MAX MORAND

Sur une manière simple d'obtenir géométriquement les formules de Lorentz

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 41-49

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__41_0>

[R1]

SUR UNE MANIÈRE SIMPLE D'OBTENIR GÉOMÉTRIQUEMENT LES FORMULES DE LORENTZ;

PAR M. MAX MORAND,
Élève de l'École Normale supérieure.

Avant d'entrer plus en détail dans la démonstration des formules de Lorentz, il convient d'écarter une objection importante qui ne peut manquer de venir à l'esprit.

On peut analyser de la façon suivante le phénomène de la contraction. Des observateurs voient passer une règle animée d'un mouvement de translation uniforme. Ils font sur cette règle, au moyen de deux dispositifs convenables dont la distance est mesurable, deux marques simultanées (pour eux). Les observateurs entraînés avec la règle mesurent également, au moyen de leurs instruments, la distance des deux marques. Parler de contraction, c'est affirmer que le nombre mesurant la distance des marques, pour les observateurs qui leur sont liés, est plus grand que le nombre mesurant la distance de ces marques pour les observateurs qui les ont vu passer.

Or on se demande, non sans raison, comment des observateurs différents peuvent comparer des nombres de mesures quand leurs unités ne sont pas définies, et ne paraissent pas aisées à définir.

Supposons, par exemple, qu'un système d'observateurs se serve du mètre et l'autre de la toise; l'un fournira certainement un nombre supérieur à l'autre, et cela sans que le phénomène de contraction ait eu à jouer le moindre rôle.

A-t-on le droit de parler d'une « même unité » employée par les deux systèmes d'observateurs en mouvement relatif, et comment peut-on la définir?

Telles sont deux questions auxquelles il est nécessaire de répondre pour donner un sens aux formules démontrées plus bas.

Considérons deux laboratoires immobiles l'un par rapport à l'autre. Les observateurs de ces deux laboratoires ont tout loisir de transporter leurs unités de longueur d'un laboratoire dans l'autre, et de les comparer. Je suppose qu'ils les trouvent rigoureusement égales. Ces opérations une fois terminées, et chaque laboratoire conservant son étalon de longueur, on met en mouvement l'un des laboratoires, en lui imprimant une accélération très faible. Pendant cette période très longue où l'un des laboratoires acquiert par rapport à l'autre une vitesse finie, l'intérieur des laboratoires reste constamment pareil à lui-même et, en particulier, les mesures de longueur qu'on y peut faire continuent à rester concordantes. Quand les observateurs ont atteint une vitesse v les uns par rapport aux autres, l'accélération est annulée et le mouvement devient uniforme. On réalise alors l'expérience décrite plus haut et l'on fait les mesures nécessaires, chaque observateur utilisant la règle qu'il a emportée avec lui. C'est en employant ces unités de longueurs que l'on peut parler de contraction. Elles sont considérées comme étant les mêmes, bien qu'elles ne soient plus comparables l'une à l'autre par suite de leur mouvement relatif, mouvement qui est d'ailleurs la cause d'une apparente contraction.

Supposons maintenant que le système d'observateurs primitivement mis en mouvement soit lentement arrêté, avec une accélération négative infiniment petite. Pendant cette nouvelle période, chaque laboratoire continue à rester semblable à lui-même. Quand ils sont redevenus immobiles l'un par rapport à l'autre, une nouvelle comparaison des règles est rendue possible. On trouve que les unités de longueurs n'ont pas changé. D'autre part, la distance des marques peut être comparée à la distance des deux dispositifs ayant servi à les tracer. On peut s'assurer directement que la première distance est plus grande que la seconde, et l'on constate objectivement la contraction, indépendamment des unités de mesure.

Un raisonnement semblable s'applique aux horloges. Chaque système d'observateurs doit utiliser des horloges qui, immobiles les unes par rapport aux autres, marchent rigoureusement aussi vite. Remarquons d'ailleurs que l'unité de longueur une fois définie dans un système comme nous venons de le faire, l'unité de temps en découle nécessairement. Elle doit être telle que la vitesse de la lumière soit mesurée par le nombre c dont la valeur est fixée à l'avance.

Dans les formules qui suivent, on supposera toujours qu'il est fait usage des unités de longueur et de temps que nous venons de définir. Ce sont celles qui restent toujours semblables à elles-mêmes pour des observateurs qui leur sont liés, et qui donnent les mêmes mesures quand on fait $v = 0$ dans les formules trouvées.

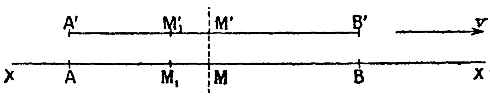
L'explication de la contraction de Lorentz, donnée depuis longtemps déjà par M. Langevin, a montré l'importance du rôle que joue dans les nouvelles théories le principe de la constance de la vitesse de la lumière.

La première conséquence de ce principe est la relativité de la simultanéité. Celle-ci entraîne la relativité des longueurs (contraction de Lorentz).

Nous nous sommes demandé si, pour arriver aux formules de Lorentz, il ne serait pas plus instructif et plus élégant de pousser plus loin ces considérations, de chercher à voir comment le principe de la constance de la vitesse de la lumière détermine la forme de ces transformations. C'est remplacer les calculs algébriques que l'on fait ordinairement par une démonstration géométrique tombant davantage sous le sens commun. Elle ne fait intervenir que les points de vue des observateurs liés à un corps et des observateurs qui le voient passer; elle prépare ainsi l'esprit aux attitudes auxquelles il doit se conformer pour pénétrer la signification des théories de la relativité.

1. *Relativité de la simultanéité.* — Considérons une règle $A'B'$ qui se meut parallèlement à la droite XX' avec une vitesse constante v dans le sens XX' (*fig.* 1).

Fig. 1.



Supposons qu'au moment où la règle occupe la position $A'B'$ par rapport à XX', deux éclairs jaillissent en A et B. Ces deux éclairs sont simultanés pour XX'; ils seront aperçus en même temps en tous les points du plan mené perpendiculairement à AB par son milieu M. Comme la lumière met un certain temps à se propager, la règle aura bougé pendant le temps que les rayons lumineux auront mis pour atteindre ce plan, et c'est le point M'_1 situé un peu en avant du plan au moment des éclairs, qui les verra simultanément, un peu plus tard, en passant dans ce plan en même temps que les rayons lumineux. Comme $A'M'_1$ est inférieur à M'_1B', les observateurs liés à $A'B'$ déduiront de cette observation que les éclairs, simultanés pour les observateurs XX', ne le sont pas pour eux.

2. *Formules de Lorentz.* — Mais on peut aller plus loin et retrouver très simplement, dans cet ordre d'idées, les formules de Lorentz.

Soient t l'heure marquée par l'horloge A au moment de l'éclair A; t'_1 l'heure marquée par A' à ce même instant. Les éclairs étant simultanés pour XX', au moment où jaillit l'éclair en B, B marquait aussi t. Cherchons ce que devait marquer B'. Soit μ' la mesure de la longueur M'_1M' faite par les observateurs qui lui sont liés. Soit c la vitesse constante de la lumière. Pour les observateurs entraînés avec la règle, les rayons lumineux issus des deux éclairs se sont croisés en M'_1, par conséquent l'éclair en B' a été antérieur à l'éclair en A' de

$$\frac{M'_1B' - A'M'_1}{c} = \frac{2\mu'}{c}.$$

Il en résulte que l'horloge B' devait marquer, quand elle a été éclairée par l'éclair B',

$$t' = t'_1 - \frac{2\mu'}{c}. \tag{1}$$

$MM_1 = \mu$ étant la mesure de la longueur M'_1M' faite par les observateurs qui la voient passer, remarquons que l'on a

$$\frac{AB}{2c} = \frac{MM_1}{v} = \frac{\mu}{v}$$

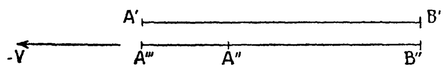
ou

$$\mu = v\,\frac{\mathrm{AB}}{2c}. \tag{2}$$

Nous poserons $\mathrm{AB} = x$, mesure faite par les observateurs liés à AB, et $\mathrm{A'B'} = x'$, mesure faite par les observateurs liés à A′B′.

Jusqu'ici, nous avons envisagé les phénomènes en nous plaçant au point de vue XX′. Maintenant, examinons ce qui s'est passé pour les observateurs A′B′ (*fig.* 2). Pour ceux-ci, l'éclair B′ précède l'éclair A′.

Fig. 2.



En outre, A′B′ n'est pas, pour eux, la projection du segment AB de XX′; ce segment leur paraît, en réalité, occuper la position A″B″ à l'instant t' de l'éclair B′. A″B″ est la mesure de AB faite par les observateurs qui la voient passer avec la vitesse $-v$. Si, l'éclair B′ jaillissant, nous imaginons B′ et B″ en coïncidence, A″ sera d'autre part le point qui, par un déplacement de vitesse $-v$ et de durée égale à

$$t'_1 - t' = \frac{2\mu'}{c},$$

viendra en A‴, coïncidant avec A′,

$$\mathrm{A''A'''} = \frac{2\mu'}{c}v.$$

Par suite,

$$\mathrm{A'B'} = \mathrm{A''B''} + \mathrm{A''A'''},$$

$$x' = \mathrm{A''B''} + \frac{2v}{c}\mu'. \tag{3}$$

Écrivons maintenant la constance du rapport des nombres mesurant certaines longueurs pour des observateurs qui leur sont liés, aux nombres mesurant ces mêmes longueurs pour ceux qui les voient passer; nous obtenons ainsi

$$(4) \qquad \frac{AB}{A''B''} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{M'_1 M'}{M_1 M} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{x'}{x} = \lambda,$$

d'où

$$A''B'' = \frac{x^2}{x'}.$$

En portant dans (3) et en tenant compte de ce que

$$\mu' = \frac{\mu'}{\mu}\mu = \frac{v x'}{2c},$$

il vient

$$x'^2 = x^2 + \frac{v^2}{c^2}x'^2$$

ou

$$(5) \qquad x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nous retrouvons ainsi la contraction des longueurs, avec le rapport

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

L'origine de ce phénomène est bien dans un défaut de simultanéité.

Portant maintenant dans (1) les valeurs trouvées, il vient immédiatement

$$(6) \qquad t' = t'_1 - \frac{vx}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Les égalités (5) et (6) donnent en outre, par un simple changement d'origines,

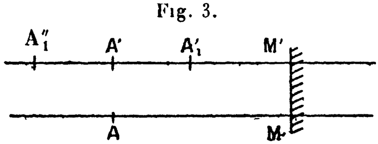
$$(7)\qquad \begin{cases} t' - t'_0 = t'_1 - t'_0 - \dfrac{v(x-x_0)}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \\ x' - x'_0 = \dfrac{x - x_0 - v(t-t_0)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Nous pourrions considérer maintenant les formules de Lorentz comme entièrement obtenues, en ajoutant à (6) et à (7) la condition de pouvoir obtenir la transformation inverse par un simple changement de v en $-v$.

Mais, pour avoir les formules de Lorentz sous la forme ordinaire, remarquons qu'il nous suffit d'exprimer $t'_1 - t'_0$ en fonction de $t - t_0$. Un raisonnement simple va nous permettre de pousser jusqu'au bout la démonstration géométrique.

Supposons qu'un signal lumineux instantané soit émis en A. L'horloge A, éclairée par la lumière, marque t_0; A', qui est en face, marque t'_0. Le signal se propage et se réfléchit sur un miroir qui, au moment

Fig. 3.



de la réflexion, occupe la position M. Le signal revient et, en repassant, éclaire le cadran de A qui marque t, ainsi que le cadran de l'horloge qui passe en face et marque t'_1.

On a

$$t - t_0 = \frac{2\,\mathrm{AM}}{c}.$$

Pendant le temps que le rayon lumineux a mis pour aller de AA′ en MM′, l'horloge A′ s'est déplacée et est venue en A'_1 (*fig.* 3). Pendant le temps du retour, le tout s'est encore déplacé et c'est l'horloge A''_1, symétrique de A'_1 par rapport à AA′, qui passe en A′ en même temps que le signal lumineux.

Comme

$$A'_1 M' + A''_1 M' = 2\,A'M' = \frac{2\,AM}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

l'horloge qui passe devant A, quand A marque t, indique

$$t'_1 = t'_0 + \frac{2\,A'M'}{c} = t'_0 + \frac{t - t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Nous avons alors finalement la formule donnant l'heure marquée par une horloge d'abscisse $x - x_0$ au temps $t - t_0$

$$t' - t'_0 = \frac{t - t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v(x - x_0)}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

En supposant que les horloges situées à l'origine des coordonnées de chaque système aient indiqué la même heure, $t'_0 = t_0 = 0$ au moment où elles se sont croisées, nous obtenons les formules

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{vx}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Quant aux autres coordonnées d'espace, il est bien évident qu'elles ne changent pas, du fait même de la possibilité de la translation parallèle.