Nouvelles annales de mathématiques

Hadamard

Sur les points doubles des lieux géométriques et sur la construction par régions

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 364-379

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__364_0>

[M¹1h]

SUR LES POINTS DOUBLES DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET SUR LA CONSTRUCTION PAR RÉGIONS;

PAR M. HADAMARD.

1. Soient

$$f(x, y, u) = 0, \tag{1}$$

$$f_1(x, y, u) = 0, \tag{1'}$$

les équations des deux courbes planes C, C_1 dépendant d'un même paramètre variable u. Le lieu L décrit par les points communs à ces deux courbes, lorsque u varie, s'obtient en éliminant u entre les deux équations précédentes.

Nous supposerons d'ailleurs ces équations algébriques et entières.

Peut-on trouver, en opérant directement sur les équations (1), (1'), les points doubles de la ligne L?

C'est ce que donne aisément une méthode connue, si je ne me trompe, depuis Hermite et qui repose sur la méthode d'élimination par les fonctions symétriques. Soient, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les racines de l'équation (1), supposée de degré p en u : le résultat de l'élimination de u entre nos deux équations, c'est-à-dire l'équation du lieu cherché, est

$$L(x, y) = 0$$

avec

$$L(x, y) \equiv f_1(x, y, u_1) f_1(x, y, u_2) \ldots f_1(x, y, u_p). \tag{2}$$

Un point (x_0, y_0) de L — pour lequel, par conséquent, les équations (1), (1') admettront une racine commune u_1 — sera double s'il satisfait, en outre, aux deux relations

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Or $\frac{\partial L}{\partial x}$, par exemple, peut se calculer d'après l'expression (2) de L, si du moins le théorème des fonctions implicites s'applique à la différentiation de la fonction $u_1(x, y)$, ce que nous supposerons tout d'abord. On aurait, en thèse générale, p termes, puisque u est un produit de p facteurs; mais ici un seul terme est différent de zéro. celui qu'on obtient en faisant porter la différentiation sur le premier facteur. Donc, on doit avoir

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) f_1(x, y, u_2) f_1(x, y, u_3) \ldots f_1(x, y, u_p) = 0$$

et, de même,

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) f_1(x, y, u_2) \ldots f_1(x, y, u_p) = 0.$$

On voit que ceci peut se produire de deux manières :

1° Ou bien

$$(3) \qquad f_1(x, y, u_2) f_1(x, y, u_3) \ldots f_1(x, y, u_p) = 0,$$

c'est-à-dire que *les équations* (1), (1′) *ont au moins* DEUX *racines communes.*

2° Ou bien on a, à la fois,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0.$$

Si l'on tient compte des valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, telles qu'on les tire de l'équation (1), on voit que *la condition pour qu'il en soit ainsi est donnée par la double* *proportion* [1] (dans laquelle nous avons supprimé à la lettre u l'indice 1 devenu inutile)

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right) : \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right);$$

laquelle doit être vérifiée en même temps que (1) et (1′).

Le cas où le théorème des fonctions implicites serait inapplicable à l'équation (1) ne change rien aux conclusions précédentes. C'est, comme on sait, celui où $\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$, c'est-à-dire où ($x$ étant remplacé par x_0 et y par y_0) u_1 est racine double de (1). Si, pour l'équation (1′), u_1 est racine simple, on pourra recommencer les raisonnements précédents en intervertissant les rôles des polynomes f, f_1. Dans le cas contraire, les équations données ont deux racines communes égales entre elles, ce qui est un cas particulier de notre hypothèse 1° [équation (3) avec $u_2 = u_1$].

2. Ce qui précède apparaît d'ailleurs immédiatement au point de vue géométrique, en considérant u comme une troisième coordonnée cartésienne. (1) et (1′) représentent alors deux surfaces et L est la projection de leur intersection sur le plan des xy. Cette projection peut effectivement, comme on le sait, avoir deux sortes de points doubles : points doubles « apparents » (ou « par projection ») et points doubles véritables dans l'espace. La première catégorie correspond à la rela-

(1) En coordonnées homogenes, on aurait un quatrième rapport $\frac{\partial f_1}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial z}$ égal à la valeur commune des trois premiers; les équations (4) ainsi modifiées permettront, comme il est connu, de traiter le cas des points à l'infini.

tion (3), la seconde aux relations (4) [puisqu'alors les deux surfaces (1), (1') sont tangentes entre elles].

3. Je prendrai comme exemple d'un calcul de cette espèce le problème suivant, proposé autrefois en Mathématiques spéciales :

Lieu des points communs à deux coniques C, C_1 *qui varient en restant constamment semblables entre elles, chacune d'elles ayant, d'autre part, ses foyers fixes.*

Si la conique C était rapportée à ses axes, les demi-longueurs de ceux-ci étant $c\sqrt{u}$ et $c\sqrt{u-1}$, son équation serait

$$\frac{X^2}{u} + \frac{Y^2}{u-1} - c^2 = 0. \tag{5}$$

Cette même équation représentera la conique rapportée à deux axes rectangulaires donnés d'une manière quelconque, si l'on pose

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta - p, \qquad Y = x\sin\theta + y\cos\theta - q, \tag{6}$$

où θ, p, q sont trois constantes données. De même l'équation de la seconde conique pourra s'écrire

$$\frac{X_1^2}{u} + \frac{Y_1^2}{u-1} - c_1^2 = 0 \tag{5'}$$

[u étant le même que dans l'équation (5), de manière à exprimer la similitude des deux courbes], avec

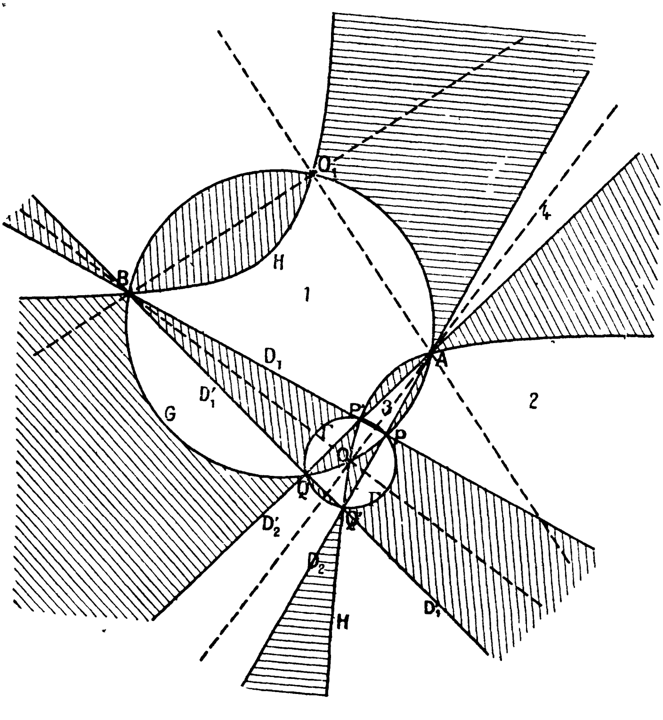
$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= x\cos\theta_1 - y\sin\theta_1 - p_1, \\ Y_1 &= x\sin\theta_1 + y\cos\theta_1 - q_1. \end{aligned}\right. \tag{6'}$$

L'élimination de u entre (5) et (5') pourrait s'effectuer en rendant entier. Mais on peut aussi résoudre par rapport à $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u-1}$ et exprimer que la différence des inverses des quantités ainsi obtenues est 1. Il vient ainsi

$$(7)\qquad \begin{aligned}&(X^2 Y_1^2 - X_1^2 Y^2)[c^2(X_1^2 + Y_1^2) - c_1^2(X^2 + Y^2)]\\ &\quad = (c^2 Y_1^2 - c_1^2 Y^2)(c^2 X_1^2 - c_1^2 X^2)\end{aligned}$$

Le lieu est donc une courbe L du sixième degré. On

Fig. 1.



voit immédiatement qu'elle se prête au mode de construction « par régions », lequel conduit, ici, à tracer les courbes

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} G &= XY_1 - X_1Y = 0,\\ H &= XY_1 + YX_1 = 0,\\ \Gamma &= c^2(X_1^2 + Y_1^2) - c_1^2(X^2 + Y^2) = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} D_1 &= cX_1 - c_1X = 0, & D_2 &= cY_1 - c_1Y = 0;\\ D'_1 &= cX_1 + c_1X = 0, & D_2 &= cY_1 + c_1Y = 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières sont un cercle G et une hyperbole équilatère H, toutes deux passant par les centres O, O_1 des deux coniques génératrices, par le point de rencontre A des axes focaux et le point de rencontre B des axes non focaux. Le cercle a son centre au milieu de AB; l'hyperbole a son centre au milieu de OO_1 et ses asymptotes parallèles aux bissectrices des angles OAO_1, OBO_1. $\Gamma = 0$ est un cercle par rapport auquel O, O_1 sont inverses l'un de l'autre. Enfin D_1, D_2, D'_1, D'_2 sont quatre droites dont la disposition, ainsi que celle des trois coniques précédentes, est représentée figure 1.

La courbe L, qui a pour asymptotes (réelles) celles de l'hyperbole H, a, d'apres la forme même de l'équation (7), les points doubles A (commun à G, H, D_2, D'_2), B (commun à G, H, D_1, D'_1) et les quatre autres P (commun à G, Γ, D_1, D_2), Q (commun à G, Γ, D'_1, D_2), P′ (commun à H, Γ, D_1, D'_2), Q′ (commun à H, Γ, D'_1, D_2).

Soit, en tout, *huit* points doubles, car il faut encore compter comme tels les points circulaires à l'infini.

4. Les points doubles ainsi trouvés sont-ils les seuls?

C'est ce que la méthode précédente va nous permettre de décider. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi dans le cas général, c'est-à-dire pour un choix arbitraire des données. Au contraire, des points doubles supplémentaires apparaîtront dans des cas spéciaux, caractérisés par une relation entre les données. Mais il est entendu que je laisserai de côté tous les cas encore plus particuliers, c'est-à-dire ceux dont la réalisation exigerait deux relations ou plus entre les données.

Les branches infinies de la courbe étant connues par les remarques qui précèdent, nous nous bornons aux points à distance finie. Nous avons à chercher :

1° Les points doubles qui, au point de vue du raisonnement précédent, apparaissent par projection. Il faut, pour cela, que les deux polynomes (1), (1'), c'est-à-dire les deux polynomes en u obtenus en multipliant par $u(u-1)$ les quantités (5), (5'), soient identiques à un facteur constant k près, puisqu'ils sont du second degré. Les quantités (5), (5') elles-mêmes doivent donc ne différer l'une de l'autre que par ce même facteur k, ce qui exige

$$k = \frac{X_1^2}{X^2} = \frac{Y_1^2}{Y^2} = \frac{c_1^2}{c^2}.$$

Or, ceci donne précisément (à distance finie) les points doubles déjà obtenus.

2° Les points doubles qui se présentent comme « véritables ».

Nous les trouverons en écrivant les relations (4). En tenant compte des expressions (6), (6'), l'égalité des deux premiers rapports donne

$$(10)\qquad \frac{\left(\dfrac{X_1\cos\theta_1}{u}+\dfrac{Y_1\sin\theta_1}{u-1}\right)}{\left(\dfrac{X\cos\theta}{u}+\dfrac{Y\sin\theta}{u-1}\right)} = \frac{\left(\dfrac{-X_1\sin\theta_1}{u}+\dfrac{Y_1\cos\theta_1}{u-1}\right)}{\left(\dfrac{-X\sin\theta}{u}+\dfrac{Y\cos\theta}{u-1}\right)} = k$$

et le dernier rapport,

$$(11)\qquad k = \frac{\left[\dfrac{X_1^2}{u^2}+\dfrac{Y_1^2}{(u-1)^2}\right]}{\dfrac{X^2}{u^2}+\dfrac{Y^2}{(u-1)^2}}.$$

Or les relations (10) donnent

$$(11') \qquad \frac{X_1^2}{u^2} + \frac{Y_1^2}{(u-1)^2} = \left[\frac{X^2}{u^2} + \frac{Y^2}{(u-1)^2}\right] k^2.$$

D'où [1]

$$k^2 - k = 0.$$

$k = 0$ (ou $k = \infty$) ne donnerait rien [les équations (10) exigeraient $X_1 = Y_1 = 0$, ce qui est incompatible [2] avec (5')]. On doit donc prendre

$$k = 1,$$

moyennant quoi la relation (11') est vérifiée d'elle-même.

Pour $k = 1$, les relations (4) expriment que l'équation

$$(12) \qquad \frac{X_1^2 - X^2}{u} + \frac{Y_1^2 - Y^2}{u-1} = c_1^2 - c^2$$

représente une surface ayant un point conique au point double cherché et que, en particulier, la conique obtenue en laissant u constant se compose de deux droites se coupant en ce point.

---

(1) La relation (11') aurait lieu en même temps que (11) si les deux membres en étaient simultanément nuls, c'est-à-dire si l'on avait, à la fois,

$$\frac{Y}{u-1} = \pm i \frac{X}{u}, \qquad \frac{Y_1}{u-1} = \pm i \frac{X_1}{u}$$

(les signes à prendre dans ces deux égalités étant indépendants l'un de l'autre). Mais, s'il en était ainsi, (5) donnerait pour la valeur commune des deux membres de la première égalité précédente, la valeur $\pm c$, et (5') pour les deux membres de la seconde, la valeur commune $\pm c_1$. Un tel point double (imaginaire, d'ailleurs comme le serait toute la figure dans ce cas) rentrerait encore dans la catégorie déjà étudiée puisqu'il appartiendrait à la fois à deux des droites (9).

(2) Cette incompatibilité disparaîtrait pour $u = 0$ ou $u - 1 = 0$. Mais alors on aurait aussi $X = 0$ ou $Y = 0$, de sorte qu'on retomberait sur l'un des points A, B.

Cette conique est toujours une hyperbole équilatère ayant, comme H, ses asymptotes également inclinées sur BO et BO_1. Il y a avantage, pour cette partie du calcul, à prendre pour axes les bissectrices des angles formés par BO, BO_1, de manière que

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad X_1 = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$Y = (x-\alpha)\sin\theta + (y-\beta)\cos\theta,$$
$$Y_1 = (y-\beta)\cos\theta - (x-\alpha)\sin\theta,$$

α et β désignant les coordonnées du point A par rapport aux axes ainsi choisis. Dans ces conditions, l'équation de la conique (12) s'écrit, pour $u = u_0$,

$$(12') \qquad -\frac{xy}{u} + \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{u-1} + \frac{c_1^2 - c^2}{\sin 2\theta} = 0$$

et son centre (une fois trouvée la valeur u_0 qu'il faut donner à u) est le point

$$(13) \qquad x_0 = \alpha u_0, \qquad y_0 = \beta u_0.$$

Le point double cherché ω est donc sur la droite AB et la divise dans le rapport u_0, soit

$$\overline{\omega B} = u_0 \overline{AB}.$$

On vérifie à nouveau sans difficulté que ce choix du du point ω annule également la dérivée par rapport à u.

Il nous reste à écrire que les coordonnées de ω vérifient, non pas seulement l'équation (12), mais les deux équations (5), (5'). Comme les valeurs de X, Y, X_1, Y_1 en ω s'obtiennent (au signe près) en multipliant par u ou $u-1$ les longueurs OA, OB, O_1A, O_1B, il vient ainsi

$$(14) \qquad u_0.\overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = c^2, \qquad u_0.\overline{AB}^2 - \overline{O_1B}^2 = c_1^2.$$

La condition pour que le point double existe est donc

$$\overline{OB}^2 - \overline{O_1B}^2 = c_1^2 - c^2,$$

condition suffisante en même temps que nécessaire, car si elle est remplie, les deux équations (14) sont compatibles en u_0, après quoi le point (13) satisfait à toutes les conditions imposées au point ω. En tenant compte de (14), on constate aisément que ce point est le pied de la hauteur du triangle AP′B (ou AQ′B).

5. Le mode de construction par régions, si simple et si intuitif, est, comme on sait, une méthode incomplète. Il fournit sur la courbe proposée un certain nombre de renseignements, mais non tous ceux dont on a besoin pour la connaissance, même qualitative (celle dont il s'agit en ce moment), de sa forme. Par exemple, il peut y avoir des régions où la méthode *permet* le passage de la courbe, sans prouver qu'elle *doit* y passer (Exemple : la région numérotée 4 sur la figure 1).

Peut-on obvier à cet inconvénient?

Pour cela, il importe d'en pénétrer la raison, et cette raison est facile à indiquer.

Pour construire la courbe

$$\Phi(x, y) = \Psi(x, y), \tag{15}$$

la méthode des régions consiste :

1° A discuter le signe de chacun des deux membres, de manière à éliminer toutes les régions du plan où ce signe n'est pas le même;

2° A déterminer les points communs aux deux lignes $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$, points qui appartiennent nécessairement à la courbe étudiée.

Or les éléments ainsi notés ne sont pas particuliers à la seule courbe (15) : ils lui sont évidemment communs avec toutes les courbes

$$(16) \qquad \Phi(x, y) = \lambda \Psi(x, y),$$

λ désignant une constante positive quelconque (ou même une quantité variable, pourvu qu'elle soit toujours positive pour x et y réels). La méthode ne saurait donc déceler d'autres propriétés que celles qui sont communes à toutes les courbes (16).

Par contre, nous pourrons compléter les indications ainsi acquises si nous arrivons à étudier la manière dont se forme cette courbe (16) lorsque λ varie de o à $+\infty$.

Pour $\lambda = 0$ on a $\Phi(x, y) = 0$, et pour $\lambda = \infty$, $\Psi(x, y) = 0$, lignes dont, par hypothèse, la forme est bien connue.

D'autre part, si l'on a construit un arc de la courbe

$$\mathcal{F}(x, y) = \lambda_0$$

(λ_0 étant une constante) sur lequel n'existe aucun point singulier, de sorte que $\mathcal{F}$ y admet des dérivées partielles continues et que $\mathcal{F}'_x$, $\mathcal{F}'_y$ ne s'y annulent jamais simultanément, on pourra affirmer que la courbe

$$\mathcal{F}(x, y) = \lambda_0 + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif ou négatif très petit, présente un arc très voisin du premier et de forme tout analogue : c'est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

Un changement d'aspect de la courbe $\mathcal{F}(x, y) = \lambda$, lorsque λ varie, ne peut donc avoir lieu que :

1° Au voisinage des points où $\mathcal{F}$ cesse d'avoir des dérivées continues. Si nous nous bornons au cas où la fonction $\mathcal{F}$ est rationnelle (ou se comporte comme une fonction rationnelle), ces points sont ceux où $\mathcal{F}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, soit, pour $\mathcal{F} = \frac{\Phi}{\Psi}$, les points communs à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$;

2° Au voisinage des points où $\mathcal{F}'_x = \mathcal{F}'_y = 0$.

Le premier cas se discute par les méthodes classiques d'étude d'une courbe autour d'un de ses points. Dans le problème particulier considéré dans ce qui précède, les points communs aux lignes $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$ sont tous doubles pour chacune d'elles; ce sont, pour la courbe (16), des points doubles *permanents*, c'est-à-dire points doubles quel que soit λ. En un tel point (x_0, y_0), il y aura deux tangentes, définies en égalant à zéro un polynome du second degré du type

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2$$
$$- \lambda[a'(x - x_0)^2 + 2b'(x - x_0)(y - y_0) + c'(y - y_0)^2]$$

(a, b, c, a', b', c' étant des coefficients numériques); et, dans la région du plan qui avoisine ce point, un changement de forme de la courbe pourra avoir lieu au cours de la variation de λ, par suite du changement de signe du discriminant de ce polynome, le point (x_0, y_0) passant alors du rôle de point double réel à celui de point isolé par l'intermédiaire d'un rebroussement.

Dans le second cas, le point considéré est point double *accidentel*, c'est-à-dire point double pour une valeur déterminée λ_0 de λ et pour celle-là seulement. Pour $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, la courbe aura sensiblement, au voisinage de ce point, la même forme que la conique

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 = \varepsilon,$$

a, b, c étant encore des constantes convenablement choisies; autrement dit, si $b^2 - ac < 0$, elle passera

(ε changeant de signe) du réel (très petite ovale autour du point considéré) à l'imaginaire. Si, au contraire, le point double correspondant à $\lambda = \lambda_0$ est à branches réelles (et distinctes), la courbe aura, près de ce point, sensiblement la forme de deux petits arcs d'hyperbole dont chacun, lorsque ε changera de signe, se coupera en deux, chaque moitié allant se raccorder avec la moitié correspondante de l'arc opposé.

Si donc on sait étudier ces points doubles — comme, d'autre part, les mêmes considérations permettent de dessiner la forme de la courbe pour λ très petit ou très grand —, on possédera, pour cela même, tous les renseignements nécessaires.

6. Appliquons à la courbe (7). Nous devons multiplier le second membre de son équation par λ; mais, à cause de l'homogénéité que présentent ses deux membres par rapport à c et c_1, nous voyons que cela revient à changer c, c_1 en $c\sqrt{\lambda}$, $c_1\sqrt{\lambda}$. Nous obtiendrons donc la famille de courbes correspondant à (16) en imaginant que, dans l'énoncé de notre problème, nous commencions par ne nous donner (outre les positions des quatre axes) que le *rapport* $\frac{c_1}{c}$ des distances focales, et faisant varier ensuite ces dernières, simultanément et proportionnellement l'une à l'autre, de o à ∞.

La connaissance du rapport $\frac{c_1}{c}$ suffit d'ailleurs à construire toutes les lignes séparatrices (8), (9) (*fig.* 1). On ombrera, à la manière ordinaire, de deux en deux les régions déterminées par ces lignes. La disposition étant celle qui est représentée figure 1, si, en outre, le point de rencontre A des axes *focaux* est bien celui qui est désigné ainsi sur la figure, les régions *négatives*, c'est-à-dire celles où les deux membres de (7) auront des signes contraires et où, par conséquent, la courbe ne pourra pas passer, seront celles que nous avons ombrées, les régions permises à la courbe autour de A étant celles qui contiennent les directions $Y=0$, $Y_1=0$, tandis que l'inverse a lieu autour du point B où se coupent les axes non focaux. Le point double B est d'ailleurs à tangentes réelles pour toute valeur positive de λ tandis que A, qui est à tangentes réelles pour $\lambda=0, \infty$, est point isolé entre les deux valeurs $\lambda = \frac{\overline{OA}^2}{c^2}$ et $\lambda = \frac{\overline{O_1A}^2}{c_1^2}$, ces dernières correspondant à des points de rebroussement. C'est ce qu'on reconnaît immédiatement sur l'équation (7), en se plaçant successivement au voisinage du point $(Y=Y_1=0)$ et du point $(X=X_1=0)$, et c'est ce qu'on peut d'ailleurs voir géométriquement d'après l'énoncé du problème [1].

Quant aux points P, P', Q, Q', ils sont toujours à tangentes réelles [2] pour toute valeur réelle de λ. Enfin, il en est de même [3] du point ω.

---

[1] Le point B correspond au cas où les coniques variables c, c_1 se réduisent à deux hyperboles infiniment aplaties suivant leurs axes non transverses ($u=1$). Le point A correspond à $u=0$, c'est-à-dire au passage d'ellipses infiniment aplaties chacune suivant son segment focal à des hyperboles infiniment aplaties suivant les prolongements de leurs segments focaux. De telles courbes ont leurs points d'intersection réels si A est intérieur aux deux segments focaux ou extérieur à tous deux; imaginaires, s'il est intérieur à l'un et extérieur à l'autre.

[2] Il en est ainsi, quelle que soit la disposition de figure. En tenant compte de ce que G, H, Γ sont, à des facteurs constants près, identiquement égaux à $D_1D'_2 - D'_1D_2$, $D'_1D'_2 - D_1D_2$, $D_1D'_1 + D_2D'_2$, on voit que, en P, par exemple, le faisceau des tangentes est, quel que soit λ, de la forme $D_1^2 - D_2^2 + mD_1D_2 = 0$.

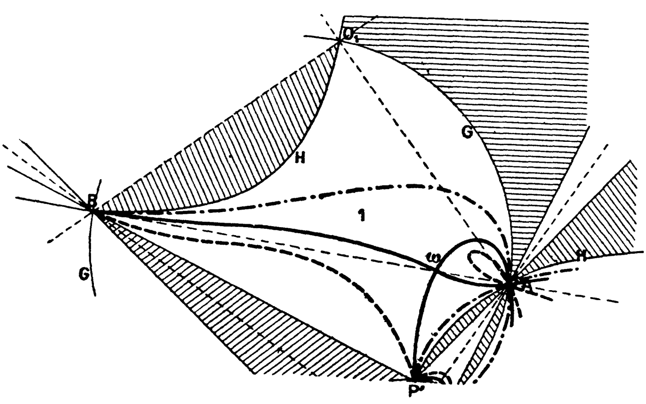
[3] Les tangentes en ω à la courbe lieu du point (x, y, u) dans l'espace s'obtiennent en coupant par le plan tangent à la surface (5) ou à la surface (5') le cône tangent à (12'). Or, en posant, dans

Dans ces conditions, au cours de la variation de λ, il ne se produira de changement de forme (toujours au sens qualitatif du mot) que dans les régions numérotées 1, 2, 3, 4 sur la figure 1. Elles correspondent aux valeurs successives

$$\lambda_1 = \frac{\overline{O_1A}^2 - \overline{OA}^2}{c_1^2 - c^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{\overline{O_1A}^2}{c_1^2}, \qquad \lambda_3 = \frac{\overline{OA}^2}{c^2}$$

du paramètre λ. La figure 2 montre les dispositions successives de la courbe dans la région 1. pour $\lambda < \lambda_1$

Fig. 2.



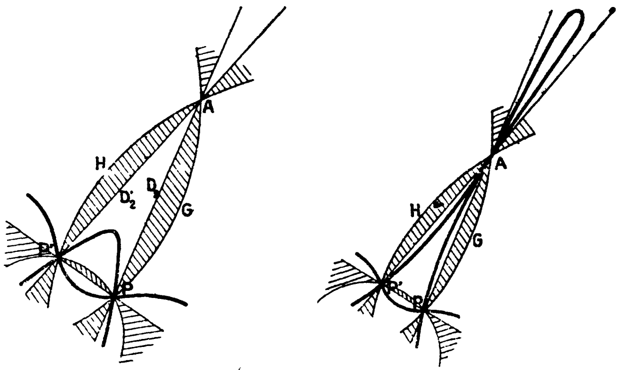
(trait ponctué), $\lambda = \lambda_1$ (trait plein), $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (trait mixte). La boucle de sommet A diminue ensuite jusqu'à ce qu'on ait $\lambda = \lambda_2$ (rebroussemment dans la région 2). Le point A reste point isolé jusqu'à $\lambda = \lambda_3$ et les changements de forme qui se produisent à partir

---

cette dernière, $u = u_0 + u'$, $x = \alpha u_0 + x'$, $y = \beta u_0 + y'$, on voit que ce cône tangent se décompose en deux plans $x' = \alpha u'$, $y' = \beta u'$. Dans le plan de xy, les tangentes sont symétriques des droites (12) par rapport à AB.

de ce moment intéressent les régions 3 et 4. Les formes présentées par la courbe, dans ces régions, pour $\lambda < \lambda_3$ et $\lambda > \lambda_3$ sont représentées figures 3, 3 *bis*.

Fig. 3, 3 *bis*.



Bien entendu, si les rôles des points A et B — autrement dit ceux des axes focaux et non focaux — étaient intervertis, la figure gardant par ailleurs la disposition représentée figure 1, le point ω n'interviendrait pas, la valeur correspondante de λ étant négative, et les seuls changements de forme seraient dus aux changements de nature du point double B (devenu A).