ceux-ci se fondent sur l'application de deux sortes d'expériences préalables sans rigueur absolue; d'abord le coefficient e n'est connu expérimentalement qu'avec une approximation faible; d'autre part, les expériences de frottement sont faites en général dans des circonstances où les forces en jeu sont de grandeur moyenne (comparables aux forces de pesanteur); on applique ici les règles ainsi obtenues, dans un cas où les forces en jeu deviennent très grandes. Il est d'ailleurs probable que l'on peut tenir compte de cette différence, en remplaçant le coefficient de frottement usuel, par un coefficient un peu plus grand (*cf.* les expériences de G. Rennie). Ajoutons encore que certaines des expériences classiques de Morin concernent des phénomènes de frottement avec choc, et que même dans ces expériences Morin a trouvé les résultats en accord avec ses formules.

Quoi qu'il en soit, on peut conserver les résultats des calculs ci-dessus, à titre de première indication.

Une fois connu, dans chaque cas, l'état des vitesses immédiatement après le choc, le mouvement ultérieur est facile à déterminer. Si $e \neq 0$, le disque quitte le clou immédiatement après. Si $e = 0$, une discussion est nécessaire, on doit, comme on sait, étudier successivement le mouvement libre et le mouvement lié, et l'on constate qu'un de ces deux mouvements est toujours possible à l'exclusion de l'autre. Indiquons seulement les résultats du calcul :

Pour $\tan\alpha \geqq 3f$, le mouvement libre est celui qui convient immédiatement après le choc, si l'on a

$$V_0^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2 - gR\cos\alpha \geqq 0,$$

sinon, c'est le mouvement lié qui convient.

Pour $\tan\alpha < 3f$, le mouvement libre convient si

$$\frac{4}{9}V_0^2\sin^2\alpha - gR\cos\alpha \geqq 0,$$

sinon, il faut prendre le mouvement lié.

Le mouvement lié est, dans le premier cas,

$$\tan\alpha > 3f,$$

tout au moins au début, un mouvement avec glissement au contact. Dans le second cas, ($\tang \alpha < 3f$), il y aura glissement au contact si

$$\frac{\sin \alpha}{3} - f \cos \alpha + 4f \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{9gR} > 0,$$

et roulement si cette inégalité est inversée. Dans le cas limite où cette inégalité devient une égalité, le glissement seul est acceptable.