Concours d'agrégation de 1922

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 385-402

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__385_0>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1922.

Mathématiques spéciales.

I. *Un cercle* (Γ), *rapporté à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *a pour équations :*

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Deux tangentes fixes Δ, Δ', *à ce cercle, sont rencontrées en* M *et* M' *par une tangente variable* T.

Montrer qu'il existe dans l'espace deux points ω, ω', *d'où l'on voit constamment le segment* MM' *sous un angle droit lorsque* T *varie.*

Exprimer les coordonnées des points ω, ω' *en fonction des coordonnées* (x_0, y_0) *du point de rencontre* P *de* Δ *et* Δ'.

Où doit se trouver P *pour que les points* ω, ω' *soient réels, ou imaginaires, ou confondus?*

Trouver, lorsque Δ *et* Δ' *varient, l'équation de la surface* (S_Γ) *lieu des points* ω, ω'.

Construire la méridienne de cette surface et établir que (S_Γ) *est le lieu des projections de l'origine* O *sur les plans tangents à un certain hyperboloïde.*

Existe-t-il des points ω *auxquels correspond une infinité de couples* Δ, Δ' ?

II. *On considère une ellipse* (E) *ayant pour équations :*

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > b).$$

Deux tangentes fixes Δ, Δ', *à cette ellipse, sont rencontrées en* M *et* M' *par une tangente variable* T.

Montrer qu'il existe deux points ω, ω' *de l'espace, d'où l'on voit le segment* MM' *sous un angle droit, lorsque* T *varie.*

Exprimer les coordonnées $(x, y, \pm z)$ *de* ω', ω *en fonction des coordonnées* (x_0, y_0) *du point de rencontre* P *de* Δ *et* Δ'.

D'après la nature de la question, prévoir géométriquement où doit se trouver le point P *pour que* ω *et* ω' *soient confondus, et en déduire une décomposition en facteurs de l'expression de* z^2. *Discuter la nature des points* ω, ω' *suivant la position de* P.

Former l'équation de la surface (S_E) *lieu de* ω, ω', *lorsque* Δ *et* Δ' *varient. Les sections de* (S_E) *par les plans* xOz *et* yOz *comprennent chacune un cercle et un ovale de Cassini que l'on construira. On étudiera aussi la section par* xOy.

Quels sont les couples Δ, Δ' *auxquels correspond une infinité de points* ω, ω'?

Quels sont les points ω *auxquels correspond une infinité de couples* Δ, Δ'?

III. *La droite* $\omega\omega'$ *rencontre en un point* I *le plan* xOy. *Montrer qu'à un point* I (α, β) *donné correspondent trois points* P *que l'on désignera par* P_1, P_2, P_3. *Établir que ces points sont réels en même temps que le point* I *et qu'ils sont situés sur l'hyperbole d'Apollonius relative à ce point. (On pourra prendre comme inconnue auxiliaire :* $a^2 \dfrac{\alpha - x_0}{x_0}$.)

Former en fonction de (α, β) *l'équation du cercle* (K) *circonscrit au triangle* $P_1 P_2 P_3$.

Vérifier que (K) *coupe le cercle orthoptique de* (E) *en deux points symétriques par rapport à* O, *qu'il passe par le symétrique de* I *par rapport à* O, *et enfin qu'il passe par le symétrique de* I *par rapport au centre de l'hyperbole d'Apollonius. Déduire de là une construction du cercle* (K) *et des points* P_1, P_2, P_3, *et que,* I *étant réel, les points correspondants* P_1, P_2, P_3 *sont réels.*

NOTA. — *Il sera commode de définir les tangentes à* (Γ) *ou* (E) *en fonction rationnelle d'un paramètre, et de définir un point du plan au moyen des paramètres des deux tangentes qui passent par ce point* (1).

SOLUTION PAR M. J. LEMAIRE.

I. Les coordonnées d'un point du cercle étant $\frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$ et $\frac{2at}{1+t^2}$, les tangentes Δ et Δ' aux points (t) et (t') ont pour équations

$$(\Delta) \qquad (1-t^2)x + 2ty = a(1+t^2),$$

$$(\Delta') \qquad (1-t'^2)x + 2t'y = a(1+t'^2),$$

et se coupent au point

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{a(1-tt')}{1+tt'}, \\ y_0 = \dfrac{a(t+t')}{1+tt'}; \end{cases}$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{cases} t+t' = \dfrac{2y_0}{a+x_0}, \\ tt' = \dfrac{a-x_0}{a+x_0}; \end{cases}$$

---

(1) Le problème comporte deux autres parties; nous en donnerons ultérieurement l'énoncé, avec la fin de la solution de M. Lemaire.

la tangente en un point arbitraire (T) du cercle coupe les précédentes aux points

$$(\mathrm{M}) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a(1-t\mathrm{T})}{1+t\mathrm{T}}, \\ y = \dfrac{a(t+\mathrm{T})}{1+t\mathrm{T}}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{M}') \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{a(1-t'\mathrm{T})}{1+t'\mathrm{T}}, \\ y' = \dfrac{a(t'+\mathrm{T})}{1+t'\mathrm{T}}. \end{cases}$$

La condition pour que le segment MM′ soit vu d'un point $\omega(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sous un angle droit est

$$(\mathrm{X}-x)(\mathrm{X}-x')+(\mathrm{Y}-y)(\mathrm{Y}-y')+\mathrm{Z}^2=0;$$

remplaçons x, y, x', y' par leurs expressions et écrivons que cette relation est satisfaite pour toute valeur de T, nous obtenons

$$\begin{gathered}(\mathrm{X}+a)^2tt'+(\mathrm{Y}t-a)(\mathrm{Y}t'-a)+\mathrm{Z}^2tt'=0,\\ (\mathrm{X}^2-a^2)(t+t')+(\mathrm{Y}-at)(\mathrm{Y}t'-a)\\ \quad +(\mathrm{Y}-at')(\mathrm{Y}t-a)+\mathrm{Z}^2(t+t')=0,\\ (\mathrm{X}-a)^2+(\mathrm{Y}-at)(\mathrm{Y}-at')+\mathrm{Z}^2=0;\end{gathered}$$

d'où, en éliminant Z^2,

$$\begin{gathered}4tt'\mathrm{X}+(t+t')(tt'-1)\mathrm{Y}=a(t^2t'^2-1),\\ 2(t+t')\mathrm{X}+(t^2+t'^2-2)\mathrm{Y}=a(t+t')(1+tt');\end{gathered}$$

ou, en introduisant x_0, y_0 à l'aide des formules (1),

$$\begin{gathered}(a^2-x_0^2)\mathrm{X}-x_0y_0\mathrm{Y}=-a^2x_0,\\ x_0\mathrm{Y}-y_0\mathrm{X}=0,\end{gathered}$$

et par suite

$$\begin{cases} \mathrm{X}=\dfrac{a^2x_0}{x_0^2+y_0^2-a^2}, \\ \mathrm{Y}=\dfrac{a^2y_0}{x_0^2+y_0^2-a^2}; \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}Z^2 &= -(X-a)^2-(Y-at)(Y-at')\\ &= -(X-a)^2-Y^2+a(t+t')Y-a^2tt',\end{aligned}$$

et, après simplifications,

$$Z^2 = \frac{a^4(x_0^2+y_0^2-2a^2)}{(x_0^2+y_0^2-a^2)^2}.$$

Finalement, les coordonnées des points ω, ω' sont données par

$$(2) \qquad (\omega, \omega') \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{a^2 x_0}{x_0^2+y_0^2-a^2},\\ Y &= \frac{a^2 y_0}{x_0^2+y_0^2-a^2},\\ Z^2 &= \frac{a^4(x_0^2+y_0^2-2a^2)}{(x_0^2+y_0^2-a^2)^2}. \end{aligned}\right.$$

Ces points sont réels et distincts, confondus, ou imaginaires, tant que P est à distance finie, suivant que

$$x_0^2+y_0^2-2a^2 \gtreqless 0,$$

c'est-à-dire suivant que P est extérieur au cercle de Monge de (Γ), sur ce cercle, ou intérieur à ce cercle; si Δ et Δ' sont parallèles, les expressions ci-dessus se réduisent à $X=Y=Z=0$, les points ω et ω' se confondent en O.

Surface (S_Γ). — L'équation de la surface lieu des points ω, ω' s'obtient en éliminant x_0 et y_0 entre les relations (2), élimination aisée si l'on pose $x_0^2+y_0^2=\lambda$; on trouve

$$(X^2+Y^2+Z^2)^2-2a^2(X^2+Y^2-Z^2)=0,$$

qui représente la podaire du point O par rapport à l'hyperboloïde

$$X^2+Y^2-Z^2-2a^2=0;$$

c'est une surface de révolution d'axe Oz, dont la méridienne est la lemniscate

$$(X^2 + Z^2)^2 - 2a^2(X^2 - Z^2) = 0.$$

Supposons donnés ω, ω' et par suite leur projection $I(X, Y)$ sur le plan du cercle (Γ), tout point P qui leur correspond est déterminé par

$$X(x_0^2 + y_0^2 - a^2) - a^2 x_0 = 0,$$
$$X y_0 - Y x_0 = 0,$$

équations en x_0, y_0 qui représentent un cercle et une droite; donc à un couple de points ω, ω', qui doivent être pris sur (S_Γ), correspondent deux points P; ces deux points sont réels, car l'équation

$$(X^2 + Y^2)x_0^2 - a^2 X x_0 - a^2 X^2 = 0$$

qui donne leurs abscisses a des racines réelles; comme $(x_0^2 + y_0^2 - a^2)$ a le signe de $x_0 X$, un point $P(x_0, y_0)$ sera extérieur ou intérieur au cercle (Γ) suivant que x_0 et X seront ou non de même signe, et puisque l'équation ci-dessus a deux racines de signes contraires, l'un des deux points P sera extérieur, l'autre intérieur à (Γ); il y a donc toujours un, et un seul, système de deux tangentes réelles Δ, Δ' correspondant à un système de points ω, ω', à moins toutefois que ces points coïncident avec O, auquel cas Δ et Δ' sont deux tangentes parallèles quelconques.

Géométriquement, considérons trois positions de la tangente variable, et soient MM', $M_1M'_1$, $M_2M'_2$ les segments correspondants limités à Δ et Δ'; ces deux tangentes fixes n'étant pas supposées parallèles, les milieux des segments ne sont pas en ligne droite, car le lieu de ces milieux est une hyperbole, et les sphères ayant ces segments comme diamètres ont deux points communs

ω et ω' symétriques par rapport au plan de (Γ); si mm' est un segment variable limité à Δ et Δ' et vu de ω sous un angle droit, m et m' décrivent deux divisions homographiques; comme ces deux systèmes de divisions homographiques ont trois groupes M et M′, M_1 et M'_1, M_2 et M'_2, de points homologues communs, ils coïncident, autrement dit tous les segments tels que MM′ sont vus de ω, comme les trois premiers, sous un angle droit.

Ce raisonnement, qui établit l'existence des points ω et ω', est applicable à tout système de points M et M′ formant deux divisions homographiques sur deux droites fixes Δ, Δ', en même plan ou non, pourvu que le milieu de MM′ ne décrive pas une droite, c'est-à-dire que les divisions ne soient pas semblables; il montre donc l'existence des points ω, ω' quand on remplace le cercle (Γ) par une ellipse ou une hyperbole (deuxième partie), et aussi quand M et M′ sont les traces, sur deux génératrices de même espèce d'un hyperboloïde, d'une génératrice variable de l'autre espèce (quatrième partie).

Autrement : revenons au cas du cercle, et soient μ et μ' les traces sur OP du cercle de diamètre MM′; si autour de μ on fait tourner deux droites rectangulaires, les cordes qu'elles interceptent sur le système Δ, Δ' enveloppent une conique de foyer μ et d'axe OP, laquelle a, avec le cercle, outre Δ et Δ', deux tangentes communes symétriques par rapport à OP; il n'existe donc, outre MM′, qu'un segment analogue vu de μ sous un angle droit, et le cercle ayant ce segment pour diamètre passe aussi en μ', de sorte qu'au point μ correspond un point μ' et un seul. Il y a réciprocité entre ces points, qui déterminent sur OP deux divisions en involution; et si I est le point central, $\overline{I\mu} \times \overline{I\mu'}$ a une valeur constante; les sphères de diamètre MM′ coupent donc en deux points fixes, qui sont les points ω et ω' de la question, la perpendiculaire en I au plan du cercle.

En considérant les positions de MM′ parallèles à Δ et Δ', on voit que I est l'orthocentre du triangle PDD′, DD′ segment perpendiculaire en O à OP et limité aux tangentes fixes; cette remarque permettrait, connaissant I, de retrouver P.

Signalons aussi la relation

$$\overline{O\omega}^2 + 2a^2 = 2.\overline{OD}^2,$$

facile à établir en considérant ω comme situé à la fois sur la perpendiculaire en I au plan du cercle donné et sur une sphère dont le diamètre MM′ est perpendiculaire à OP.

Soient A et A′ les points où (Γ) coupe OP, Aa et $A'a'$ les tangentes en ces points limitées à Δ; les sphères de centres A et A′, et de rayons Aa et $A'a'$, ont en commun les points ω et ω' dans le plan perpendiculaire au plan de (Γ) suivant OP, et l'on a

$$\omega A.\omega A' = aA.a'A' = a^2;$$

le lieu de ω et ω' est, dans ce plan, la lemniscate de foyers A et A′ : c'est la méridienne de (S_Γ).

II. Représentons par

$$x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2bt}{1+t^2}$$

les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse (E); les tangentes Δ et Δ' aux points (t) et (t') ont pour équations

$$(\Delta) \qquad b(1-t^2)x + 2aty = ab(1+t^2),$$
$$(\Delta') \qquad b(1-t'^2)x + 2at'y = ab(1+t'^2),$$

et se coupent au point

$$(\mathrm{P}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{a(1-tt')}{1+tt'}, \\ y_0 &= \frac{b(t+t')}{1+tt'}; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} t+t' &= \frac{2ay_0}{b(a+x_0)}, \\ tt' &= \frac{a-x_0}{a+x_0}; \end{aligned} \right.$$

les points M et M′ où ces tangentes fixes sont coupées par la tangente en un point variable (T) ont pour coordonnées

$$(\mathrm{M}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a(1-t\mathrm{T})}{1+t\mathrm{T}}, \\ y &= \frac{b(t+\mathrm{T})}{1+t\mathrm{T}}; \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{M}') \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{a(1-t'\mathrm{T})}{1+t'\mathrm{T}}, \\ y' &= \frac{b(t'+\mathrm{T})}{1+t'\mathrm{T}}. \end{aligned} \right.$$

En écrivant que MM′ est vu d'un point $\omega(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ sous un angle droit, et conduisant le calcul comme dans la première partie, on trouve d'abord

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X} &= \frac{x_0(b^4+c^2y_0^2)}{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}, \\ \mathrm{Y} &= \frac{y_0(a^4-c^2x_0^2)}{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}, \end{aligned} \right.$$

puis

$$Z^2 = -(X-a)^2 - (Y-bt)(Y-bt')$$
$$= -(X-a)^2 - Y^2 + b(t+t')Y - b^2tt'$$
$$= -\left[\frac{x_0(b^4+c^2y_0^2)}{E_0} - a\right]^2 - \frac{y_0^2(a^4-c^2x_0^2)^2}{E_0^2}$$
$$+ \frac{2ay_0^2(a^4-c^2x_0^2)}{E_0(a+x_0)} - \frac{b^2(a-x_0)}{a+x_0},$$

où

$$E_0 \equiv b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2.$$

Remarquant que les points ω et ω' doivent coïncider, et par suite Z^2 être nul, si P appartient au cercle de Monge de l'ellipse ou à l'une quelconque des directrices réelles ou imaginaires, on met aisément Z^2 sous la forme

$$(3)\qquad Z^2 = \frac{(x_0^2+y_0^2-a^2-b^2)(a^4-c^2x_0^2)(b^4+c^2y_0^2)}{E_0^2}.$$

Les formules (2) et (3) établissent l'existence des points ω et ω', et donnent leurs coordonnées; de l'expression de Z^2, il résulte que ces points sont réels et distincts si P est situé entre les directrices réelles de l'ellipse et son cercle de Monge, confondus s'il appartient à l'une de ces lignes, imaginaires dans le cas contraire.

Quand P appartient a une directrice, ω et ω' coïncident avec le foyer correspondant; quand il appartient au cercle de Monge, ω et ω' coïncident avec lui.

Surface (S_E). — Pour obtenir l'équation du lieu de ω et ω' quand Δ et Δ' varient, revenons aux équations qui déterminent ces points :

$$(4)\qquad \begin{cases} (X-a)^2 + Y^2 + Z^2 - bY(t+t') + b^2tt' = 0, \\ b^2 - bY(t+t') + [(X+a)^2 + Y^2 + Z^2]tt' = 0, \\ 2bY - (X^2+Y^2+Z^2-c^2)(t+t') + 2bYtt' = 0, \end{cases}$$

et éliminons t et t' entre elles; il vient

$$(S_E)\begin{vmatrix} (X-a)^2+Y^2+Z^2 & bY & b^2 \\ b^2 & bY & (X+a)^2+Y^2+Z^2 \\ 2bY & X^2+Y^2+Z^2-c^2 & 2bY \end{vmatrix}=0,$$

équation qui s'écrit aussi

$$\begin{aligned}&(U^2+a^2+b^2)(U^2+c^2)(U^2-c^2)\\ &\qquad -4a^2X^2(U^2-c^2)-4b^2Y^2(U^2+c^2)=0,\end{aligned}$$

en posant $U^2 \equiv X^2+Y^2+Z^2$, et qui représente une surface tricirculaire du sixième degré. Son intersection avec le plan xOz a pour équation

$$\begin{aligned}&(X^2+Z^2+a^2+b^2)(X^2+Z^2+a^2-b^2)(X^2+Z^2-c^2)\\ &\qquad\qquad -4a^2X^2(X^2+Z^2-c^2)=0,\end{aligned}$$

et est formée d'un cercle décrit sur la distance focale FF′ de (E) comme diamètre, et de l'ovale de Cassini représenté par

$$[(X-a)^2+Z^2][(X+a)^2+Z^2]=b^4,$$

qui touche le cercle précédent aux foyers F et F′, et a lui-même pour foyers les sommets du grand axe de l'ellipse; cet ovale se compose de deux courbes fermées.

La trace de (S_E) sur le plan yOz se compose de même d'un cercle imaginaire passant aux foyers imaginaires de (E), et de l'ovale de Cassini

$$[(Y-b)^2+Z^2][(Y+b)^2+Z^2]=a^4,$$

lequel contient lui-même ces foyers, est formé d'une seule courbe fermée, et a pour foyers les extrémités du petit axe de l'ellipse; chacun de ces ovales s'appuie en deux de ses sommets sur le cercle de Monge de l'ellipse.

Sur le plan même de l'ellipse, la trace de la surface a pour équation

$$(X^2+Y^2+a^2+b^2)(X^2+Y^2+c^2)(X^2+Y^2-c^2)$$
$$-4a^2X^2(X^2+Y^2-c^2)-4b^2Y^2(X^2+Y^2+c^2)=0,$$

qu'on met aisément sous la forme suivante (en ayant recours par exemple aux coordonnées polaires) :

$$(X^2+Y^2-a^2-b^2)[(X-c)^2+Y^2][(X+c)^2+Y^2]=0,$$

laquelle montre que la trace de (S_E) se compose, comme on pouvait le prévoir, du cercle orthoptique et des tangentes isotropes de l'ellipse.

Remarque. — Écrivons les équations (4), qui déterminent ω et ω', sous la forme suivante :

$$X^2+Y^2+Z^2-2aX-bY(t+t')+a^2+b^2tt'=0,$$
$$(X^2+Y^2+Z^2)tt'+2aXtt'-bY(t+t')+a^2tt'+b^2=0,$$
$$(X^2+Y^2+Z^2)(t+t')-2bY(1+tt')-(a^2-b^2)(t+t')=0;$$

multiplions respectivement par $-2tt'$, -2, et $(t+t')$ les deux membres de chacune, et ajoutons membre à membre les nouvelles équations, les termes du premier degré en X, Y, Z s'éliminent et l'on trouve

$$(t-t')^2(X^2+Y^2+Z^2+a^2+b^2)=2a^2(t+t')^2+2b^2(tt'-1)^2;$$

si le diamètre conjugué de OP coupe Δ en D, les coordonnées de ce point sont

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a(t'+t)}{t'-t},\\[2ex]\dfrac{b(tt'-1)}{t'-t},\end{array}\right.$$

de sorte que la relation ci-dessus peut s'écrire

$$\overline{O\omega}^2+a^2+b^2=2\overline{OD}^2.$$

Pour abréger, nous ne discuterons pas les formules qui lient aux tangentes Δ et Δ' les points ω et ω', et nous terminerons la deuxième partie de la question par des *considérations géométriques*.

D'abord, le raisonnement fait dans la première partie prouve l'existence des points ω et ω' pour deux tangentes Δ, Δ' qui se coupent à distance finie.

En considérant les tangentes respectivement parallèles à Δ et Δ', lesquelles coupent Δ' en D', Δ en D, sur le diamètre conjugué de OP, on voit que la droite $\omega\omega'$ est perpendiculaire au plan de l'ellipse au point I, orthocentre de PDD' : le point P, étant à la fois sur le diamètre OP et sur la perpendiculaire menée de I à la direction conjuguée de ce diamètre, *appartient à l'hyperbole d'Apollonius relative à* I.

Particularisant la tangente variable, nous voyons que ω et ω' sont les points communs à la droite précédente menée par I et à une sphère dont le diamètre MM' est parallèle à DD', et il est alors aisé d'établir géométriquement la relation entre Oω et OD obtenue plus haut.

Si les tangentes Δ et Δ' *sont parallèles*, de direction quelconque, les hauteurs issues de D et D', points de contact de ces tangentes, dans le triangle PDD', sont parallèles, I est rejeté à l'infini, ω et ω' sont sur le cercle de l'infini, qui appartient d'ailleurs à la surface (S_E), puisqu'il est commun à toutes les sphères de diamètre variable MM'.

Si Δ *et* Δ' *sont tangentes aux sommets de l'axe focal*, il leur correspond une infinité de points ω et ω', qui forment le cercle de diamètre FF' dans le plan perpendiculaire au plan de l'ellipse, cercle commun, dans ce cas, aux sphères de diamètre MM'.

Si Δ et Δ' *sont tangentes aux sommets du petit* *axe*, infinité de points ω et ω', imaginaires, dont le lieu est le cercle imaginaire passant aux foyers imaginaires de l'ellipse, dans le plan perpendiculaire au plan de la courbe, et ayant le même centre qu'elle.

Si P *appartient au cercle de Monge*, les deux points ω et ω' se confondent évidemment avec lui.

Enfin, si ce point appartient à une directrice, toutes les sphères de diamètre MM′ passent au foyer correspondant, où viennent se confondre les deux points ω et ω'.

Dans le plan xOz, outre le cercle trouvé ci-dessus, la surface (S_E) possède encore les points ω, ω' provenant des tangentes Δ, Δ' dont le point commun P est sur Ox; considérons deux pareilles tangentes, et appelons a et a' les points où Δ est coupée par les tangentes à (E) en ses sommets A et A′ de l'axe focal : les sphères de centres A et A′, et de rayons Aa et $A'a'$, ont en commun les points ω et ω' dans le plan xOz, et l'on a

$$\omega A . \omega A' = a A . a' A' = b^2;$$

le lieu de ω, ω', quand P se déplace sur Ox, est dans le plan xOz l'ovale de Cassini de foyers A et A′ et passant aux foyers F et F′ de l'ellipse; démonstration analogue pour le plan yOz.

Remarque. — Tout ce qui précède s'appliquerait, avec des modifications de détail, si l'on remplaçait l'ellipse par une hyperbole.

Examinons le cas où la conique donnée est une parabole (Π) de foyer F. Pour deux tangentes données Δ et Δ' non rectangulaires, les points ω, ω' n'existent pas, comme on s'en rend compte en considérant la tangente rejetée à l'infini.

Étudions le cas où Δ et Δ' sont rectangulaires, leur point commun P étant sur la directrice : il existe pour deux telles droites une infinité de points ω, dont l'ensemble forme le cercle de diamètre FP dans le plan perpendiculaire au plan de (Π); et quand P décrit la directrice (L), ce cercle (FP) engendre la surface (S_{Π}) lieu de ω; si L est le point où l'axe de la parabole coupe la directrice, cette surface est la transformée par inversion, de pôle F et de puissance $\overline{FL}^2$, du cylindre de révolution qui a pour trace sur le plan de la parabole le cercle de diamètre FL.

Les plans passant par (L) la coupent suivant des cercles qui sont les inverses des cercles du cylindre; ces deux familles de cercles constituent les deux systèmes de lignes de courbure de (S_{Π}). La droite (L) et la perpendiculaire en F au plan de (Π) sont sur la surface, qui ne contient comme autre droite que la droite à l'infini dans les plans perpendiculaires à l'axe de la parabole.

(S_{Π}) est l'enveloppe des sphères passant en F et ayant leurs centres sur la parabole donnée, les cercles de contact étant les cercles (FP); elle est aussi l'enveloppe des sphères orthogonales à la sphère de centre L, de rayon LF, et ayant leurs centres sur la parabole focale de (Π), les cercles de contact étant les cercles du second système de lignes de courbure. (S_{Π}), qui est du troisième degré, est une *cyclide de Dupin* particulière.

III. Le point I où $\omega\omega'$ coupe le plan de l'ellipse a pour coordonnées

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{x_0(b^4+c^2y_0^2)}{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2},\\ \beta &= \frac{y_0(a^4-c^2x_0^2)}{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}.\end{aligned}\right.$$

L'hyperbole d'Apollonius relative à I a pour équation

$$(\mathrm{H}) \qquad c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y = 0$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$c^2 x_0 y_0 + b^2 \beta x_0 - a^2 \alpha y_0 \equiv 0,$$

en substituant à α et β leurs valeurs ci-dessus : les points P correspondant à un point I donné sont donc bien sur l'hyperbole (H). Ils sont aussi sur les coniques représentées par les équations

$$\begin{aligned} \alpha \mathrm{E} &= b^4 x + y(a^2 \alpha y - b^2 \beta x), \\ \beta \mathrm{E} &= a^4 y - x(a^2 \alpha y - b^2 \beta x) \\ \text{où } \mathrm{E} &\equiv b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2, \end{aligned}$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(\mathrm{C}) \qquad \alpha x^2 + \beta xy - b^2 x - a^2 \alpha = 0,$$

$$(\mathrm{C}') \qquad \beta y^2 + \alpha xy - a^2 y - b^2 \beta = 0.$$

Ces deux coniques, ayant une direction asymptotique commune, ont trois points communs P_1, P_2, P_3 à distance finie.

L'équation générale des coniques qui passent par ces trois points est

$$c^2 xy + b^2 \beta x - a^2 \alpha y + \lambda(\alpha x^2 + \beta xy - b^2 x - a^2 \alpha) + \mu(\beta y^2 + \alpha xy - a^2 y - b^2 \beta) = 0,$$

qui représentera un cercle si

$$c^2 + \lambda\beta + \mu\alpha = 0,$$
$$\lambda\alpha = \mu\beta,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{c^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\mu = -\frac{c^2 \alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Le cercle (K) circonscrit au triangle $P_1P_2P_3$ a alors pour équation

$$(K) \quad c^2\alpha\beta(x^2+y^2) - b^2\beta(\alpha^2+\beta^2+c^2)x + a^2\alpha(\alpha^2+\beta^2-c^2)y - c^2\alpha\beta(a^2+b^2) = 0.$$

Cette équation pouvant s'écrire

$$c^2\alpha\beta(x^2+y^2-a^2-b^2) - b^2\beta(\alpha^2+\beta^2+c^2)x + a^2\alpha(\alpha^2+\beta^2-c^2)y = 0,$$

l'axe radical du cercle (K) et du cercle orthoptique de (E) passe en O, (K) coupe ce cercle en deux points symétriques par rapport à O.

On vérifie par un calcul simple que (K) passe au point $I'(-\alpha, -\beta)$ et au point $I''\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\alpha, -\frac{a^2+b^2}{c^2}\beta\right)$ symétrique de I par rapport au centre de l'hyperbole.

Construction de (K). — Il suffit de construire le cercle passant aux points I' et I'' et coupant le cercle de Monge en deux points diamétralement opposés, contenant par suite le point I''' de la droite OI'' déterminé par la condition

$$\overline{OI''}.\overline{OI'''} = -(a^2+b^2);$$

I' est intérieur à la branche de (H) qui ne passe pas en I'', par suite les trois points communs au cercle et à l'hyperbole, autres que I'', sont nécessairement réels.

Ce résultat peut être obtenu analytiquement comme il suit : les coniques (H) et (C) ont un point commun à l'infini dans la direction Oy, et leurs points communs à distance finie sont P_1, P_2, P_3. L'équation de (H) pouvant s'écrire

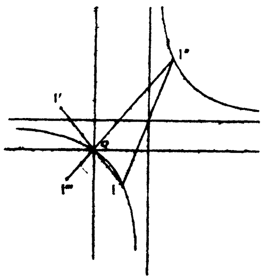
$$\frac{a^2(\alpha-x)}{x} = \frac{b^2(\beta-y)}{y},$$

si nous appelons λ la valeur de ces rapports, d'où

$$x = \frac{a^2 \alpha}{a^2 + \lambda},$$
$$y = \frac{b^2 \beta}{b^2 + \lambda},$$

à toute valeur de λ correspond un point de l'hyperbole, et les valeurs de λ qui déterminent les points P sont les

Fig. 1.



racines de l'équation obtenue en substituant à x et y les expressions ci-dessus dans l'équation de (C), savoir :

$$\begin{aligned} f(\lambda) \equiv\ & a^2\alpha^2(b^2+\lambda) + b^2\beta^2(a^2+\lambda) \\ & - b^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda) - (a^2+\lambda)^2(b^2+\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Si dans $f(\lambda)$ nous remplaçons successivement λ par $-\infty$, $-a^2$, $-b^2$ et $+\infty$, nous trouvons $+\infty$, $-a^2c^2\alpha^2$, $b^2c^2\beta^2$, $-\infty$: l'équation a donc trois racines réelles, et les trois points P sont bien réels en même temps que I.

(*A suivre.*)