RAOUL BRICARD

Sur la conservation de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 58-61
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__58_1>

[O[1]6k]

SUR LA CONSERVATION DE LA COURBURE GÉODÉSIQUE DANS LA DÉFORMATION D'UNE SURFACE;

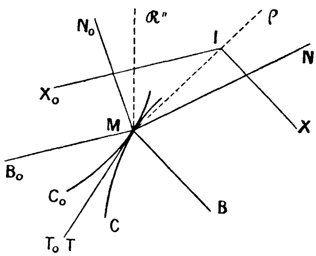
PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Considérons d'abord une courbe de grandeur invariable C roulant sur une courbe fixe C_0. Les courbes C et C_0 peuvent être planes ou gauches. La condition de roulement est que le point de contact M

des deux courbes, supposé lié à C, ait à chaque instant une vitesse nulle. Ce roulement est compatible avec une loi de variation quelconque de l'angle que font les plans osculateurs aux deux courbes.

Figurons (*fig.* 1) les trièdres principaux des deux

Fig. 1.



courbes, $\mathcal{T}_0$ ou $MT_0N_0B_0$, $\mathcal{T}$ ou MTNB (MT_0 et MT sont les tangentes, MN_0 et MN les normales principales, MB_0 et MB les binormales). Les deux courbes se touchant en M, MT et MT_0 sont confondues.

Appelons $\mathcal{M}$ le mouvement de l'espace lié à la courbe C.

On peut le considérer comme résultant de trois mouvements que j'appellerai $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$:

$\mathcal{M}_1$ est le mouvement de $\mathcal{T}_0$ par rapport à C_0.
$\mathcal{M}_2$ est le mouvement de $\mathcal{T}$ par rapport à $\mathcal{T}_0$.
$\mathcal{M}_3$ est le mouvement de C par rapport à $\mathcal{T}$.

Le mouvement $\mathcal{M}_1$ est bien connu : on sait, qu'à l'instant considéré, il résulte de deux rotations, l'une autour de l'axe de courbure X_0 de C_0 en M, l'autre autour de la tangente MT_0. Inutile de rappeler les vitesses angulaires de ces rotations.

$\mathcal{M}_2$ est une rotation autour de $MT_0 = MT$.

$\mathfrak{M}_3$, analogue à $\mathfrak{M}_1$, résulte de deux rotations, l'une autour de MT, l'autre autour de X, axe de courbure de C en M.

En composant ces cinq rotations (ce qui peut se faire en les prenant dans un ordre quelconque), on voit que $\mathfrak{M}$ résulte d'une rotation $\mathfrak{R}_0$ autour de X_0, d'une rotation $\mathfrak{R}'$ autour de $MT = MT_0$, d'une rotation $\mathfrak{R}$ autour de X. Symboliquement,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}' \mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}.$$

Mais $\mathfrak{M}$ étant un roulement est tangent à une rotation $\mathfrak{R}''$ dont l'axe doit passer par le point M, point de vitesse nulle. On a donc

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}' \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R},$$

d'où l'on tire

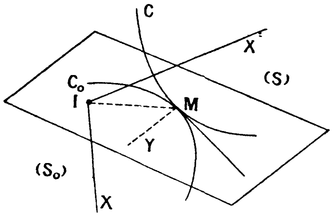
$$\mathfrak{R}'^{-1} \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}.$$

$\mathfrak{R}'^{-1} \mathfrak{R}''$ est le produit de deux rotations dont les axes passent en M. C'est donc une rotation ρ dont l'axe passe par M. Cette rotation devant aussi résulter de $\mathfrak{R}_0$ et de $\mathfrak{R}$, il faut que son axe passe par le point I commun aux axes X_0 et X de ces dernières (X_0 et X concourent comme appartenant au plan normal commun aux deux courbes en M). Par conséquent, la rotation $\mathfrak{R}'' = \rho \mathfrak{R}'$ a son axe dans le plan MIT. Ainsi :

Quand une courbe C *roule sur une courbe fixe* C_0, *le mouvement élémentaire de* C *est une rotation dont l'axe est dans le plan déterminé par la tangente commune aux deux courbes et par le point de concours des axes de courbure de ces courbes, correspondant à leur point de contact.*

2. Soient maintenant (S) et (S_0) deux surfaces applicables (*fig.* 2), C et C_0 deux courbes correspondantes tracées sur ces surfaces. On peut donner à S un mouvement tel que les points de C viennent succes-

Fig. 2



sivement coïncider avec les points correspondants de C_0, les deux surfaces étant à chaque instant tangentes en un point M. D'après le théorème de Ribaucour, ce mouvement est à chaque instant tangent à une rotation dont l'axe MY est dans le plan tangent commun aux deux surfaces en M. Ce plan contenant la tangente commune à C_0 et à C, il devra aussi, d'après le théorème démontré ci-dessus, contenir le point de concours I des axes de courbure X_0 et X des courbes C_0 et C en M. *Par conséquent, les deux courbes* C_0 *et* C *ont même rayon de courbure géodésique* MI *au point* M. C'est le théorème classique que j'avais en vue. On voit que les propositions les plus simples de la Cinématique le rendent presque intuitif.

3. Naturellement, la démonstration s'applique au cas où (S_0) étant un plan, (S) est une développable, et l'on obtient le théorème connu sur l'altération de la courbure dans le développement d'une développable.