Nouvelles annales de mathématiques

# Certificats de calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 1 (1922), p. 72-78

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__72_1>

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Soit l'équation différentielle*

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + bx + c},$$

*où $a$, $b$, $c$ désignent des constantes réelles.*

*Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de $a$, $b$, $c$;*

2° *Écrire l'intégrale générale, en distinguant les trois cas suivants :*

$$b^2 - 4ac > 0,$$
$$b^2 - 4ac = 0,$$
$$b^2 - 4ac < 0;$$

3° *Pour que l'intégrale générale soit rationnelle, il faut et il suffit que*

$$\frac{4}{b^2 - 4ac}$$

*soit le carré d'un entier;*

4° *L'intégrale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe, sans se réduire à une fraction rationnelle? Trouver, dans ce cas, les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature, en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver en projection sur le* *plan $yOz$ les lignes asymptotiques de la surface*

$$x + y^2 z = \int_0^y (y - t) e^{-\sqrt{t}} \, dt.$$

*Parmi ces courbes projetées, montrer qu'il y en a une et une seule, délimitant avec $Oy$ et le prolongement de $Oz$ une région d'aire finie.*

*Évaluer cette aire.*

(Poitiers, juillet 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Soient $p$, $q$ les dérivées partielles premières d'une fonction $z$ des variables $x$, $y$; $P$, $Q$ celles de la fonction $Z$ de $X$, $Y$, qu'on déduit de la précédente en posant*

$$x^2 = X, \qquad y^2 = Y, \qquad z^2 = Z.$$

*Évaluer $p$, $q$ en fonction de $P$, $Q$, $X$, $Y$, $Z$. Appliquer cette transformation à l'équation aux dérivées partielles*

$$(e) \qquad xyz(z - px - qy)^3 = pq.$$

*Soit (E) l'équation transformée, qui appartient à un type classique. Intégrer cette équation, montrer qu'elle admet une intégrale singulière, indiquer comment sont constituées les multiplicités caractéristiques. En déduire les résultats correspondants dans l'étude de ($e$).*

*Faire l'étude directe de l'équation ($e$) en montrant d'abord qu'elle possède certaines surfaces intégrales du second ordre*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

*où $A$, $B$, $C$ sont des constantes, choisies de manière à satisfaire à une relation de forme convenable $F(A, B, C) = 0$.*

*Écrire le système différentielle qui définit les multiplicités caractéristiques de ($e$). Intégrer ce système.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On assimile la Terre à un ellipsoïde de révolution, dont les rayons de courbure principaux en un point sont $R_1$ et $R_2$. Évaluer la partie* *principale de l'intégrale*

$$\int\int\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^2 dS,$$

*étendue à toute la surface du globe, en supposant très petit l'aplatissement* $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$.

*Application* $\varepsilon = \frac{1}{300}$. *Degré d'approximation?*

(Poitiers, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE I. — *Soient dans un plan deux axes rectangulaires* $Ox$, $Oy$. *On donne une fonction* $u(x,y)$ (*définie et continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur d'une courbe fermée sans point double* $\Gamma$).

*Soit* C *une courbe fermée sans point double quelconque intérieure à* $\Gamma$; *un sens positif et une origine des arcs ayant été choisis sur* C, *on désigne par* S *l'abscisse curviligne d'un point* $P(x, y)$ *de contour* C *et par* V *l'angle de la demi-tangente positive en* P *et de la demi-droite* PU *dont l'angle avec* $Ox$ *est* $u(x, y)$ :

1° *Transformer l'intégrale curviligne* $I = \int_c \cos V \, ds$ *en une intégrale double étendue à l'intérieur du contour* C (*on précisera le sens de parcours adopté dans l'intégration le long du contour*);

2° *Comment faut-il choisir la fonction* $u$ *pour que* I *soit nulle quel que soit* C? *Que peut-on dire alors des lignes qui en chacun de leurs points* M *sont tangentes à la direction* MU *correspondant à ce point;*

3° $u$ *étant définie par l'équation implicite*

$$x \sin u - y \cos u = 1$$

*et* C *étant une courbe fermée sans point double quelconque telle que les directions* $PU_1$, $PU_2$ *correspondant à l'un quelconque de ses points soient réelles et distinctes, on appelle* PU *l'une des directions* $PU_1$, $PU_2$ *et l'on suppose que les diverses positions de* PU *forment une suite continue lorsque* P *parcourt* C. *Calculer l'intégrale* *curviligne*

$$\int_C \cos V \, ds.$$

II. *Étant donnés un cylindre de révolution indéfini et un point* A *de sa surface* S, *on considère toutes les hélices tracées sur* S *et passant par* A :

1° *Démontrer que toutes les tangentes* (D) *de toutes ces hélices peuvent être considérées comme les normales d'une même surface* $\Sigma$;

2° *Déterminer les lignes de courbure de* $\Sigma$ *et les rayons de courbure principaux en un point* M *de* $\Sigma$;

3° *Soient* C *une courbe fermée sans point double dont tous les points sont extérieurs au cylindre donné*, V *l'angle de la tangente à* C *en un de ses points avec* une *droite* (D) *passant par* P; *on suppose que lorsque* P *décrit une fois d'une manière continue le contour* C *à partir d'une position initiale* $P_0$, (D) *varie d'une manière continue* (*avec discontinuité éventuelle en* $P_0$). *Calculer*

$$\int_C \cos V \, ds.$$

*N. B. — Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre. Cependant il est recommandé de ne traiter la troisième partie de* II *qu'après avoir traité* I *en entier.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère l'équation différentielle*

$$x^2 y'' + x y' - \left(\frac{1}{4} + a x\right) y = 0, \tag{1}$$

*où* $a$ *est une constante donnée :*

1° *Trouver une solution de* (1) *qui reste finie pour* $x = 0$. *Cette solution apparaîtra comme le produit d'une fonction élémentaire par une série entière dont on étudiera la convergence. Cette solution est-elle entièrement déterminée?*

2° *Comment peut on en déduire l'intégrale générale de l'équation* (1) *sous forme d'un développement en série? Calculer les trois premiers termes de ce développement;*

3° *Cas particulier où* $a = 0$.

(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *On donne deux fonctions* P *et* Q *des trois variables* $x$, $y$, $z$. *Comment faut-il choisir la surface* S *pour que l'intégrale curviligne*

$$I = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

*soit nulle pour toute courbe fermée tracée sur* S? *Intégrer l'équation aux dérivées partielles trouvée pour*

$$P = xy, \qquad Q = yz + x,$$

*et déterminer la surface intégrale qui passe par l'axe des* $x$;

2° *On considère la portion* $\Sigma$ *de la surface* $y = x \operatorname{tang} z$ *qui correspond à des valeurs positives de* $x$ *et de* $y$ *et à des valeurs de* $z$ *comprises entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$. *On joint par une courbe* $\Gamma$ *tracée sur* $\Sigma$ *les points de* $\Sigma$ *défini par*

$$x = 1, \qquad y = 0; \qquad x = \xi, \qquad y = \eta.$$

*Montrer que*

$$\mathfrak{I} = \int_\Gamma xz\,dx + (yz + x)\,dy$$

*ne dépend que de* $\xi$, $\eta$ *et non de* $\Gamma$. *Calculer* $\mathfrak{I}$ *en fonction de* $\xi$, $\eta$; *valeur de* $\mathfrak{I}$ *pour* $\xi = 1$, $\eta = 1$.

II. *Intégrer l'équation*

$$\text{(E)} \qquad p + zq = 2.$$

C *étant une courbe fermée quelconque tracée sur une surface intégrale* S, *montrer que*

$$\int_C [4(y + x^2) - z^2]\,dx + 2z\,dy = 0.$$

*Étant donnés un arc de courbe quelconque tracé sur une telle surface* S *et un point* M$(x, y, z)$ *de cet arc, on désigne d'une manière générale par* $y'$ *la pente* $\frac{dy}{dx}$ *de la tangente à la projection de cette courbe sur le plan des* $x$, $y$ *au point* $m(x, y)$, *projection de* M. *On considère sur* S *un contour fermé, formé par une portion* Q *d'une* *caractéristique de* E *et par un autre arc quelconque de* $\Gamma$. *On a*

$$\int_\Gamma [4(y+x^2)+y'^2]\,dx - \int_C [4(y+x^2)+y'^2]\,dx$$
$$= \int_\Gamma (y'-z)^2\,dx.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la surface engendrée par les normales principales à la courbe*

$$y = \frac{x^2}{2}, \qquad z = \frac{x^3}{6}:$$

1° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface;*
2° *Calculer les rayons de courbure principaux de cette surface à l'origine.*

(Grenoble, novembre 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *A quelle condition doivent satisfaire les équations* P *et* Q *de* $x$ *et de* $y$ *pour que l'expression*

$$\left(P\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)dx - \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy$$

*soit une différentielle totale exacte.*

*Trouver les fonctions dont cette expression et la différentielle dans chacun des trois cas suivants :*

$$\begin{array}{ll} P = x^2+y^2 & Q = y, \\ P = x & Q = x^2+y^2, \\ P = y & Q = x; \end{array}$$

2° *Trouver les lignes asymptotiques de la surface*

$$x = \frac{v^3}{3} - u^3 v, \qquad y = \frac{u^3}{3} - v^2 u, \qquad z = uv.$$

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1+x-y-z)\frac{\partial z}{\partial y} + x - y + 3z = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On considère les courbes* (P) *représentées, en coordonnées rectangulaires, par l'équa-*

*tion* $y^2 - 2ax - a^2 = 0$, *a étant une constante quelconque. Par un point quelconque du plan, passent deux courbes* (P) *orthogonales. On demande l'aire du quadrilatère curviligne, situé au-dessus de l'axe des* $x$, *qui se trouve limité par les courbes* P *qui passent aux points*

$$(x + 0, \quad y = 1) \quad \text{et} \quad \left(x = \frac{5}{2}, \quad y = 6\right).$$

II. O$x$, O$y$, O$z$ *désignant trois axes de coordonnées rectangulaires et* C *une courbe fermée, on considère l'intégrale curviligne*

$$\int_C xz\,dx + yz\,dy + \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2}\,dz.$$

*On demande la valeur de cette intégrale lorsque la courbe* C *est entièrement située sur une surface de révolution d'axe* O$z$.

(Grenoble, novembre 1921.)