PIERRE HUMBERT

Monographie des polynômes de Kummer

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 1 (1922), p. 81-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1922_5_1__81_0>

[H5gβ]

MONOGRAPHIE DES POLYNOMES DE KUMMER ;

PAR M. PIERRE HUMBERT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Si, dans la série hypergéométrique de Gauss

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

on fait tendre β vers l'infini, après division de x par β, on obtient la série

$$\Phi(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots$$

connue sous le nom de *série hypergéométrique confluente*, ou *fonction de Kummer*. Il est évident que si l'élément α est égal à un entier négatif $-n$, la série s'arrête après le terme de rang n, de sorte qu'on se trouve en présence d'un polynome d'ordre n, $\Phi(-n, \gamma, x)$, ou pour abréger Φ_n, que nous appellerons *polynome de Kummer*. Comme nous le verrons, ces polynomes comprennent comme cas particuliers un certain nombre de fonctions bien connues, introduites par divers auteurs; mais je ne crois pas qu'une étude des propriétés générales de ces polynomes ait été faite, au moins dans des publications de langue française. D'ailleurs les intéressants travaux de N. Sonine (*Math. Annalen*, t. 16, 1880) et de M. Mac-Arthur (*Proc. Edinburgh Math. Soc.*, t. 38, 1919-1920) n'en considèrent que certains aspects très particuliers. Je me propose de rappeler ici les principales formules de la théorie du polynome Φ_n, m'attachant à n'employer, pour les établir, que des méthodes très générales susceptibles d'être appliquées dans la plupart des questions similaires.

1. D'après sa définition, le polynome de Kummer s'écrira

$$(1)\qquad \Phi_n = 1 - \frac{nx}{\gamma . 1!} + \frac{n(n-1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

Comme on sait que l'équation différentielle de la série de Gauss est

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

on obtiendra sans difficulté, par confluence, c'est-à-dire en remplaçant x par $\frac{x}{\beta}$ et faisant tendre β vers l'infini, puis en écrivant $-n$ à la place de α, l'équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène, vérifiée par le polynome de Kummer,

$$(2)\qquad xy'' + (\gamma - x)y' + ny = 0.$$

Si l'on cherche, par la méthode des coefficients indéterminés, quels sont les polynomes d'ordre n en x vérifiant cette équation, on constate immédiatement que le seul polynome répondant à la question est précisément Φ_n, à un facteur constant près bien entendu.

Cela étant, faisons dans (2) le changement de fonction

$$y = x^{1-\gamma} e^x u,$$

nous trouvons pour u l'équation

$$(3)\qquad xu'' + (2 + \gamma + x)u' + (n+1)u = 0.$$

Considérant alors l'équation

$$(4) \qquad xz'' + (2 + \gamma - n + x)z' + z = 0,$$

dérivons n fois son premier membre, en posant $z^{(n)} = u$: nous retombons sur (3). Si donc nous connaissons une intégrale z_1 de (4), $u_1 = z_1^{(n)}$ sera une intégrale de (3), et $y_1 = x^{1-\gamma} e^x u_1$ sera une intégrale de (2). Or, comme on le constate facilement, une intégrale de (4) est

$$z_1 = x^{n+\gamma-1} e^{-x},$$

de sorte qu'une intégrale de (2) est

$$y_1 = x^{1-\gamma} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\gamma-1} e^{-x}).$$

Mais la dérivée d'ordre n de l'expression entre parenthèses est le produit, par e^{-x}, d'un polynome d'ordre $n + \gamma - 1$: donc y_1 sera un polynome d'ordre n ; d'où l'on conclut que y_1 est, à un facteur constant près, identique à Φ_n. On déterminera ce facteur en se souvenant que, dans Φ_n, le terme indépendant de x est l'unité ; or dans y_1, c'est

$$(\gamma + n - 1)(\gamma + n - 2)\ldots(\gamma + 1)\gamma,$$

ou, suivant la notation classique introduite par M. Appell, (γ, n). On arrive par conséquent à l'expression remarquable

$$(5) \qquad \Phi_n = \frac{x^{1-\gamma} e^x}{(\gamma, n)} \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\gamma-1} e^{-x})$$

d'où l'on pourra tirer également la formule

$$(6) \qquad \frac{d^p \Phi_n}{dx^p} = \frac{x^{1-\gamma-p} e^x}{(\gamma, p)} \times \frac{(-1)^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}(x^{n+\gamma-1} e^{-x}).$$

2. L'expression (5) du polynome de Kummer va nous conduire, par l'application de la formule de Lagrange, à une conséquence intéressante. Cette formule, on le sait, indique pour une fonction quelconque $F(z)$ d'une racine z de l'équation

$$z = x - tf(z)$$

le développement suivant :

$$F(z) = F(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [F'(x) f^n(x)]$$

ou, par dérivation,

$$\frac{d}{dx} F(z) = F'(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [F'(x) f^n(x)].$$

Prenons alors $f(x) = x$ et $F'(x) = x^{\gamma-1} e^{-x}$, on aura au second membre la dérivée d'ordre n qui figure dans (5), et z sera racine de l'équation

$$z = x + tz,$$

donc

$$z = \frac{x}{1-t}.$$

D'ailleurs

$$\frac{d}{dx} F(z) = F'(z) \frac{dz}{dx} = \frac{z^{\gamma-1} e^{-z}}{1-t} = \frac{x^{\gamma-1} e^{\frac{-x}{1-t}}}{(1-t)^{\gamma}}.$$

On aura donc

$$\frac{x^{\gamma-1} e^{\frac{-x}{1-t}}}{(1-t)^{\gamma}} = x^{\gamma-1} e^{-x} + \sum_{1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\gamma-1} e^{-x})$$

ou, en multipliant par $x^{1-\gamma} e^x$ et changeant le signe de t,

$$(7) \qquad \frac{e^{\frac{tx}{1+t}}}{(1+t)^{\gamma}} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} (\gamma, n) \Phi(-n, \gamma, x).$$

Cette formule, on le voit, indique pour les polynomes Φ_n une fonction génératrice. On en déduira avec la plus grande simplicité, par le procédé classique (*voir* par exemple la théorie des fonctions de Legendre), des formules de récurrence entre des polynomes Φ d'indices voisins, ou leurs dérivées. C'est ainsi qu'on obtiendra

$$(8) \qquad (n+\gamma)\Phi_{n+1} + (x-2n-\gamma)\Phi_n + n\Phi_{n-1} = 0,$$

$$(9) \qquad n\Phi_n - n\Phi_{n-1} = x\frac{d\Phi_n}{dx},$$

$$(10) \qquad (n+\gamma)\Phi_{n+1} - (n+\gamma-x)\Phi_n = x\frac{d\Phi_n}{dx}.$$

Il est évident qu'on aurait pu déduire ces formules, soit de l'expression (5) de Φ_n, soit encore, par confluence, des formules analogues de la théorie des polynomes de Jacobi, puisque l'on a évidemment

$$\lim_{\alpha \to \infty} F\left(-n, \alpha+n, \gamma, \frac{x}{\alpha}\right) = \Phi(-n, \gamma, x).$$

C'est ainsi qu'entre des polynomes Φ d'éléments γ différents, on pourra écrire des formules telles que

$$(11) \qquad \Phi(-n+1, \gamma, x) - \Phi(-n, \gamma, x) = \frac{x}{\gamma}\Phi(-n+1, \gamma+1, x),$$

$$(12) \qquad \frac{d}{dx}\Phi(-n, \gamma, x) = -\frac{n}{\gamma}\Phi(-n+1, \gamma+1, x),$$

$$(13) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\Phi(-n, \gamma, x) = \frac{n(n-1)}{\gamma(\gamma+1)}\Phi(-n+2, \gamma+2, x),$$

....

Écrivons à présent la relation (8) sous la forme

$$(n+\gamma-1)\Phi_n + (x-2n-\gamma+2)\Phi_{n-1} + (n-1)\Phi_{n-2} = 0,$$

puis la suite

$$(n+\gamma-2)\,\Phi_{n-1}+(x-2n-\gamma+4)\,\Phi_{n-2}+(n-2)\,\Phi_{n-3}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(\gamma+1)\,\Phi_2+(x-2-\gamma)\,\Phi_1-\Phi_0=0,$$
$$\gamma\,\Phi_1+(x-\gamma)\,\Phi_0=0,$$
$$\Phi_0-1=0.$$

Nous avons $(n+1)$ équations entre lesquelles nous pouvons éliminer les n quantités $\Phi_0\Phi_1\ldots\Phi_{n-1}$; le coefficient de Φ_n après cette élimination sera un déterminant dont on calculera facilement la valeur, et l'on obtiendra ainsi l'expression de Φ_n au moyen d'un déterminant à n lignes et colonnes

$$(14)\quad \Phi_n=\frac{(-1)^n}{(\gamma, n)}\times\begin{vmatrix} x-\gamma & \gamma & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 1 & x-\gamma-2 & \gamma+1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 2 & x-\gamma-4 & \gamma+2 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & x-\gamma-2n+2\end{vmatrix}.$$

3. Montrons à présent le lien qui existe entre les polynomes de Kummer et d'autres polynomes spéciaux étudiés sous diverses dénominations.

a. Polynomes de Sonine. — Introduits à l'occasion de recherches sur les fonction de Bessel (*loc. cit.*), ce sont les polynomes T définis par la fonction génératrice

$$(15)\qquad \frac{e^{\frac{\alpha x}{1+\alpha}}}{(1+\alpha)^{p+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma(p+m+1)\,\alpha^m\,\mathrm{T}_p^m(x).$$

Par comparaison avec (7), on voit aussitôt que

$$\mathrm{T}_p^m(x)=\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+1)}\,\Phi(-m, p+1, x).$$

Les polynomes de Sonine sont donc, à un facteur près et avec un léger changement de notation, identiques aux polynomes de Kummer; mais la forme que leur a donnée Sonine a l'inconvénient de ne pas faire apparaître le caractère hypergéométrique de ces fonctions.

b. Polynomes de Laguerre. — Définis par Laguerre (*Œuvres*, t. **1**, p. 434) sous la forme

$$(16) \qquad f_n(x) = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^x),$$

ils sont exprimés, comme on le voit en comparant avec (5), par

$$n!\,\Phi(-n, 1, -x).$$

c. Polynomes d'Abel. — Ce sont les polynomes (Abel, *Œuvres*, t. **2**) définis par

$$(17) \qquad \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = \Sigma h^m \varphi_m(x)$$

et l'on a par conséquent

$$\varphi_m(x) = \Phi(-m, 1, x).$$

d. Polynomes de Milne et Vaney. — Comme généralisation des polynomes de Laguerre, M. Archibald Milne (*Proc. Edinb. Math. Soc.*, t. **33**, 1914-1915) a considéré les polynomes

$$(18) \qquad \psi_n(x) = (-1)^n e^{kx} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-kx} x^n)$$

et M. Félix Vaney (*Thèse*, Lausanne, 1921) les polynomes

$$(19) \qquad P_n(x, a) = e^{-\frac{x}{a}} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{\frac{x}{a}}\right).$$

On verra sans difficulté que l'on a

$$\psi_n(x) = (-1)^n n!\,\Phi(-n, 1, kx),$$

$$P_n(x, a) = a^n \Phi\left(-n, 1, -\frac{x}{a}\right).$$

e. Polynomes d'Hermite. — Définis, on le sait, par $U_n(x) = e^{\frac{ax^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{ax^2}{2}}\right)$ ils s'écrivent, suivant les cas,

$$U_{2m}(x) = (-1)^m a^m . 1 . 3 \ldots (2m-1) \times \left[1 - \frac{2max^2}{2!} + \frac{2m(2m-2)a^2x^4}{4!} - \ldots\right],$$

$$U_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} a^{m+1}\, 1 . 3 \ldots (2m+1) \times \left[x - \frac{2max^3}{3!} + \frac{2m(2m-2)a^2x^5}{5!} - \ldots\right].$$

On aura donc, en comparant avec (1),

$$U_{2m}(x) = (-1)^m a^m . 1 . 3 \ldots (2m-1)\Phi\left(-m, \frac{1}{2}, \frac{ax^2}{2}\right),$$

$$U_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} a^{m+1} . 1\, 3 \ldots (2m+1) x\Phi\left(-m, \frac{3}{2}, \frac{ax^2}{2}\right).$$

f. Ajoutons enfin qu'avec la notation de M. Whittaker (*Modern Analysis*, 2^e édition), on écrirait le polynome de Kummer

$$\Phi(-n, \gamma, x) = x^{-\frac{\gamma}{2}} e^{\frac{x}{2}} M_{\frac{\gamma}{2}+n, \frac{\gamma}{2}-1}(x).$$

4. Reprenons l'équation différentielle (2) à laquelle satisfait Φ_n, et faisons le changement de variable $y = x^{1-\gamma} z$. Nous trouvons

$$xz'' + (2 - \gamma - x) z' + (n + \gamma - 1) z = 0. \tag{20}$$

C'est encore une équation du type hypergéométrique confluent, et l'une de ses solutions est la série

$\Phi(-n-\gamma+1, 2-\gamma, x)$. Une solution de (2) sera donc la série

$$x^{1-\gamma}\Phi(-n-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

évidemment distincte de Φ_n, et pouvant par conséquent être considérée comme la deuxième intégrale particulière de (2), dont la solution générale sera ainsi

$$(21)\quad y = A\Phi(-n, \gamma, x) + Bx^{1-\gamma}\Phi(-n-\gamma+1, 2-\gamma, x).$$

On pourra d'ailleurs avoir cette deuxième intégrale sous la forme d'Euler

$$\Phi_n(x)\int_{-\infty}^{x} \frac{x^{-\gamma}e^{x}\,dx}{[\Phi_n(x)]^2}.$$

Mise sous forme canonique, l'équation (2) s'écrira

$$(22)\qquad \frac{d}{dx}\left[x^{\gamma}e^{-x}\frac{dy}{dx}\right] + nx^{\gamma-1}e^{-x}y = 0.$$

D'après les résultats classiques de Sturm sur les équations de ce type, on pourra écrire les relations intégrales importantes (propriété d'orthogonalité)

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x}\Phi_n(x)\Phi_m(x)\,dx = 0 \\ &\int_0^\infty \frac{d\Phi_n}{dx}\,\frac{d\Phi_m}{dx}\,dx = 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{pour } m \neq n.$$

Dans le cas $m = n$, l'intégrale

$$I_m = \int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-x}[\Phi_n(x)]^2\,dx$$

se calculera aisément, en mettant Φ_n sous la forme (5), et par une suite d'intégrations par parties ; on trouvera

$$(24)\qquad I_m = n!\,\frac{\Gamma(\gamma+n)}{[(\gamma,n)]^2} = n!\,\frac{\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}.$$

Signalons la formule, bien facile à établir,

$$(25)\qquad \Phi(-n,\gamma,x) = e^x\Phi(\gamma+n,\gamma,-x).$$

Ainsi que celle-ci, qui se rattache aux suites de Sturm, et se démontre à partir de la relation (8),

$$(26)\qquad \frac{(n+\gamma)}{I_n}\,\frac{\Phi_{n+1}(z)\,\Phi_n(x)-\Phi_{n+1}(x)\,\Phi_n(z)}{z-x} = \sum_{p=0}^{p=n}\frac{\Phi_p(x)\,\Phi_p(z)}{I_p}.$$

5. Si dans la fonction de Gauss nous divisons x par $\alpha\beta$ et faisons croître indéfiniment α et β, nous obtenons la série

$$1+\frac{x}{\gamma\cdot 1}+\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)\,2!}+\ldots,$$

que nous désignerons par $\Xi(\gamma,x)$, et qui, on le sait, n'est autre chose qu'une modification de la fonction de Bessel ; on a en effet

$$\Xi(\gamma,x) = \Gamma(\gamma)\,x^{\frac{1-\gamma}{2}}\,i^{1-\gamma}J_{\gamma-1}(2i\sqrt{x}).$$

Il est évident qu'on a par conséquent

$$(27)\qquad \lim_{n\to\infty}\Phi\left(-n,\gamma,-\frac{x}{n}\right) = \Xi(\gamma,x).$$

Mais de plus, ainsi que l'a montré Kummer (*Crelle*, t. 15, p. 139), la série Φ se réduit dans certains cas à la série Ξ, et l'on a

$$\Phi(\alpha,2\alpha,x) = e^{\frac{x}{2}}\,\Xi\left(\alpha-\frac{1}{2},\frac{x^2}{16}\right).$$

Nous aurons donc pour nos polynomes, lorsque $\gamma = -2n$,

$$(28)\qquad \Phi(-n, -2n, x) = e^{\frac{x}{2}}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)2^{2n+1}i^{n+\frac{1}{2}}x^{n+\frac{1}{2}}J_{-n-\frac{1}{2}}\left(\frac{ix}{2}\right).$$

Ce ne sont pas les seuls liens qui rattachent les polynomes de Kummer à la fonction de Bessel; on en peut obtenir un autre très remarquable de la façon suivante : considérons le polynome d'ordre n

$$X_n = x^n \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right).$$

En dérivant par rapport à x, on aura

$$X'_n = n x^{n-1}\Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)}\Phi_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mais par (9),

$$\frac{1}{x}\,\frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)}\Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) = n\left[\Phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - \Phi_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

D'où l'on tire

$$X'_n = n x^{n-1}\Phi_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) = n X_n.$$

Les polynomes X_n forment donc une suite de M. Appell, et si l'on cherche leur fonction génératrice (au sens de M. Appell), c'est-à-dire la fonction $a(h)$ telle que

$$(29)\qquad a(h)\,e^{hx} = \sum \frac{h^m}{m!}X_m(x),$$

on trouve

$$a(h) = 1 - \frac{h}{\gamma . 1} - \frac{h^2}{\gamma(\gamma+1)2!} - \ldots,$$

c'est-à-dire la série $\Xi(\gamma, -h)$. Écrivant alors (29) en remplaçant X par sa valeur en fonction de Φ, Ξ par sa valeur en fonction de J, et mettant x à la place de $\frac{1}{x}$ et hx à la place de $-h$, nous arrivons à la relation obtenue autrefois par Sonine en suivant une voie très détournée

$$(30)\quad e^{-h} J_{\gamma-1}(2i\sqrt{hx}) = (i\sqrt{hx})^{\gamma-1} \sum_n \frac{(-1)^n h^n}{n!\,\Gamma(\gamma)} \Phi_n(x).$$

6. Pour terminer, et afin d'être aussi complet que possible dans la monographie de ces polynomes, j'indique encore les formules de duplication de l'argument x et de duplication de l'indice n, que j'ai établies, la première dans une Note aux *Comptes rendus* (1921), la seconde dans un Mémoire actuellement sous presse au *Bulletin de la Société mathématique de France* :

$$(31)\quad \Phi(-n, \gamma, 2x) = (-1)^n \sum_\mu \sum_\nu \frac{(-n, \mu+\nu)}{\mu!\,\nu!} \Phi(-\mu-\nu, \gamma, x),$$

$$(32)\quad \Phi(-2n, \gamma, x) = \Gamma(\gamma) \sum_{q=0}^{q=n} (-1)^q \frac{\Gamma(\gamma+q-1)\,n^2(n-1)^2\ldots(n-q+1)^2}{q!\,\Gamma(\gamma+2q-1)\,\Gamma(\gamma+2q)} \times x^{2q} \Phi^2(-n+q, \gamma+2q, x).$$

Leur démonstration, fondée sur les propriétés des fonctions hypergéométriques de deux variables, ne saurait trouver place ici. Pour la même raison, je me contente d'énoncer, d'après M. Nielsen (*Integral logarithmus*), la remarque suivante : le polynome $(\gamma, n)\,\Phi(-n, \gamma, -x)$ est le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite dans le développement en fraction continue de l'expression

$$x^{\gamma-1} e^x \int_1^\infty e^{-x} x^{-\gamma}\, dx.$$