

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.



NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

DIRIGÉ PAR

R. BRICARD,
Professeur au Conservatoire national
des Arts et Métiers
et à l'École Centrale des Arts et Manufactures

H. VILLAT,
Correspondant de l'Académie des Sciences
Professeur à l'Université de Strasbourg
Directeur du Journal de Mathématiques pures
et appliquées

J. PÈRES,

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, AN TOMARI,
DUPORCQ, BOURLET, LAISANT.

CINQUIÈME SÉRIE. **BIBLIOTHÈQUE**
TOME II. **UNIVERSITAIRE**
(LXXXI^e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1923

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

[A 2a]

SUR LA THÉORIE DES FORMES LINÉAIRES ;

PAR ÉMILE BOREL.

On expose généralement la théorie des formes linéaires comme conséquence de la théorie des équations linéaires et des déterminants; il me paraît intéressant de montrer comment on peut l'exposer directement. Cette manière de procéder familiariserait les élèves avec des méthodes fécondes en analyse.

THÉORÈME I. — *Une fonction continue qui satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$(1) \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

est nécessairement de la forme $\varphi(x) = Ax$, A désignant une constante.

On déduit aisément de (1) que, α étant un nombre rationnel, on a

$$(2) \quad \varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$$

et l'hypothèse de la continuité entraîne l'égalité (2), quel que soit α . Il suffit, dans (2), de poser $\alpha = X$,

(2)

$x = 1, \varphi(1) = A$ pour obtenir

$$\varphi(X) = AX, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉOREME II. — *Une fonction continue de n variables qui satisfait à l'équation fonctionnelle*

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

est nécessairement de la forme

$$\varphi = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n,$$

où A_1, A_2, \dots, A_n désignent des constantes.

Pour abrégier les écritures, bornons-nous au cas de deux variables (1). On obtiendra, comme dans le théorème I,

$$\varphi(\alpha x, \alpha y) = \alpha \varphi(x, y).$$

De même

$$\varphi(\beta x_1, \beta y_1) = \beta \varphi(x_1, y_1)$$

et, par suite,

$$\varphi(\alpha x + \beta x_1, \alpha y + \beta y_1) = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(x_1, y_1).$$

Il suffit de poser

$$\begin{aligned} x = 1, \quad x_1 = 0; \quad y = 0, \quad y_1 = 1; \\ \alpha = X, \quad \beta = Y; \\ \varphi(1, 0) = A, \quad \varphi(0, 1) = B; \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\varphi(X, Y) = AX + BY. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

(1) On pourrait aussi ramener le cas de plusieurs variables au cas d'une seule au moyen de l'égalité

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y).$$

Mais la méthode du texte me parait plus instructive.

DÉFINITIONS. — On appelle *forme linéaire* un polynôme homogène du premier degré. On dit que k formes linéaires sont *indépendantes* lorsqu'elles peuvent prendre des valeurs quelconques, pour des valeurs convenablement choisies des variables. Il existe au moins un système de n formes indépendantes à n variables, ce sont ces variables elles-mêmes

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Le théorème II peut être énoncé sous la forme abrégée : *l'équation fonctionnelle (3) caractérise les formes linéaires à n variables.*

THÉORÈME III. — *Étant données k formes linéaires indépendantes à n variables, f_1, f_2, \dots, f_k , pour qu'une $(k+1)^{\text{ième}}$ forme f_{k+1} constitue avec elles un système de $k+1$ formes indépendantes, il faut et il suffit qu'il existe deux systèmes de valeurs des variables x_1, x_2, \dots, x_n ; y_1, y_2, \dots, y_n donnant aux k premières formes les mêmes valeurs a_1, a_2, \dots, a_k et à f_{k+1} deux valeurs distinctes a_{k+1} et b_{k+1} ($a_{k+1} - b_{k+1} \neq 0$).*

Donnons-nous $k+1$ nombres arbitraires $m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}$. Les formes f_1, f_2, \dots, f_k étant indépendantes, il y a des valeurs u_1, u_2, \dots, u_n des variables qui leur font prendre les valeurs m_1, m_2, \dots, m_k ; pour ces valeurs u , la forme f_{k+1} prend la valeur l_{k+1} . Si l'on pose

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + \lambda(x_1 - y_1), & v_2 &= u_2 + \lambda(x_2 - y_2), & \dots, \\ v_n &= u_n + \lambda(x_n - y_n), \end{aligned}$$

les formes données prendront pour v_1, \dots, v_n les valeurs données $m_1, m_2, \dots, m_k, m_{k+1}$ pourvu que λ

soit donné par la relation

$$l_{k+1} + \lambda (a_{k+1} - b_{k+1}) = m_{k+1}.$$

Le théorème III entraîne le corollaire suivant, qui n'est en réalité qu'une autre forme de son énoncé.

COROLLAIRE. — *Étant données k formes indépendantes f_1, f_2, \dots, f_k et une $k+1$ ^{ième} forme quelconque f_{k+1} , de deux choses l'une : ou bien les $k+1$ formes sont indépendantes ou bien, lorsque l'on assigne aux k premières des valeurs quelconques a_1, a_2, \dots, a_k , la valeur a_{k+1} de f_{k+1} est déterminée d'une manière unique.* Plaçons-nous dans ce dernier cas et considérons, outre le système des valeurs a_1, a_2, \dots, a_k , un autre système quelconque b_1, b_2, \dots, b_k et enfin le système c_1, c_2, \dots, c_k défini par les relations

$$c_1 = a_1 + b_1, \dots, c_k = a_k + b_k.$$

Il est clair que si l'on désigne par x_1, x_2, \dots, x_n l'un des systèmes des valeurs des variables qui donnent aux formes les valeurs a_1, a_2, \dots, a_k , par y_1, y_2, \dots, y_n l'un des systèmes qui leur donnent les valeurs b_1, b_2, \dots, b_k , le système

$$z_1 = x_1 + y_1, \dots, z_n = x_n + y_n$$

sera l'un des systèmes qui leur donnent les valeurs c_1, c_2, \dots, c_k . On en conclut que la valeur correspondante c_{k+1} de f_{k+1} , qui, par hypothèse, est déterminée, est égale à $a_{k+1} + b_{k+1}$.

Par suite ⁽¹⁾, en vertu du théorème II, la forme f_{k+1} est une forme linéaire en f_1, f_2, \dots, f_k . Donc :

THÉORÈME IV. — *Lorsque l'on a k formes indé-*

(1) Nous admettons ici la continuité, qu'il serait facile de prouver par des raisonnements élémentaires.

On peut par exemple utiliser le fait que la valeur de λ donnée

pendantes à n variables, une $k + 1^{\text{ième}}$ forme quelconque, ou bien constituée avec f_1, \dots, f_k un système de $k + 1$ formes indépendantes, ou bien est une forme linéaire en f_1, f_2, \dots, f_k .

Il ne reste plus, pour compléter ce théorème, qu'à démontrer un dernier théorème.

THÉORÈME V. — *Il ne peut pas exister plus de n formes indépendantes à n variables.*

Nous supposons le théorème établi pour $n - 1$ variables. Soient alors f_1, f_2, \dots, f_{n+1} , $n + 1$ formes indépendantes à n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Si aucune de ces formes ne renferme x_n , cela contredit l'hypothèse qu'il ne peut y avoir plus de $n - 1$ formes indépendantes à $n - 1$ variables. Soient donc l_{n+1} le coefficient différent de zéro de x_n dans f_{n+1} et l_1, l_2, \dots, l_n les coefficients de x_n dans f_1, f_2, \dots, f_n ; les formes

$$\begin{aligned} g_1 &= l_{n+1} f_1 - l_1 f_{n+1}, \\ g_2 &= l_{n+1} f_2 - l_2 f_{n+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ g_n &= l_{n+1} f_n - l_n f_{n+1} \end{aligned}$$

sont à $n - 1$ variables; elles peuvent prendre des valeurs arbitraires b_1, b_2, \dots, b_n , puisqu'il suffit de poser $f_{n+1} = a_{n+1}$,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{b_1 + l_1 a_{n+1}}{l_{n+1}}, \\ &\dots\dots\dots \\ f_n &= \frac{b_n + l_n a_{n+1}}{l_{n+1}}, \end{aligned}$$

dans le calcul du théorème III est une fonction continue de m_{i+1} ; on a ainsi une démonstration par récurrence.

Bien entendu, le fait sur lequel on s'appuie est le suivant : *l'un des systèmes de valeurs des variables, qui donnent à des formes linéaires des valeurs infiniment petites, est infiniment petit.*

et que f_1, f_2, \dots, f_{n+1} sont supposées indépendantes. L'hypothèse est donc contredite et le théorème est démontré.

On en conclut immédiatement que, si l'on a un système de n formes indépendantes à n variables, il existe un seul système de valeurs des variables leur faisant prendre des valeurs données, car s'il existait deux tels systèmes, dans lesquels les variables n'auraient pas toutes les mêmes valeurs, on aurait par exemple $x_1 = \alpha$ et $x_1 = \beta$, et la forme x_1 constituerait avec les formes données, d'après le théorème III, un système de $n + 1$ formes indépendantes.

On remarquera que les démonstrations données ne se contentent pas de prouver l'existence de certaines relations ou de certains systèmes de valeurs des variables, mais donnent le moyen de les déterminer. D'une manière précise, elles donnent le moyen de traiter tous les problèmes relatifs à $k + 1$ équations linéaires ou à $k + 1$ formes lorsque l'on sait traiter les mêmes problèmes pour k équations ou k formes.

REMARQUE. — Pour donner un exemple de la facilité avec laquelle les théorèmes établis permettent de démontrer toutes les propositions relatives aux équations linéaires, proposons-nous de prouver que *lorsque l'on donne les valeurs de k formes linéaires indépendantes à n variables ($k < n$) les valeurs de $n - k$ précisément de ces variables peuvent être prises arbitrairement*. En effet, si chacune des n variables x_1, x_2, \dots, x_n était déterminée, ces n variables seraient des formes linéaires en f_1, f_2, \dots, f_k ; comme ces formes x_1, x_2, \dots, x_n seraient indépendantes, on est en contradiction avec le théorème III.

Nous devons donc admettre qu'une des variables au

moins, par exemple x_1 forme avec f_1, f_2, \dots, f_k un système de $k + 1$ formes indépendantes.

Si l'on a $k + 1 < n$, on peut raisonner sur ce nouveau système comme sur le précédent; si x_2, x_3, \dots, x_n s'exprimaient linéairement au moyen de ces $k + 1$ formes, comme c'est le cas aussi pour x_1 , on aurait n formes indépendantes de $k + 1 < n$ variables. Il y a donc au moins une variable x_2 qui constitue avec $f_1, f_2, \dots, f_k, x_1$ un système de $k + 2$ formes indépendantes. On continuera de même et l'on adjoindra d'autres variables x_3, \dots, x_p jusqu'à ce que l'on ait $k + p = n$; on a alors n formes indépendantes à n variables et x_{p+1}, \dots, x_n s'expriment nécessairement au moyen de ces n formes.

On voit que le théorème essentiel est le théorème III, d'après lequel, lorsque l'on donne les valeurs d'un certain nombre de formes linéaires (*indépendantes*), la valeur de toute autre forme linéaire est, ou bien absolument déterminée, ou bien entièrement arbitraire. Cet énoncé s'étend de lui-même au cas où l'on y supprime le mot (*indépendantes*).

[O'5a]

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA FORMULE DE STOKES ;

PAR A. BUHL.

1. On trouvera, dans ce qui suit, quelques développements qui pourraient s'ajouter au Chapitre II de mon opuscule intitulé *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* (1). Je ferai quelques renvois à cette

(1) *Collection Scientia*, n° 36 (Gauthier-Villars et C^{ie}, éditeurs)

publication (indiquée simplement par les initiales I. D.), mais cela n'empêchera pas les lignes qui suivent de se suffire aisément à elles-mêmes.

Il s'agit d'intégrales doubles du type stokien, c'est-à-dire de la forme

$$\int \int_s (\alpha F + \beta G + \gamma H) d\sigma,$$

la condition

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

étant réalisée. Ces intégrales ne dépendent que du contour C de la cloison S et, qu'on les réduise explicitement ou non à des intégrales de ligne étendues à C, elles ont des propriétés géométriques spéciales et particulièrement intéressantes.

Je reviens surtout sur des volumes tournants dont les propriétés se rattachent aux résultats généraux de M. G. Kœnigs (*Journal de Mathématiques*, 1889), mais qu'on peut cependant voir sous des aspects élémentaires et directs bien dignes d'être signalés.

Je termine avec des sommes abéliennes de volumes coniques. En toutes ces questions, on rencontre beaucoup d'équations linéaires aux dérivées partielles dont la complication varie avec des modifications d'énoncés toujours faciles à apercevoir. On a ainsi le moyen de constituer une mine de problèmes sur lesquels les candidats à l'Agrégation pourront méditer utilement.

2. Volumes tournants V et surfaces de révolution.

— On sait, et il est d'ailleurs bien facile d'établir, que si une portion de surface, ou cloison S, tourne, dans l'espace, autour d'un axe AB passant par A(a, b, c) et de cosinus directeurs λ, μ, ν , le volume conical en-

gendré est (I. D., p. 25)

$$(1) \quad V = 2\pi \int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma.$$

Pour éviter toute difficulté, nous supposons que AB est complètement extérieur à S. Comme d'habitude α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à S en l'élément $d\sigma$.

Si cette cloison S, ou simplement son contour C, faisaient partie d'une surface de révolution d'axe AB, il est clair que V serait nul, remarque qui conduit immédiatement à cet énoncé : *Si l'on égale à zéro le déterminant de l'intégrale double exprimant V, on obtient l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de AB.* Cette équation aux dérivées partielles a déjà été donnée sous une telle forme, par exemple par H. Laurent dans son *Traité d'Analyse* (t. VI, p. 16)), mais il y a, en la formule (1), une interprétation, de son premier membre, à laquelle on pense sans doute beaucoup moins.

3. *Volumes dus à des cloisons sphériques.* — La formule (1) redonne aisément le théorème de Guldin ordinaire et aussi le théorème de M. G. Kœnigs sur le volume tournant engendré par un contour plan animé d'une rotation autour d'un axe *quelconque* (I. D., p. 27).

Mais si simples que soient ces applications, ce ne sont cependant pas *les plus simples*, contrairement à ce que l'on pourrait naturellement croire. Il y a une simplicité spéciale, indépendante notamment de toute considération de centre de gravité, en les volumes tournants dus à des cloisons sphériques.

Soit l'élément $d\sigma$ sur une sphère de centre O et de rayon R. Le plan Oxy sera OAB et Oy sera pris parallèle à AB. Alors

$$\alpha = \frac{x}{R}, \quad \beta = \frac{y}{R}, \quad \gamma = \frac{z}{R},$$

et, AB passant par A($a, 0, 0$), il vient

$$V = 2\pi a \int \int_S \frac{z}{R} d\sigma.$$

L'intégrale double figurant dans cette égalité représente la projection sur OAB de l'aire sphérique S.

Le volume tournant dû à une cloison S sphérique, de centre O, pour un axe de rotation AB quelconque, est égal au produit de la circonférence décrite par O par l'aire de la projection S' de S sur le plan OAB.

Ce résultat a déjà été démontré, par une méthode différente, dans les *Comptes rendus des séances de la Société mathématique* (23 février 1921).

On peut évidemment tirer du théorème plusieurs corollaires sur des V équivalents du fait qu'on aura déplacé ou déformé S sans modifier sa projection S'.

4. *Volumes V généraux pour AB axe Oz.* — Nous prenons maintenant une cloison tout à fait quelconque, appartenant à une surface $z = f(x, y)$. On a

$$\alpha d\sigma = -p dx dy, \quad \beta d\sigma = -q dx dy, \quad \gamma d\sigma = dx dy$$

et (1) donne

$$(2) \quad V = 2\pi \int \int_S (py - qx) dx dy.$$

Remarquons que $py - qx = 0$ est l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution d'axe Oz.

Partant de (2), on peut se proposer diverses ques-

tions intéressantes. On peut chercher les surfaces S pour lesquelles l'intégrale double a une forme déterminée, ou une forme qui exprime V par quelque autre quantité géométrique. Ainsi soit

$$(3) \quad py - qx = -\frac{\alpha}{\Phi'(z)},$$

le second membre de cette égalité étant une fonction de z seul ayant la forme indiquée pour faciliter des calculs ultérieurs. Or (3) est une équation aux dérivées partielles dont l'intégrale générale, en coordonnées semi-polaires, est

$$(4) \quad \Phi(z) = a\theta + F(r).$$

Ces surfaces ont déjà été étudiées ici-même, d'un point de vue très différent (*Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures*; N. A., 1908, 1909, 1910).

On peut les définir comme surfaces telles que le triangle, formé par l'origine et les intersections avec Oxy de l'ordonnée et de la normale, ait une aire ne dépendant que de z . On voit que, pour une certaine cloison S prise sur l'une quelconque de ses surfaces, on aura aussi la propriété remarquable

$$(5) \quad V = -2\pi a \int_S \frac{dx dy}{\Phi'(z)}.$$

Soit $\Phi(z) = z$. Une cloison S, appartenant à l'hélicoïde

$$z = a\theta + F(r),$$

donne un volume tournant, d'axe Oz, égal au produit de $2\pi a$ par l'aire plane contenue dans la projection de S sur Oxy .

Soit $\Phi(z) = \log z$. Une cloison S, appartenant à

la surface

$$\log z = a\theta + F(r),$$

donne un volume tournant, d'axe Oz , proportionnel au volume cylindrique U_z compris entre S et sa projection S' sur Oxy . Le facteur de proportionnalité est, en valeur absolue, $2\pi a$; il doit évidemment être considéré comme purement numérique alors que, dans le théorème précédent, a était une longueur. Remarquons encore que, dans le second théorème, il y a une proportionnalité entre volumes qui est absolument analogue à la proportionnalité entre aires dans le théorème de la projection des aires planes; le facteur $2\pi a$ est arbitraire tout comme le cosinus d'un angle de projection.

§. *Généralisations du théorème de M. G. Königs.*
— Revenons maintenant à la formule (2) et supposons que l'on ait

$$py - qx = kx.$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$(6) \quad z + ky = f(r);$$

on a donc, pour ces surfaces,

$$V = 2\pi k \int \int_S x \, dx \, dy.$$

Or, le second nombre de cette égalité, abstraction faite du facteur de proportionnalité k , est le volume tournant, d'axe Oy dû à l'aire plane S' projection de S sur Oxy . Donc :

Le volume tournant, d'axe Oz , dû à une cloison S appartenant à la surface (6), est proportionnel au

volume tournant, d'axe Oy, dû à la projection S', de S, sur le plan Oxy.

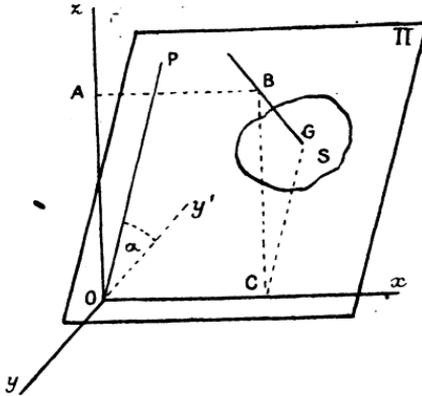
Là encore cette proportionnalité rappelle la projection des aires planes. La surface (6) est le lieu de sections obliques et parallèles de cylindres circulaires d'axe Oz; faire varier le coefficient de proportionnalité k , c'est faire varier l'obliquité des ellipses génératrices.

Remarquons qu'il y a, en (6), des surfaces élémentaires qui font facilement image; par exemple, le cône et le parabolöide elliptiques

$$(7) \quad (z + ky)^2 = \lambda(x^2 + y^2), \quad z + ky = \mu(x^2 + y^2).$$

Mais, plus simplement encore, il y a, en (6), le plan $z + ky = 0$ d'où un théorème tout à fait équivalent à celui de M. G. Kœnigs (I. D., p. 27) et qui, d'ailleurs, s'y ramènera sans peine.

Soit une aire plane S dont le plan II est rencontré



en O par un axe quelconque Oz. Soient OP la projection de Oz sur II, y'Oy' la perpendiculaire à Oz

dans le plan zOP et à l'angle POy' . Le volume tournant V , d'axe Oz , dû à S , est égal au produit de $\tan \alpha$ par le volume tournant V' , d'axe Oy , dû à la projection S' de S sur le plan yOx .

Jusqu'ici, il n'est point question de centre de gravité; cette notion n'interviendra que pour déduire V' de S' à l'aide du théorème de Guldin ordinaire. On aura ainsi, en observant que le G de S donne, par projection, le G' de S' , et avec les notations indiquées sur la figure,

$$V = k \cdot 2\pi \overline{OC} \cdot S' = 2\pi \tan \alpha \cdot \overline{OC} \cdot S \cos \alpha = 2\pi \sin \alpha \cdot \overline{OC} \cdot S.$$

Voyons maintenant ce que donnerait le théorème de M. Kœnigs. Il repose sur la considération d'une normale GB , menée à S en son G , puis de la plus courte distance AB ; le volume V est alors égal au produit de $2\pi \overline{AB}$ par la projection de S sur le plan OAB . Donc

$$V = 2\pi \overline{AB} \cdot S \sin \alpha.$$

C'est bien le résultat précédent puisque, par construction, $OC = AB$.

L'analogie avec un théorème de projection est ici particulièrement évidente puisque

$$S' = S \cos \alpha, \quad V' = V \cot \alpha.$$

Si l'on considère isolément le théorème que l'on vient d'établir, on n'y voit qu'une transformation aisée de celui de M. Kœnigs et l'intérêt est minime; mais cet intérêt est, au contraire, très notable, si l'on réfléchit que le théorème s'étend aux cloisons prises sur les quadriques (7) et plus généralement sur les surfaces (6).

SOMMES ABÉLIENNES DE VOLUMES CONIQUES.

6. Soit la surface algébrique

$$(8) \quad \varphi_m(X, Y, Z) + \varphi_{m-1}(X, Y, Z) + \dots + \varphi_0 = 0.$$

Soit aussi, en dehors de cette surface et sans relation avec elle, un contour fermé quelconque C qui permet de définir un cône OC de sommet O . Ce cône détermine, dans la surface algébrique, m cloisons; entre l'une d'elles et le sommet O est un volume conique τ_i bien déterminé et la somme abélienne de ces m volumes est

$$\sum \tau_i = \int \int_S \Lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z) d\sigma$$

si

$$\Lambda = -\frac{\varphi_{m-1}^3}{3\varphi_m^3} + \frac{\varphi_{m-1}\varphi_{m-2}}{\varphi_m^2} - \frac{\varphi_{m-3}}{\varphi_m}.$$

Ce Λ doit être exprimé avec les variables minuscules x, y, z ; la cloison d'intégration S est quelconque sur le contour C qui la limite (I. D., p. 30).

Ceci posé, on peut précisément chercher à déterminer la surface S pour que l'intégrale double précédente ait une forme donnée à l'avance; pour que, par exemple,

$$\sum \tau_i = \int \int_S f(x, y, z) dx dy.$$

Ceci entraîne l'équation aux dérivées partielles

$$\Lambda(-px - qy + z) = f(x, y, z),$$

qui peut s'écrire, Λ étant homogène d'ordre -3 ,

$$px + qy = z - \frac{f}{\Lambda} = z - x^3 f(x, y, z) \lambda \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right).$$

Les équations des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^3 f(x, y, z) \lambda \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right)},$$

d'où $y = Cx$ et l'équation différentielle

$$(9) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} - x^2 f(x, Cx, z) \lambda \left(C, \frac{z}{x} \right).$$

C'est ici que les difficultés peuvent commencer car, suivant les formes de f et λ , cette équation peut appartenir à des types intégrables très simples ou à des types des plus rebelles. Si l'on veut avoir des résultats géométriques tangibles, il faut évidemment s'en tenir aux types simples.

Dans le même ordre d'idées, remarquons que les surfaces algébriques, dont l'équation (8) ne contient pas de second terme, ont un Λ particulièrement réduit.

Soit la surface d'équation

$$(10) \quad z^3 \varphi_{m-3} + \star + \varphi_{m-2} + \varphi_{m-3} + \dots + \varphi_0 = 0.$$

On a

$$\Lambda = -\frac{1}{z^3}, \quad \lambda \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) = -\frac{z^3}{x^3}.$$

Soit $f(x, y, z)$ réduit à une simple constante a . Alors l'équation (9) est

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + a \frac{z^3}{x},$$

d'où

$$\frac{z^2}{1 + az^2} = Cx^2 \quad \text{et} \quad \frac{z^2}{1 + az^2} = x^2 \varphi \left(\frac{y}{x} \right),$$

pour équation des cloisons S , à contour C , donnant un cône OG déterminant, dans la surface (10), un $\Sigma \tau_i$ égal à aS' , si S' est l'aire plane projection de S

sur Oxy . Bien entendu, φ est une fonction arbitraire. Le résultat subsiste pour α nul; la cloison S est alors placée latéralement sur une surface qui devient aussi conique, avec O pour sommet, et, dans ces conditions, $\Sigma\tau_i$ est nul.

Nous n'insisterons pas davantage sur des résultats de ce genre qui pourraient être variés presque indéfiniment en cherchant à exprimer le $\Sigma\tau_i$ des surfaces algébriques les plus quelconques au moyen des aires S' , des volumes cylindriques U_x , des volumes tournants dus à S' , ..., et ce par l'intermédiaire de surfaces S dépendant d'équations linéaires aux dérivées partielles dont l'intégration dépend d'une équation différentielle du type (9).

[B12]

UNE PREMIÈRE LEÇON SUR LES NOMBRES COMPLEXES;

PAR R. THIRY

(Strasbourg).

1. L'introduction dans l'enseignement de la notion si féconde de nombre complexe se heurte toujours au début à quelques difficultés d'ordre pédagogique. Il est en effet impossible de faire comprendre dès l'abord aux élèves l'utilité de ces nouveaux éléments de calcul, et l'attitude *a priori* que le professeur est presque forcé de prendre, jointe quelquefois à des façons de parler défectueuses ainsi qu'à une sorte de mysticisme enveloppant les quantités improprement dites « imaginaires », tout cela risque de dérouter les élèves.

Deux procédés sont le plus souvent employés pour définir les quantités complexes et caractériser leurs propriétés. Le premier consiste à regarder les nombres complexes comme des expressions linéaires d'une variable i et à leur appliquer les règles des opérations sur les polynomes, en convenant de remplacer systématiquement tout polynome de degré supérieur au premier par le reste de sa division par $i^2 + 1$. Ce procédé, indiqué par Cauchy dans sa théorie des équivalences algébriques, a de nombreux adeptes; il présente à mon avis l'inconvénient de paraître aux élèves excessivement arbitraire et d'introduire dans une question purement arithmétique des considérations, auxquelles on ne pensera plus guère par la suite, sur la division des polynomes à une variable. Le deuxième procédé consiste à créer une arithmétique des groupes de deux nombres comme on l'a fait pour les nombres pris isolément. On en trouvera une exposition type dans les leçons d'Analyse de Ch. Méray (1). L'arbitraire se trouve alors rejeté dans la définition des opérations, en particulier de la multiplication, et d'autre part l'exposé ainsi obtenu, logiquement très satisfaisant, est généralement regardé comme trop abstrait pour des débutants.

Mon but, dans le présent article, est d'exposer ce deuxième procédé sous une forme qui me paraît simple et naturelle. Je n'ai du reste nullement l'intention de faire une « leçon » sur les nombres complexes, mais simplement d'indiquer les grandes lignes d'une méthode

(1) Parmi les livres d'enseignement élémentaire utilisant ce procédé citons seulement les *Leçons d'Algèbre élémentaire* de Carlo Bourlet, le *Cours de Mathématiques générales* de E. Vessiot et P. Montel et *Les Mathématiques de l'Élève Ingénieur* de M. Weber. En particulier, les idées exposées dans ce dernier ouvrage se rapprochent beaucoup de celles que l'on trouvera ici.

d'exposition. En particulier, je supprime naturellement tous les théorèmes concernant le développement de la théorie une fois les notions de base introduites; le lecteur les rétablira sans peine avec leurs démonstrations plus ou moins classiques.

2. REVISION DES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES RELATIFS.

— Dès que l'on a justifié par des exemples simples l'utilité de l'introduction des nombres relatifs, une représentation géométrique évidente consiste, après avoir fait choix d'une unité de longueur, à regarder un tel nombre a comme l'abscisse d'un point M sur une droite orientée $x'Ox$ portant un point origine O .

Deux points de vue sont alors possibles :

I. *Le point M peut être regardé comme déduit du point O par une translation de grandeur $|a|$, de sens Ox ou Ox' suivant le signe de a .*

II. *Si l'on considère sur la droite $x'Ox$ le point U d'abscisse $+1$, le segment \overline{OM} peut être regardé comme déduit du segment \overline{OU} par une homothétie positive de rapport $|a|$ accompagnée ou non d'une symétrie par rapport à l'origine suivant le signe de a .*

Inversement, la donnée du point M (ou du segment \overline{OM}) peut servir à définir le nombre relatif a et tout raisonnement ou toute définition fait sur le point ou le segment équivaut à un raisonnement ou à une définition sur a .

Le nombre relatif peut alors être regardé comme un symbole caractérisant les opérations géométriques I ou II. On dit souvent dans ce sens que ce nombre est un *opérateur*.

Définition des opérations sur les nombres relatifs :

ADDITION. — *Le principe de l'addition repose sur l'application répétée de l'opération géométrique I. De façon précise, ajouter a' à a c'est faire subir au point représentatif de a la translation qui a permis de déduire de l'origine le point représentatif de a' .*

MULTIPLICATION. — *Le principe de la multiplication repose sur l'application répétée de l'opération géométrique II.*

De façon précise, multiplier a par a' c'est faire subir au segment représentatif de a l'homothétie-symétrie qui a permis de déduire du segment unité \overline{OU} le segment représentatif de a' .

Il est évident à première vue que les opérations ainsi définies sont *commutatives* et *associatives* et que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition. Ces définitions ne sont du reste que l'extension naturelle des définitions arithmétiques des opérations sur les nombres entiers. Remarquons seulement que la définition de la multiplication donne de façon immédiatement intuitive la règle des signes qui trop souvent est imposée sans justification.

Sur ces bases se développe comme d'habitude la théorie du calcul algébrique.

3. INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES. — Après avoir créé ainsi une algèbre des points ou des segments portés par une droite orientée, il est naturel de chercher à créer une théorie analogue pour les points ou les vecteurs portés par un plan. En réalité, le succès n'en est nullement assuré *a priori* et cette idée de généralisation ne trouvera sa pleine justification que dans la

fécondité de la théorie projetée, fécondité qui sera abondamment constatée par la suite. Puisqu'il faut se donner deux nombres relatifs pour fixer la position d'un point dans un plan (par exemple son abscisse a et son ordonnée b par rapport à des axes rectangulaires), ce que nous cherchons à construire est donc une arithmétique des groupes de deux nombres relatifs de la forme (a, b) . C'est un tel groupe que nous appellerons un nombre complexe et nous conviendrons de dire qu'il est l'affixe du point correspondant.

Pour définir les opérations sur ces nouveaux éléments, nous serons guidés par le souci constant de leur donner les mêmes propriétés que les opérations définies au paragraphe 2, de façon que nous puissions regarder l'algèbre des nombres relatifs comme contenue, dans des conditions à préciser, dans l'interprétation plus large que nous nous proposons.

Nous ferons donc choix d'une unité de longueur et nous considérerons un plan orienté portant deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy . La position d'un point M du plan peut être fixée de deux points de vue :

I'. Le point M peut être regardé comme déduit du point O par une translation dont les projections sur les axes sont définies par les deux nombres relatifs a et b , coordonnées rectangulaires du point M .

II'. Si l'on considère sur la droite Ox le point U d'abscisse $+1$, le vecteur (OM) peut être regardé comme déduit du vecteur (OU) par une homothétie positive ayant pour rapport la distance arithmétique $OM = \rho$ suivie d'une rotation de l'un quelconque des angles $\widehat{Ox, OM} = \varphi$ définis à $2k\pi$ près.

Le rapport d'homothétie ρ s'appelle le module du nombre complexe, l'angle φ s'appelle l'argument et l'on a immédiatement en comparant les deux points de vue

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad \rho = +\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Deux nombres complexes seront dits égaux lorsqu'ils seront représentés par le même point (ou le même vecteur).

Nous pourrons donc ici encore regarder le nombre complexe comme un opérateur symbolisant, suivant le point de vue, la façon dont le point M est déduit de l'origine O , ou celle dont le vecteur (OM) est déduit du vecteur (OU) .

Convention fondamentale. — Dans le but d'obtenir un lien avec l'algèbre des nombres relatifs, nous conviendrons que les points de l'axe Ox représentent, comme au paragraphe 2, les nombres relatifs ordinaires et nous écrirons par la suite les complexes du genre $(a, 0)$ sous la forme simple a . Une rotation de π équivalant à une symétrie par rapport à l'origine, il est évident que les définitions I et II sur les nombres relatifs rentrent dans les définitions plus générales I' et II' et que notre convention ne nous expose à aucune contradiction.

Définition des opérations sur les nombres complexes. — Pour définir l'addition et la multiplication, nous n'avons qu'à reprendre tout naturellement les formes de définition qui nous ont servi pour les nombres relatifs. Je les répète presque textuellement :

ADDITION. — *Le principe de l'addition repose sur l'application répétée de l'opération géométrique I'. De façon précise, ajouter (a', b') à (a, b) , c'est*

faire subir au point représentatif de (a, b) la translation qui a permis de déduire de l'origine le point-représentatif de (a', b') .

MULTIPLICATION. — *Le principe de la multiplication repose sur l'application répétée de l'opération géométrique II'. De façon précise, multiplier (a, b) par (a', b') , c'est faire subir au vecteur représentatif de (a, b) l'homothétie-rotation qui a permis de déduire du vecteur unité (OU) le vecteur représentatif de (a', b') .*

Les opérations ainsi définies sont évidemment aussi *commutatives* et *associatives* et la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition. Comme elles comprennent comme cas particulier les opérations sur les nombres relatifs, il est inutile de créer pour les représenter des signes spéciaux et nous pourrons conserver les signes $+$ et \times de l'algèbre ordinaire en étendant leur signification.

Enfin, de la définition de la multiplication, découle immédiatement la règle de multiplication des modules et d'addition des arguments.

A partir de ces bases, la théorie des nombres complexes se développe parallèlement à celle des nombres relatifs de façon entièrement classique; seul le calcul des inégalités fait ici défaut. Mentionnons seulement, pour terminer, le changement de notations qui conduit à l'écriture usuelle et aux règles pratiques.

Notations définitives. — Soit un nombre complexe (a, b) représenté par un point M. Projetons ce point en P sur Ox, en Q sur Oy; d'après la définition de l'addition, (a, b) , affixe de M, peut être regardé

comme la somme des affixes de P et de Q, on a donc

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

Considérons, d'autre part, le point V situé sur l'axe Oy à la distance $+1$ de l'origine, il est évident que le vecteur (OQ) peut se déduire du vecteur (OV) par une homothétie positive de rapport $|b|$ suivie ou non d'une symétrie par rapport à O suivant le signe de b . Autrement dit, l'affixe de Q peut être regardé comme le produit du nombre complexe $(0, +1)$ par le nombre complexe $(b, 0)$. On a donc finalement

$$(a, b) = (a, 0) + (0, +1)(b, 0)$$

ou encore, d'après notre convention,

$$(a, b) = a + (0, +1)b.$$

Nous donnerons un nom à ce nombre complexe $(0, +1)$ que nous introduirons systématiquement par la suite et nous le représenterons par la lettre i . Nous aurons donc la notation définitive

$$(a, b) = a + ib \quad (1).$$

Propriétés du nombre complexe $i = (0, +1)$. — Il est évident, d'après la loi de multiplication, que le carré du nombre complexe i est le nombre complexe $(-1, 0)$, c'est-à-dire le nombre relatif -1 .

(1) Remarquons qu'étant donnés deux nombres complexes pris au hasard et représentés par des vecteurs *n'ayant pas le même support*, on aurait toujours pu exprimer tout nombre complexe par une combinaison linéaire des deux premiers (les coefficients étant des nombres relatifs). Le choix comme vecteur de base de (OU) s'imposait naturellement; le vecteur (OV) est évidemment le plus simple et le plus symétrique que l'on pouvait lui adjoindre. Là est tout le secret de l'introduction du nombre i .

Conséquence. Règle définitive des opérations. — Les nombres complexes étant mis sous la forme $a+ib$, on pourra appliquer à ces nombres tous les procédés de calcul de l'algèbre usuelle, comme s'il s'agissait de nombres ordinaires, en convenant de remplacer toutes les fois qu'il sera possible le nombre complexe i^2 par le nombre relatif -1 .

Enfin, pour terminer, il n'est peut-être pas inutile de répéter que la théorie n'est justifiée que par son succès et sa fécondité et de remarquer qu'une extension nouvelle de la notion de nombre à l'étude des points et des vecteurs dans l'espace à plus de deux dimensions se heurte à de grosses difficultés. Il n'est en effet plus possible de conserver aux opérations *toutes* leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité). En abandonnant certaines d'entre elles, on a pu cependant créer des extensions nouvelles, mais ces simples remarques montrent la difficulté de l'entreprise et expliquent aussi sa moindre fécondité.

[R 2 b]

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN;

PAR J. SUDRIA.

Soit une figure plane se déplaçant dans son plan; désignons par ω la valeur numérique de la vitesse angulaire instantanée, par \vec{U} un vecteur invariable dans le plan mobile et \vec{U}'' la dérivée seconde de ce vecteur dans le plan fixe. On voit facilement que la valeur

numérique du produit vectoriel $(\vec{U}\vec{U}')$ est égale à $r^2\omega'$, r étant la valeur numérique du vecteur \vec{U} et ω' l'accélération angulaire.

THÉORÈME. — *Le lieu des points dont les accélérations passent, à un moment déterminé, par le centre d'inertie G de la figure est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la droite qui porte la résultante des forces d'inertie, le module de la transformation étant le carré du rayon de giration de la figure mobile par rapport au centre d'inversion qui est le centre d'inertie.*

En effet, égalons le moment résultant des forces d'inertie par rapport au point G à celui de la résultante. Soient m une masse élémentaire de la figure située en A , α un point du lieu et a le point où la résultante est rencontrée par αG ; on a, M étant la masse totale et J_A, J_G les accélérations des points A et G ,

$$\begin{aligned}\Sigma (\vec{GA}, m\vec{J}_A) &= (\vec{G}\alpha, M\vec{J}_G), \\ \Sigma (m\vec{GA}, \vec{J}_G + \vec{G}A'') &= M(\vec{G}\alpha, \vec{J}_\alpha + \alpha\vec{G}'')\end{aligned}$$

ou, en simplifiant,

$$\Sigma m (\vec{GA}, \vec{G}A'') = (\vec{G}\alpha, \alpha\vec{G}'').$$

Si l'on désigne par r le rayon de giration de la figure par rapport au point G et par ρ_α et ρ_α' , les distances $G\alpha$, $G\alpha'$, il vient, d'après la remarque du début,

$$M\omega' r^2 = M\omega' \rho_\alpha \rho_\alpha'$$

ou

$$r^2 = \rho_\alpha \rho_\alpha'$$

Remarques. — 1° Cette proposition permettra de mettre en place la résultante des forces d'inertie d'un corps ayant un plan de symétrie et soumis à un déplacement plan parallèlement à ce plan de symétrie, car alors on pourra ramener l'étude de ce mouvement plan à celui d'une figure plane dans son plan. Connaissant les accélérations de deux points de la figure plane, on saura trouver un point α dont l'accélération passe par G et il suffira de chercher le point α conjugué de α pour avoir un point de la résultante. Or la direction de celle-ci est connue : c'est la direction de l'accélération du point G et celle-ci est donnée par les propriétés des cinèmes du second ordre.

2° Rappelons pour mémoire que le lieu des points d'une figure plane se déplaçant dans son plan, dont les accélérations passent à un instant donné par un point déterminé de la figure mobile est un cercle (dont le rayon se réduit à zéro dans le cas particulier où le point de concours est le centre des accélérations).

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1922.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR J. LEMAIRE

(suite) (1).

IV. Soient Δ, Δ' deux génératrices fixes, de même

(1) La partie de solution que nous publions ici, avec l'énoncé correspondant, forme un tout et il n'est pas nécessaire, pour la compréhension, de connaître le début du problème. Le lecteur le trouvera dans notre numéro de juillet dernier, page 385.

systeme, de l'hyperboloïde à une nappe (H) ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Une génératrice G, du second système, les rencontre en M et M'. Montrer qu'il existe deux points ω , ω' d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Soit θ le point de rencontre de Δ et de la génératrice parallèle à Δ' . Trouver la relation qui existe entre $O\omega$ et $O\theta$.

Former l'équation de la surface (S_H) lieu des points ω , ω' lorsque Δ et Δ' varient.

Cette surface est indépendante du système de génératrices considéré.

Il n'existe pas de couple Δ , Δ' auquel correspond une infinité de points ω .

IV. Les équations des génératrices des deux systèmes de l'hyperboloïde pouvant s'écrire

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{a} + 1 \right) = \frac{z}{c} + \frac{y}{b}, \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) = \frac{z}{c} - \frac{y}{b}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu \left(\frac{x}{a} + 1 \right) = \frac{z}{c} - \frac{y}{b}, \\ \frac{1}{\mu} \left(\frac{x}{a} - 1 \right) = \frac{z}{c} + \frac{y}{b}, \end{cases}$$

les coordonnées d'un point de la quadrique s'expriment comme il suit à l'aide des paramètres λ , μ des généra-

trices qui y passent :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a(1 + \lambda\mu)}{1 - \lambda\mu}, \\ y = \frac{b(\lambda - \mu)}{1 - \lambda\mu}, \\ z = \frac{c(\lambda + \mu)}{1 - \lambda\mu}; \end{array} \right.$$

λ et λ' étant les paramètres des deux génératrices données Δ et Δ' , si μ est celui d'une génératrice variable G de l'autre système, les expressions ci-dessus sont les coordonnées de M , et celles de M' sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{a(1 + \lambda'\mu)}{1 - \lambda'\mu}, \\ y' = \frac{b(\lambda' - \mu)}{1 - \lambda'\mu}, \\ z' = \frac{c(\lambda' + \mu)}{1 - \lambda'\mu}. \end{array} \right.$$

La condition pour que MM' soit vu d'un point $\omega(X, Y, Z)$ sous un angle droit est

$$\begin{aligned} & \left(X - a \frac{1 + \lambda\mu}{1 - \lambda\mu} \right) \left(X - a \frac{1 + \lambda'\mu}{1 - \lambda'\mu} \right) \\ & + \left(Y - b \frac{\lambda - \mu}{1 - \lambda\mu} \right) \left(Y - b \frac{\lambda' - \mu}{1 - \lambda'\mu} \right) \\ & + \left(Z - c \frac{\lambda + \mu}{1 - \lambda\mu} \right) \left(Z - c \frac{\lambda' + \mu}{1 - \lambda'\mu} \right) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & [-(X + a)\lambda\mu + X - a] [-(X + a)\lambda'\mu + X - a] \\ & + [(-Y\lambda + b)\mu + Y - b\lambda] [(-Y\lambda' + b)\mu + Y - b\lambda'] \\ & + [-(Z\lambda + c)\mu + Z - c\lambda] [-(Z\lambda' + c)\mu + Z - c\lambda'] = 0. \end{aligned}$$

Cette relation devant avoir lieu quel que soit μ , on

doit avoir

$$\left\{ \begin{array}{l} (X+a)^2 \lambda \lambda' + (Y\lambda - b)(Y\lambda' - b) + (Z\lambda + c)(Z\lambda' + c) = 0, \\ (X^2 - a^2)(\lambda + \lambda') + (Y\lambda - b)(Y - b\lambda) \\ \quad + (Y\lambda' - b)(Y - b\lambda) \\ \quad + (Z\lambda + c)(Z - c\lambda') + (Z\lambda' + c)(Z - c\lambda) = 0, \\ (X-a)^2 + (Y - b\lambda)(Y - b\lambda') + (Z - c\lambda)(Z - c\lambda') = 0, \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \lambda \lambda' (X^2 + Y^2 + Z^2) + (2aX + a^2) \lambda \lambda' \\ \quad + (cZ - bY)(\lambda + \lambda') + b^2 + c^2 = 0, \\ (\lambda + \lambda')(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(bY + cZ) \lambda \lambda' \\ \quad - (a^2 - b^2 + c^2)(\lambda + \lambda') - 2bY + 2cZ = 0, \\ X^2 + Y^2 + Z^2 + (b^2 + c^2) \lambda \lambda' \\ \quad - (bY + cZ)(\lambda + \lambda') - 2aX + a^2 = 0. \end{array} \right.$$

Ce système peut être ramené simplement à deux équations du premier degré et à une du second degré, ce qui établit l'existence des deux points ω et ω' .

Surface (S_H). — En éliminant λ et λ' , on forme l'équation de la surface lieu des points ω et ω' quand les génératrices Δ et Δ' varient :

$$(S_H) \left\{ \begin{array}{ccc} (X+a)^2 + Y^2 + Z^2 & cZ - bY & b^2 + c^2 \\ -2bY - 2cZ & X^2 + Y^2 + Z^2 - a^2 + b^2 - c^2 & -2bY + 2cZ \\ b^2 + c^2 & -bY - cZ & (X-a)^2 + Y^2 + Z^2 \end{array} \right\} = 0.$$

Cette équation représente une surface du sixième degré tricirculaire, indépendante du système de génératrices considéré. En y supposant $c = 0$, on retrouve l'équation de la surface (S_E) obtenue dans la deuxième partie.

Pour qu'une génératrice $L(\mu')$ soit parallèle à $\Delta'(\lambda')$, on doit avoir

$$1 - \lambda' \mu' = 0 \quad \text{ou} \quad \mu' = \frac{1}{\lambda'},$$

(31)

de sorte que les coordonnées du point θ commun à Δ et L sont

$$(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a \frac{\lambda' + \lambda}{\lambda' - \lambda}, \\ y = b \frac{\lambda\lambda' - 1}{\lambda' - \lambda}, \\ z = c \frac{\lambda\lambda' + 1}{\lambda' - \lambda}. \end{array} \right.$$

Le point θ' commun à Δ' et à la génératrice L' parallèle à Δ est diamétralement opposé à θ .

Relation entre $O\omega$ et $O\theta$. — Les équations (1) peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\lambda\lambda'(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2(\lambda + \lambda')(bY - cZ) \\ \quad - 4a\lambda\lambda'X - 2a^2\lambda\lambda' - 2(b^2 + c^2) = 0, \\ (\lambda + \lambda')^2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2\lambda\lambda'(\lambda + \lambda')(bY + cZ) \\ \quad - 2(\lambda + \lambda')(bY - cZ) - (a^2 - b^2 + c^2)(\lambda + \lambda')^2 = 0, \\ -2\lambda\lambda'(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2\lambda\lambda'(\lambda + \lambda')(bY + cZ) \\ \quad + 4a\lambda\lambda'X - 2a^2\lambda\lambda' - 2(b^2 + c^2)\lambda^2\lambda'^2 = 0; \end{array} \right.$$

en ajoutant membre à membre, on élimine les termes du premier degré en X , Y , Z , et l'on obtient

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda')^2(X^2 + Y^2 + Z^2) - 4a^2\lambda\lambda' \\ & - 2(b^2 + c^2)(\lambda^2\lambda'^2 + 1) - (a^2 - b^2 + c^2)(\lambda + \lambda')^2 = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} & (\lambda - \lambda')^2(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 + b^2 - c^2) \\ & - 2a^2(\lambda + \lambda')^2 - 2b^2(\lambda\lambda' - 1)^2 - 2c^2(\lambda\lambda' + 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 + b^2 - c^2 \\ & = 2 \times \frac{a^2(\lambda + \lambda')^2 + b^2(\lambda\lambda' - 1)^2 + c^2(\lambda\lambda' + 1)^2}{(\lambda - \lambda')^2}, \end{aligned}$$

ou finalement

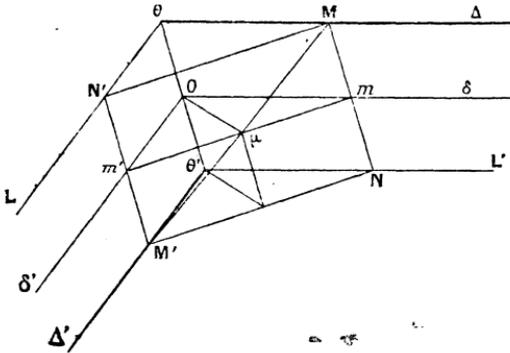
$$\overline{O\omega}^2 + R^2 = 2\overline{O\theta}^2,$$

R désignant le rayon de la sphère de Monge de l'hyperboloïde.

Démonstration géométrique. — Par chacune des génératrices Δ et Δ' , menons le plan parallèle à l'autre, ces deux plans parallèles sont tangents aux points diamétralement opposés θ et θ' et déterminent les génératrices L et L' parallèles à Δ' et Δ .

Le plan équidistant des précédents coupe (H) suivant une hyperbole (h), d'asymptotes δ et δ' parallèles à Δ et Δ' , qui est le lieu du milieu μ de MM' . Parmi les génératrices n'appartenant pas au même système que Δ et Δ' , choisissons celle pour laquelle $\theta M = \theta' M'$, et construisons le parallélogramme $MNM'N'$ dont les sommets N et N' sont sur L' et L et dont les côtés MN et $M'N'$ sont parallèles à $\theta\theta'$; si MN et $M'N'$ coupent δ

Fig. 2.



et δ' en m et m' respectivement, $O\mu = \alpha$ est le demi-axe transverse de (h), et $\mu m = \mu m' = \beta$, le demi-axe non transverse, et le premier théorème d'Apollonius permet d'écrire

$$R^2 = \overline{O\theta}^2 + \alpha^2 - \beta^2,$$

de sorte que la relation à établir peut se mettre sous la forme

$$\overline{O\theta}^2 - \overline{O\omega}^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

Considérant successivement les génératrices MM' , θL , $\theta' L'$, nous voyons que les points ω et ω' sont communs à la sphère de diamètre MM' , et aux plans perpendiculaires à L en θ , et à L' en θ' . Les angles $\widehat{M\omega M'}$, $\widehat{\omega\theta L}$, $\widehat{\omega\theta' L'}$ étant donc droits, nous pouvons écrire

$$\overline{\omega N}^2 = \overline{\omega\theta'}^2 + \overline{\theta' N}^2 = \overline{\omega\theta'}^2 + \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\overline{\omega N'}^2 = \overline{\omega\theta}^2 + \overline{\theta N'}^2 = \overline{\omega\theta}^2 + \alpha^2 + \beta^2;$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{\omega N}^2 + \overline{\omega N'}^2 &= \overline{\omega\theta}^2 + \overline{\omega\theta'}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 \\ &= 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$2\overline{\omega\mu}^2 + 2\overline{\mu N}^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

et, en remplaçant $\omega\mu$ par μM qui lui est égal,

$$2\overline{\mu M}^2 + 2\overline{\mu N}^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

ou

$$\overline{NM}^2 + \overline{NM'}^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

ou

$$4\overline{O\theta}^2 + 4\beta^2 = 2\overline{O\omega}^2 + 2\overline{O\theta}^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2,$$

et finalement

$$\overline{O\theta}^2 - \overline{O\omega}^2 = \alpha^2 - \beta^2.$$

C. Q. F. D.

Rappelons que l'existence des points ω et ω' a été établie dans la première partie.

Si nous considérons trois génératrices G, G_1, G_2 du système autre que celui de Δ et Δ' , les points ω et ω' sont communs aux sphères ayant pour diamètres les segments $MM', M_1M'_1, M_2M'_2$ déterminés sur ces génératrices par Δ et Δ' , et comme les centres de ces sphères appartiennent à une hyperbole (h), ils ne peuvent être en ligne droite, et il n'existe que deux tels points, réels ou imaginaires, pour deux génératrices Δ et Δ' , jamais une infinité.

Intersection de (H) et de (S_H). — Pour que le point ω relatif à Δ et Δ' soit sur (H), il est d'abord nécessaire qu'il soit sur l'une de ces droites, puisqu'en considérant la génératrice passant en ω et s'appuyant sur les deux précédentes, on a un angle $\widehat{M\omega M'}$ qui doit être droit. Supposons donc ω sur Δ : tout segment MM' déterminé sur une génératrice de l'autre système devant être vu de ω sous un angle droit, Δ et Δ' doivent être orthogonales, et ω doit être le pied sur Δ de la perpendiculaire commune à Δ et Δ' .

Ainsi, *les points de (H) appartenant à (S_H) sont les pieds des perpendiculaires communes aux génératrices orthogonales de même système.* Si G est la génératrice de l'autre système passant par un tel point ω , l'angle $\widehat{\Delta\omega G}$ est droit, et ω est sur la sphère de Monge de (H); dans ces conditions, les deux génératrices Δ et L , qui se croisent en θ , sont perpendiculaires et θ est aussi sur la sphère; cela résulte d'ailleurs de la relation entre $Q\omega$ et $O\theta$.

Ainsi (S_H) *passé par la biquadratique commune à l'hyperboloïde et à sa sphère de Monge.* Le reste de l'intersection est imaginaire.

(La fin prochainement.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2411.

(1919, p. 238; 1922, p. 40.)

Une horloge porte une aiguille des heures, une aiguille des minutes et une aiguille des secondes montées sur le même pivot. Ces trois aiguilles ne peuvent être en coïncidence qu'à midi, comme on le reconnaît facilement. A quelle heure, non infiniment voisine de midi, sont-elles contenues dans un angle aussi petit que possible?

R. B.

SOLUTION

Par M. C. E. T.

Je représenterai les trois aiguilles par leurs points de rencontre H, M, S avec la circonférence du cadran.

H parcourt la circonférence du cadran, de longueur 2π , en 12 heures; sa vitesse est $\frac{2\pi}{12}$, en prenant l'heure pour unité de temps.

M fait un tour par heure; sa vitesse est 2π .

S fait un tour par minute, sa vitesse est $2\pi \cdot 60$.

Les points H et M sont confondus au temps zéro; leurs points de coïncidence sont aux abscisses α telles que

$$\frac{\alpha}{\frac{2\pi}{12}} = \frac{2k\pi + \alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{2k\pi}{11},$$

qui correspondent aux temps $\frac{12k}{11}$.

J'appellerai A_k le point d'abscisse $\frac{2k\pi}{11}$.

Les points H et S sont confondus au temps zéro; leurs points de coïncidence sont aux abscisses β telles que

$$\frac{\beta}{\frac{2\pi}{12}} = \frac{2k\pi + \beta}{2\pi \cdot 60}, \quad \beta = \frac{2k\pi}{719},$$

qui correspondent aux temps $\frac{12k}{719}$.

Il est d'abord bien évident que les positions cherchées doivent être dans le voisinage des points A_k , puisque H et M doivent être voisins.

D'autre part, S doit être entre H et M; en effet, si S est en dehors de l'arc HM, en faisant varier le temps, dans le sens où HM diminue, d'une quantité inférieure à une minute environ, S vient sur l'arc HM, dont la longueur est devenue moindre; par conséquent les trois points sont situés sur un arc plus petit que l'arc qui les contenait auparavant.

On voit ainsi qu'on est ramené à trouver les arcs HM aussi petits que possible et S compris entre H et M.

Ceci posé, je vais déterminer les positions de S correspondant aux points de coïncidence A_k et je ramènerai E, par une variation du temps aussi petite que possible, sur l'arc HM. Le problème posé sera ainsi résolu.

Au temps $\frac{12k}{11} = k \left[65^m + \frac{5}{11} \right]$, H et M sont en A_k et S est au point dont l'abscisse correspond au temps $k \frac{5}{11}$ minutes ou $\frac{k}{12 \cdot 11}$ heures. La vitesse de S étant égale à $2\pi \cdot 60$, cette abscisse est $2k\pi \frac{5}{11}$.

Ainsi lorsque H et M sont en A_3 , S est en A_4 , et lorsque H et M sont en A_8 , S est en A_7 . Pour les autres valeurs de k , les points sont moins rapprochés; ces positions ne peuvent donc être considérées.

J'examine d'abord le premier cas; pour ramener S sur l'arc HM, je dois ramener les aiguilles en arrière; dans ce mouvement M et S encadrent H et leur intervalle diminue jusqu'au moment où S coïncide avec H; alors c'est l'intervalle HM qui contient S et il augmente. Le moment cherché est donc la coïncidence HS qui précède immédiatement A_3 .

(37)

Elle est déterminée par l'inégalité

$$k \frac{12}{719} < 3 \frac{12}{11}, \quad \text{d'où} \quad k = 196.$$

La distance HM est alors égale à

$$\frac{2\pi}{12} 196 \frac{12}{719} - 2\pi \cdot 196 \frac{12}{719} + 6\pi = \frac{2\pi}{719}$$

et l'heure est

$$3^{\text{h}} 16^{\text{m}} 16^{\text{s}} + \frac{256^{\text{s}}}{719}.$$

Par un raisonnement analogue, le deuxième cas conduit à la solution suivante :

H et S sont en coïncidence au temps

$$523 \frac{12}{719} = 8^{\text{h}} 43^{\text{m}} 43^{\text{s}} \frac{463^{\text{s}}}{719}$$

et M est à la distance $\frac{2\pi}{719}$

Autres solutions par l'AUTEUR et par MM. AUBRY, EGAN, A. MARCEL.

2419.

(1919, p. 279; 1922, 79.)

Soit ABA'B' un quadrilatère circonscrit à une conique de foyers F et F'. On considère les deux groupes de quatre triangles :

$$\begin{array}{l} \text{FAB, FA'B', F'AB', F'A'B;} \\ \text{FAB', FA'B, F'AB, F'A'B'.} \end{array}$$

Démontrer que :

1° Les cercles circonscrits aux triangles de ces deux groupes passent respectivement par des points C et C', qui sont les deux foyers d'une nouvelle conique inscrite au quadrilatère;

2° Les orthocentres des triangles de ces deux groupes

sont respectivement sur des droites D et D' , toutes deux perpendiculaires à la droite, lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère. R. B.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Ces propositions peuvent être rattachées, d'une part, à la théorie des *cubiques focales* (cubiques circulaires contenant leur foyer singulier), d'autre part, à l'étude du système de quatre positions quelconques d'une figure de grandeur invariable mobile dans son plan. En voici des démonstrations élémentaires et directes.

Je désignerai par (AB) l'*orientation* d'une droite quelconque AB , c'est-à-dire l'angle, défini à π près, dont il faut faire tourner un axe fixe pour l'amener sur cette droite. Les égalités entre orientation de droites sont valables à π près. On a $(AB) = (BA)$.

On reconnaît aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points A, B, C, D soient sur un cercle est $(AB) + (CD) = (AC) + (BD)$ [ou bien $= (AD) + (BC)$].

Les théorèmes de Poncelet appliqués à la figure $AA'BB'FF'$ de l'énoncé donnent l'égalité

$$(AF) + (AF') = (AB) + (AB')$$

et toutes celles qu'on tire de la précédente en permutant, soit les points A et A' , B et B' , F et F' , soit les couples (A, A') , (B, B') , (F, F') entre eux.

Soit alors M le second point commun aux cercles $FAB, FA'B'$. On a

$$\begin{aligned} (MA) + (FB) &= (FM) + (AB), \\ (MB') + (FA') &= (FM) + (A'B'), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (MA) - (MB') &= (AB) - (FB) + (FA') - (A'B') \\ &= (BF') - (BA') + (A'B) - (A'F') \\ &= (F'B) - (F'A') \\ &= (F'A) - (F'B'), \end{aligned}$$

d'où enfin

$$(MA) + (F'B') = (MB') + (F'A).$$

Ce qui montre bien que le point M appartient au cercle F'AB'. On établit de même les résultats analogues.

On a d'ailleurs, en remplaçant A par A' et B par B' dans la dernière relation écrite,

$$(MA') + (F'B) = (MB) + (F'A'),$$

d'où par addition, et en tenant compte de ce que F' est le foyer d'une conique inscrite à ABA'B',

$$(MA) + (MA') = (MB') + (MB).$$

Le point M est donc bien le foyer d'une conique analogue.

Passons à la démonstration de la seconde partie. Soient H et H' les orthocentres des triangles FAB, FA'B', α , β et I les milieux respectifs de AA', BB' et AB'.

FH est perpendiculaire à AB, c'est-à-dire à I γ ; FH' est perpendiculaire à B'A', c'est-à-dire à I α . L'angle $\widehat{HFH'}$ est donc égal à $\widehat{\beta I\alpha}$ ou à son supplémentaire. C'est la première égalité qui est vraie. On reconnaît en effet que les angles droits dont il faut faire tourner AB pour l'amener sur FH et B'A' pour l'amener sur FH' sont égaux *en signe*, à cause de l'égalité des angles (FA, FB) et (FB', FA').

D'autre part, la longueur de FH est le double de la distance à AB du centre du cercle FAB, On a donc

$$FH = AB \cot \widehat{AFB}$$

et de même

$$FH' = B'A' \cot \widehat{B'FA'},$$

d'où

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{AB}{B'A'} = \frac{I\beta}{I\alpha}.$$

Les deux triangles FHH', I $\beta\alpha$ sont donc semblables, et il en résulte immédiatement que HH' est perpendiculaire à $\alpha\beta$, qui n'est autre que la droite, lieu des centres des coniques inscrites dans ABA'B'. Cela suffit à établir la seconde partie.

2436.

(1920, p. 120; 1922, p. 120.)

Deux points décrivent avec des vitesses uniformes deux cercles concentriques. Démontrer que la droite qui les joint reste normale à une épicycloïde ou à une hypocycloïde, en général allongée ou raccourcie.

Dans le cas où les deux points ont des vitesses angulaires opposées, on obtient une propriété connue de l'ellipse.

L. MALOUE.

SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

Si un cercle de centre O' et de rayon $a : n$ roule sur un cercle fixe de centre O et de rayon a , un point C lié au cercle mobile décrit une trochoïdale d'indice n . La normale en C passe par le point de contact A des deux cercles.

Menons OB parallèle à $O'C$, rencontrant CA au point B . On a

$$OB : OA = O'C : O'A,$$

donc B décrit un cercle de centre O . Si la vitesse angulaire de OA est α , celle de $O'C$ (donc aussi celle de OB) sera visiblement $\beta = (n + 1)\alpha$.

Inversement, étant donnés deux vecteurs OA , OB tournant autour de O avec les vitesses angulaires α , β ; AB est la normale en un point C à une trochoïdale d'indice $n = (\beta - \alpha) : \alpha$. Pour avoir le point C , on prend O' sur OA tel que

$$OO' : OA = \beta : (\beta - \alpha),$$

et l'on mène $O'C$ parallèle à OB .

Lorsque $\beta = -\alpha$, C est le milieu de AB , et la trochoïdale (C) est une ellipse ($n = -2$).

La courbe (C) sera une cycloïdale quelle que soit la valeur de $\alpha : \beta$ si $O'C = O'A$, c'est-à-dire si $OA = OB$.

Autre solution par M. FAUCHEUX.



[K¹13a]

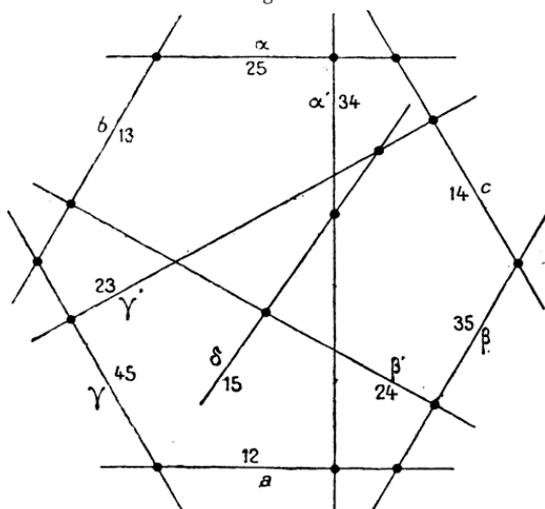
SUR UNE CONFIGURATION CONNUE DE DIX DROITES ;

PAR RAOUL BRICARD.

I. Morley ⁽¹⁾ et J. Petersen ⁽²⁾ ont fait connaître à peu près en même temps une configuration remarquable de dix droites, dont l'existence résulte du théorème suivant :

Soient données dans l'espace (fig. 1) trois droites

Fig. 1.



quelconques α , β , γ . Construisons les perpendiculaires communes a , b , c à ces droites prises deux

⁽¹⁾ *Proc. of the London Math. Soc.*, 1898, p. 670.

⁽²⁾ *Mém. de l'Académie de Copenhague*, 1898.

à deux, puis la droite α' , perpendiculaire commune à α et a et les droites analogues β' et γ' .

Les droites α' , β' , γ' rencontrent à angle droit une même droite δ .

On a une notation plus avantageuse en représentant les dix droites dont il est question dans cet énoncé par les combinaisons deux à deux de cinq symboles 1, 2, 3, 4, 5. Posons

$$\begin{array}{lll} a = 12, & b = 13, & c = 14, \\ \alpha = 25, & \beta = 35, & \gamma = 45, \\ \alpha' = 34, & \beta' = 24, & \gamma' = 23, \\ & \delta = 15. \end{array}$$

On reconnaît que toute droite ij rencontre à angle droit les trois droites dont les symboles ne contiennent ni i ni j . Par exemple 12 rencontre à angle droit 34, 35 et 45. Les dix droites jouent le même rôle, ce qui vaut à leur système le nom de *configuration*, d'après le sens qu'on attache aujourd'hui à ce mot.

La démonstration de Morley est analytique. Je ne connais pas celle de Petersen. Je vais en donner une fort élémentaire, fondée sur des propriétés simples du déplacement fini d'un solide (1).

2. Rappelons qu'on appelle *renversement* la rotation d'un angle égal à π autour d'une droite (c'est-à-dire la symétrie par rapport à cette droite). Dans ce qui suit, un renversement d'axe X sera désigné par $R(X)$. Le produit de deux renversements $R(X)$ et $R(Y)$ est un *vissage* ou déplacement hélicoïdal dont l'axe est la

(1) Pour ces propriétés, voir par exemple : M. D'OCAGNE, *Cours de géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, p. 283 et suiv. ; R. BRICARD, *Cinématique et Mécanismes*, p. 13 et suiv.

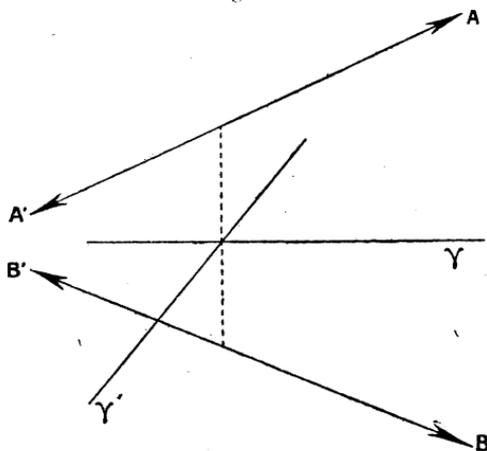
perpendiculaire commune à X et Y , dont la translation est le double de la distance de ces deux droites, dont l'angle de rotation est le double de leur angle. Un vissage $V(Z)$ d'axe Z peut être considéré de ∞^2 manières comme le produit de deux renversements. Si l'on a

$$V(Z) = R(X)R(Y) = R(X')R(Y'),$$

le système (X', Y') dérive du système (X, Y) par un vissage d'axe Z et d'ailleurs quelconque. Ce qu'il faut retenir par la suite, c'est que X, Y, X', Y' rencontrent à angle droit une même droite.

3. Soient A et B deux droites orientées quelconques, A' et B' les droites opposées (fig. 2). Par le milieu de

Fig. 2.



leur perpendiculaire commune menons la droite γ , bissectrice de l'angle formé par les parallèles à A et B menées de ce milieu (et orientées comme A et B). Je dirai que γ est la *bissectrice intérieure* de A et B (ou

de A' et B') et la *bissectrice extérieure* de A et B' (ou de A' et B).

La droite γ' , bissectrice extérieure de A et B et intérieure de A et B' , rencontre γ à angle droit.

A et B sont symétriques par rapport à γ , A et B' sont symétriques par rapport à γ' . Autrement dit, les renversements $R(\gamma)$ et $R(\gamma')$ amènent A à coïncider respectivement avec B et avec B' .

4. Soient maintenant A, B, C trois droites orientées quelconques, ayant pour opposées A', B', C' . Soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ les bissectrices intérieures et extérieures des trois couples qu'elles forment (α et α' sont les bissectrices du couple B, C , etc.) ⁽¹⁾.

Les trois droites α, β, γ n'ont pas entre elles de relation intrinsèque; c'est-à-dire qu'on peut se les donner arbitrairement et trouver trois droites orientées A, B, C qui, prises deux à deux, les admettent pour bissectrices intérieures.

Supposons en effet le problème résolu. Considérons le produit de renversements $R(\alpha)R(\beta)R(\gamma)$. $R(\alpha)$ amène B sur C , $R(\beta)$ amène C sur A , $R(\gamma)$ amène A sur B . Donc le produit considéré laisse la droite orientée B en coïncidence avec elle-même (bien entendu, il n'en est pas nécessairement de même pour les *points* de cette droite). Par conséquent le vissage auquel ce produit est réductible, comme tout déplacement, a pour axe B , et l'on peut écrire

$$R(\alpha)R(\beta)R(\gamma) = V(B).$$

⁽¹⁾ Il convient d'observer que si A, B, C forment un triangle et si l'on oriente ces droites d'après l'un ou l'autre des sens de circulation sur ce triangle, les bissectrices que nous considérons ici comme *intérieures* sont celles que l'on appelle d'habitude *bissectrices extérieures*.

La méthode connue de composition des déplacements permet donc de trouver B. Cette droite est en général déterminée (à son orientation près). La connaissance de B entraîne immédiatement celle de C et A.

B ne serait indéterminée que si $V(B)$ se réduisait à une translation. Il est aisé de reconnaître que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que α, β, γ soient parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle. Je n'entrerai pas dans la discussion de ce cas singulier.

5. *Au contraire, les bissectrices extérieures α', β', γ' ne peuvent être données arbitrairement.* — Considérons en effet le produit $R(\alpha')R(\beta')R(\gamma')$. $R(\alpha')$ amène B sur C' , $R(\beta')$ amène C' sur A, $R(\gamma')$ amène A sur B' . Donc le produit considéré amène B à coïncider avec la droite opposée B' . Si l'on suppose maintenant des points marqués sur B, il en existe un et un seul I qui vient coïncider avec lui-même. Le produit $R(\alpha')R(\beta')R(\gamma')$ qui laisse ce point invariable est donc une *rotation* dont l'axe X passe par I. De plus, B venant sur B' , X doit être perpendiculaire à B, et l'angle de la rotation est égal à π . Cette rotation est donc un renversement, et l'on a

$$R(\alpha')R(\beta')R(\gamma') = R(X).$$

Multiplions à droite les deux membres de cette égalité par $R(\gamma')$. On a

$$[R(\gamma')]^2 = 1,$$

donc

$$R(\alpha')R(\beta') = R(X)R(\gamma').$$

Comme on l'a rappelé au n° 4, cela exige que les droites α', β', γ' et X rencontrent à angle droit une même droite. On voit donc, en laissant de côté X, que :

Les trois bissectrices extérieures α', β', γ' doivent

rencontrer à angle droit une même droite (ce qui fait deux conditions).

On reconnaît de même qu'une bissectrice extérieure et deux bissectrices intérieures, par exemple α' , β et γ , rencontrent à angle droit une même droite. En effet ces trois droites sont les bissectrices extérieures du système A', B, C.

6. Il suffit maintenant d'un mot pour démontrer le théorème du n° 1. Donnons-nous α , β , γ . Les droites A, B, C, puis les droites α' , β' , γ' en résultent. Ces trois dernières droites rencontrent à angle droit une droite δ . De même α' , β et γ rencontrent à angle droit une droite a ; α , β' et γ une droite b ; α , β et γ' une droite c . Enfin α et α' se rencontrent à angle droit; de même β et β' , de même γ et γ' . On a bien retrouvé toutes les particularités de la figure 1.

7. On peut encore rattacher le théorème à la théorie des systèmes de vecteurs. Partons du lemme suivant :

Soient (T_1) , (T_2) , (T_3) trois torseurs (ou systèmes de vecteurs), dont l'ensemble forme un torseur nul. Les axes de ces torseurs rencontrent à angle droit une même droite.

En effet, à chaque torseur (T_i) on peut attacher un complexe linéaire C_i , lieu des axes de moment nul de ce torseur. Les trois complexes C_i appartiennent à un faisceau, car toute droite commune à C_1 et à C_2 étant axe de moment nul de (T_1) et de (T_2) , ainsi que de $(T_1) + (T_2) + (T_3)$, nul par hypothèse, l'est aussi de (T_3) , donc appartient à C_3 . Or on sait que le lieu des axes des complexes d'un faisceau est un cylindroïde, dont toutes les génératrices rencontrent à angle droit

une même droite. Il en est donc ainsi des axes des C_i . Mais ces axes sont confondus avec ceux des torseurs correspondants. Le lemme est donc établi.

Cela posé; soient A, B, C trois vecteurs de même module; A', B', C' les vecteurs opposés. Soient, en reprenant les notations du n° 4, α, β, γ les bissectrices des couples (B, C) ou (B', C') , (C, A) ou (C', A') , (A, B) ou (A', B') , et α', β', γ' les bissectrices des couples (B, C') ou (B', C) , (C, A') ou (C', A) , (A, B') ou (A', B) .

Les six vecteurs considérés formant un torseur nul, il en est de même des trois torseurs (B, C') , (C, A') , (A, B') . Donc les axes de ces torseurs, qui ne sont évidemment autres que les bissectrices α', β', γ' , rencontrent à angle droit une même droite δ .

En groupant les vecteurs de manière à former les trois torseurs (B, C') , (C, A) , (A', B') , on reconnaît que les bissectrices α', β, γ rencontrent à angle droit une même droite α . On achève comme au n° 6.

Cette démonstration est plus concise que celle que j'ai indiquée en premier lieu, mais elle ne montre pas que les droites α, β et γ peuvent être données *a priori*.

[D1a]

LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ ÉTABLIE PAR UN PROCÉDÉ
DE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

PAR J. PAOLI,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée d'Alger.

Je rappelle l'inégalité connue, bien facile à établir d'ailleurs,

$$(1) \quad (1 - \alpha)^n > 1 - n\alpha,$$

dans laquelle α désigne un nombre relatif plus petit que 1, et n un nombre naturel.

Soient x un nombre relatif donné, et m un nombre naturel variable assujéti à la condition $m + x > 0$.

La fonction $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ du nombre naturel m est croissante et a une limite quand m augmente infiniment.

Démontrons d'abord qu'elle est croissante.

Il s'agit d'établir l'inégalité

$$\left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m,$$

ou

$$\left(\frac{m+1+x}{m+1}\right)^{m+1} > \left(\frac{m+x}{m}\right)^m,$$

laquelle, après avoir multiplié ses deux membres par le nombre positif $\left(\frac{m}{m+x}\right)^{m+1}$, s'écrit

$$\left(\frac{m(m+1+x)}{(m+1)(m+x)}\right)^{m+1} > \frac{m}{m+x},$$

ou encore

$$\left(\frac{(m+1)(m+x) - x}{(m+1)(m+x)}\right)^{m+1} > 1 - \frac{x}{m+x},$$

puis enfin

$$\left(1 - \frac{x}{(m+1)(m+x)}\right)^{m+1} > 1 - (m+1)\frac{x}{(m+1)(m+x)}.$$

Sous cette forme on voit que ce n'est autre que l'inégalité (1) dans laquelle on a remplacé n par $m+1$ et α par le nombre $\frac{x}{(m+1)(m+x)}$ qui est manifestement plus petit que 1.

Si le nombre donné x est négatif, la fonction $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ est bornée supérieurement par le nombre 1 ;

or elle est croissante, elle a donc une limite quand m augmente infiniment.

Supposons x positif et posons

$$y = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m, \quad z = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m.$$

On a

$$y = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m}{z}.$$

On vient de démontrer que z a une limite; je dis que $\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m$ a pour limite 1. En effet, si dans l'inégalité (1) je remplace α par $\frac{x^2}{m^2}$ et n par m , j'obtiens

$$\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{m},$$

la double inégalité

$$1 > \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{m}$$

montre bien que $\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m$ a pour limite 1 quand m augmente infiniment. La fonction y a par conséquent une limite qui est égale à $\frac{1}{\lim z}$.

La proposition est donc démontrée, et la démonstration a mis en évidence la propriété suivante : Si l'on désigne par $l(x)$ la limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, on a

$$l(x) \cdot l(-x) = 1.$$

On déduit de là que la fonction $\left(1 + \frac{x}{m-x}\right)^m$ est décroissante et a pour limite $l(x)$. Cela résulte de la relation évidente

$$\left(1 + \frac{x}{m-x}\right)^m = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m}.$$

Quel que soit le nombre naturel m on pourra donc écrire

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m < l(x) < \left(1 + \frac{x}{m+1-x}\right)^{m+1}.$$

En particulier, si $x = 1$,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Cette double inégalité peut être utilisée pour le calcul approché du nombre e .

[O'3gγ]

**SUR L'ENVELOPPE
D'UNE FAMILLE DE LIGNES A DEUX PARAMÈTRES;**

PAR CH. RIQUIER.

1. Considérons, dans l'espace à trois dimensions, une famille de lignes dépendant des deux paramètres a, b , et définie (en coordonnées rectilignes) par le couple d'équations

$$f_1(x, y, z, a, b) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, b) = 0;$$

ce couple est, naturellement, supposé résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites ⁽¹⁾, par rapport à l'un au moins des trois couples de coordonnées (y, z) , (z, x) , (x, y) . Cela étant, proposons-nous de rechercher *s'il existe quelque surface fixe ayant un contact proprement dit* ⁽²⁾ avec cha-

⁽¹⁾ Voir RIQUIER, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 120, 121.

⁽²⁾ C'est-à-dire d'ordre supérieur à zéro.

cune des lignes de la famille. Une pareille surface, si elle existe, se nommera *l'enveloppe* des lignes de la famille, et chacune de ces dernières se nommera elle-même une *enveloppée*.

I. Considérons une ligne et une surface représentées, la première, suivant le mode réduit, à l'aide du système

$$(1) \quad F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0,$$

la seconde, suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$(2) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

où u, v désignent deux variables auxiliaires.

Pour que, au point (u, v) de la surface (2), il y ait un contact proprement dit entre cette surface et la ligne (1), il faut et il suffit que l'on ait, pour les valeurs particulières considérées de u, v ,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ \quad + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 0. \end{array} \right.$$

Effectivement, pour exprimer le contact spécifié par notre énoncé, il suffit d'écrire, d'abord, que le point (u, v) de la surface est situé sur la ligne (1), ce qui donne les deux premières relations (3), puis, que la tangente à la ligne est en symptose avec le plan tangent à la surface. Or, la tangente à la ligne a pour équations

$$\frac{X - x}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}},$$

et le plan tangent à la surface a pour équation

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(X - x) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(Y - y) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(Z - z) = 0;$$

la condition de leur symptose est donc la dernière relation (3).

II. Si l'on désigne par x, y, z trois fonctions des variables arbitraires u, v , telles que les deux fonctions composées (olotropes)

$$g_1(x, y, z, u, v), \quad g_2(x, y, z, u, v)$$

s'annulent identiquement, quels que soient u et v , on a aussi identiquement, quels que soient u et v ,

$$(4) \quad \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)} \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z, x)} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Effectivement, les identités supposées,

$$g_1(x, y, z, u, v) = 0, \quad g_2(x, y, z, u, v) = 0,$$

entraînent manifestement les suivantes :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial g_1}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial g_2}{\partial v} = 0.$$

En tirant de ces dernières $\frac{\partial g_1}{\partial u}, \frac{\partial g_1}{\partial v}, \frac{\partial g_2}{\partial u}, \frac{\partial g_2}{\partial v}$, on a donc,

quels que soient u et v ,

$$\frac{d(g_1, g_2)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{dg_1}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{dg_1}{dy} \frac{dy}{du} + \frac{dg_1}{dz} \frac{dz}{du} & \frac{dg_1}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{dg_1}{dy} \frac{dy}{dv} + \frac{dg_1}{dz} \frac{dz}{dv} \\ \frac{dg_2}{dx} \frac{dx}{du} + \frac{dg_2}{dy} \frac{dy}{du} + \frac{dg_2}{dz} \frac{dz}{du} & \frac{dg_2}{dx} \frac{dx}{dv} + \frac{dg_2}{dy} \frac{dy}{dv} + \frac{dg_2}{dz} \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}$$

Or, d'après une formule connue de la théorie des déterminants, l'expression ainsi obtenue n'est autre chose que le second membre de la formule (4).

III. Revenons à la question qu'il s'agit de résoudre, et soient, comme plus haut,

$$(5) \quad f_1(x, y, z, a, b) = 0, \quad f_2(x, y, z, a, b) = 0$$

les équations qui définissent la famille de lignes donnée, dépendant des deux paramètres a et b . A chaque ligne particulière représentée par les équations (5), c'est-à-dire à chaque système de valeurs particulières de a , b , faisons correspondre, sur cette ligne, un point M,

$$(6) \quad X = \varphi(a, b), \quad Y = \chi(a, b), \quad Z = \psi(a, b),$$

suivant une loi provisoirement indéterminée, et cherchons à déterminer cette loi, c'est-à-dire les fonctions $\varphi(a, b)$, $\chi(a, b)$, $\psi(a, b)$, de telle sorte que le lieu des points M soit une surface tangente, en chacun de ces points, à la ligne particulière correspondante.

Observons à cet effet que la surface cherchée, si elle existe, est représentée par les formules (6), où a , b sont considérés comme des variables auxiliaires; et que, d'autre part, une ligne particulière de la famille (5) s'obtient en attribuant à a , b , dans les équations (5),

des valeurs constantes. Pour appliquer les formules (3) de l'alinéa I, nous devons donc, dans $f_1(X, Y, Z, a, b)$, $f_2(X, Y, Z, a, b)$, considérer comme des constantes les quantités a, b qui y figurent explicitement en dehors de X, Y, Z , et au contraire comme des variables celles qui y figurent implicitement par l'intermédiaire de X, Y, Z ; il viendra ainsi

$$\begin{aligned} f_1(X, Y, Z, a, b) = 0, \quad f_2(X, Y, Z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(Y, Z)} \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(Z, X)} \frac{\partial(Z, X)}{\partial(a, b)} \\ + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X, Y)} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(a, b)} = 0; \end{aligned}$$

ces relations devront être vérifiées quels que soient a et b . D'ailleurs, dans le système ainsi obtenu, la dernière relation, en vertu de l'alinéa II, pourra être remplacée par $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0$.

Nous avons donc, pour déterminer les trois fonctions inconnues, un système de trois équations, qui, après remplacement des notations X, Y, Z par les notations x, y, z , s'écrira

$$(7) \quad \begin{cases} f_1(x, y, z, a, b) = 0, & f_2(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0. \end{cases}$$

Pour que les lignes (5) aient une enveloppe, il faut et il suffit, ainsi que cela résulte des premières notions de Géométrie infinitésimale : 1° qu'à partir de laquelle qu'une des solutions numériques du système (7), regardée comme *fondamentale*, ce système soit résoluble par rapport à x, y, z conformément au principe général des fonctions implicites; 2° que, si l'on considère les formules de résolution

$$(8) \quad x = \varphi(a, b), \quad y = \chi(a, b), \quad z = \psi(a, b),$$

l'un au moins des trois couples

$$\chi, \psi; \psi, \varphi; \varphi, \chi$$

présente, par rapport à a, b , un déterminant différentiel à valeur fondamentale non nulle, ou, ce qui revient au même, que l'un au moins des trois couples de formules extraits de (8) soit résoluble par rapport à a, b conformément au même principe.

En d'autres termes, si l'on considère le déterminant différentiel relatif à x, y, z du système (7), et les trois déterminants différentiels relatifs à a, b des formules (8), la solution numérique dont il s'agit doit laisser à la fois différents de zéro le premier de ces quatre déterminants et l'un au moins des trois derniers.

Lorsqu'il en est ainsi, les formules (8) définissent une véritable surface, cette surface fixe est tangente à chacune des lignes de la famille (5), et son point de contact avec la ligne (a, b) de la famille est fourni par les formules (8).

2. Si l'on a égard à la forme particulière du système (7), les conditions formulées ci-dessus pour l'existence d'une enveloppe des lignes (5) conduisent à l'énoncé suivant :

Considérons, en même temps que le système (7), les deux systèmes

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1 = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2 = 0, \\ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, b)} = 0, \end{array} \right.$$

extraits de (7).

Pour que les lignes (5) aient une enveloppe, il

faut et il suffit qu'à partir de quelque une des solutions numériques du système (7), regardée comme fondamentale, ce système, d'une part, et l'un au moins des systèmes (9), (10), d'autre part, soient résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites, le premier par rapport à x , y , z , le second par rapport à a , b .

En d'autres termes, si l'on considère le déterminant différentiel relatif à x , y , z du système (7), et les déterminants différentiels relatifs à a , b des systèmes respectifs (9), (10), la solution numérique dont il s'agit doit laisser à la fois différents de zéro le premier de ces trois déterminants et l'un au moins des deux derniers.

La condition posée est nécessaire.

Effectivement, s'il existe une enveloppe, le système (7), résoluble par rapport à x , y , z , équivaut ⁽¹⁾ au système des formules de résolution (8), dont deux, les deux premières par exemple, sont elles-mêmes résolubles par rapport à a , b . Le système (8) est alors résoluble par rapport à a , b , z , donc aussi le système équivalent (7) ⁽²⁾, d'où résulte (en vertu de la théorie générale des déterminants) que deux des trois équations (7) sont résolubles par rapport à a , b ⁽³⁾; et comme, à cause de la troisième, les deux premières ne le sont certainement pas, l'un au moins des deux systèmes (9), (10) ne pourra manquer de l'être.

⁽¹⁾ RIQUIER. *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 122.

⁽²⁾ *Ibid.*, n° 133.

⁽³⁾ Si les trois déterminants différentiels relatifs à a , b du système (7) avaient des valeurs fondamentales à la fois nulles, le déterminant différentiel relatif à a , b , z du même système aurait aussi une valeur fondamentale nulle.

La condition posée est suffisante.

Effectivement, si on la suppose remplie, le système (7), résoluble par rapport à x, y, z , comprend deux équations résolubles par rapport à a, b , d'où résulte (en vertu de la théorie générale des déterminants) qu'il est résoluble par rapport à l'un au moins des trois groupes

$$a, b, x; \quad a, b, y; \quad a, b, z, \quad (1)$$

par exemple par rapport à a, b, z . Le système (8), équivalent à (7), est donc lui-même résoluble par rapport à a, b, z , ce qui exige que les deux premières formules (8) soient résolubles par rapport à a, b .

3. Au lieu de supposer, comme dans ce qui précède, que la famille de lignes dépendant des paramètres a, b se trouve définie, suivant le mode réduit, par le sys-

(1) Si, dans le Tableau

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & b_5, \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & c_5, \end{array}$$

à trois lignes et cinq colonnes, les deux dernières colonnes contiennent quelque déterminant du second ordre différent de zéro, et qu'en même temps leur association avec chacune des trois premières donne un déterminant du troisième ordre égal à zéro, il est aisé de voir que tous les déterminants du troisième ordre extraits du Tableau sont nuls, et notamment celui qui résulte de l'association des trois premières colonnes.

Il résulte de là que si, dans le Tableau différentiel relatif à x, y, z, a, b du système (7), les deux dernières colonnes contiennent quelque déterminant du second ordre à valeur fondamentale non nulle, et qu'en même temps son association avec chacune des trois premières donne un déterminant du troisième ordre à valeur fondamentale nulle, le déterminant du troisième ordre fourni par l'association des trois premières a lui-même une valeur fondamentale nulle.

tème (5), supposons qu'elle se trouve représentée, suivant le mode paramétrique, à l'aide des formules

$$(11) \quad x = \varphi(t, a, b), \quad y = \chi(t, a, b), \quad z = \psi(t, a, b),$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \chi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ne sont pas à la fois identiquement nuls.

Pour que la ligne variable (11) reste constamment tangente à une surface fixe, il faut qu'à chaque détermination de cette ligne variable on puisse faire correspondre sur elle un point M suivant une loi telle, que le lieu des points M soit une surface tangente, en un quelconque de ces points, à la ligne correspondante de la famille (11); telle, par suite, que, au point considéré, la tangente à la ligne et le plan tangent à la surface soient en symptose. En d'autres termes, il faut que, en remplaçant t par une fonction de a et b convenablement choisie, ce qui donnera sur chacune des lignes (11) un point M, les quantités, α , β , γ , qui dirigent la tangente en M à la ligne (11), et les quantités, A, B, C, qui dirigent le plan tangent au lieu cherché des points M, vérifient, quels que soient a et b , la relation $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Or, les quantités α , β , γ et A, B, C sont proportionnelles, les premières à

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \chi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

les dernières aux déterminants du second ordre extraits du Tableau

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}, & \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a}, & \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}, & \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \chi}{\partial b}, & \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b}; \end{cases}$$

on doit donc avoir, quels que soient a et b , la relation

$$(14) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{dt}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{dt}{\partial b} + \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{d\varphi}{dt} \end{array} \right| + \dots + \dots = 0,$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$(15) \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{dt}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} \frac{dt}{\partial a} + \frac{\partial \chi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{d\chi}{dt} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{dt}{\partial b} + \frac{\partial \psi}{\partial b} \frac{d\psi}{dt} \end{array} \right| = 0 \quad (1).$$

Le premier membre de (15) est d'ailleurs la somme de quatre déterminants du troisième ordre, dont trois s'évanouissent identiquement comme ayant deux colonnes proportionnelles, et l'équation (15) prend dès lors la forme réduite

$$(16) \quad \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0.$$

Pour que les lignes (11) aient une enveloppe, il est évidemment nécessaire et suffisant : 1° qu'à partir de quelque solution numérique (fondamentale) de l'équation (16), cette dernière soit résoluble par rapport à t conformément au principe général des fonctions implicites; 2° qu'en remplaçant t dans le Tableau (13) par la valeur ainsi obtenue, les déterminants du second ordre extraits du Tableau résultant présentent des valeurs fondamentales non à la fois nulles, ou, ce qui

(1) Le premier membre de (14) n'est autre chose, en effet, que le déterminant du troisième ordre formé avec les lignes (13) et (12); en y permutant les lignes avec les colonnes, on tombe sur la forme (15).

revient au même, que l'un au moins des trois couples de formules extraits de (11) soit, après cette substitution, résoluble par rapport à a , b conformément au même principe.

Cette double condition peut encore se formuler comme il suit.

Considérons, en même temps que l'équation (16), les trois systèmes

$$(17) \quad \begin{cases} y = \chi(t, a, b), \\ z = \psi(t, a, b), \\ \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0; \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} z = \psi(t, a, b), \\ x = \varphi(t, a, b), \\ \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0; \end{cases}$$

$$(19) \quad \begin{cases} x = \varphi(t, a, b), \\ y = \chi(t, a, b), \\ \frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(t, a, b)} = 0, \end{cases}$$

dont chacun s'obtient en adjoignant à l'équation (16) deux équations extraites de (11).

Pour que les lignes (11) aient une enveloppe, il faut et il suffit qu'en choisissant convenablement une solution numérique (fondamentale) de l'équation (16), cette dernière, d'une part, et l'un au moins des systèmes (17), (18), (19), d'autre part, soient résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites, la première par rapport à t , le second par rapport à t , a , b .

En d'autres termes, si l'on considère la dérivée partielle relative à t du premier membre de (16), et les déterminants différentiels relatifs à t , a , b des

systèmes respectifs (17), (18), (19), la solution numérique dont il s'agit doit laisser à la fois différents de zéro cette dérivée partielle et l'un au moins de ces trois déterminants.

[R7b]

**SUR UNE CERTAINE LOI DE FORCE COMPRENANT
COMME CAS PARTICULIER LA LOI DE GRAVITA-
TION EINSTEINIENNE ;**

PAR J. HAAG.

1. Soit un point M, de masse 1, soumis aux deux forces suivantes :

1° *Une force centrale*

$$F_1 = F + v^2(A_1 + A_2 \cos^2 i);$$

2° *Une force tangente à la trajectoire*

$$F_2 = A_3 v^2 \cos i.$$

Dans ces formules, F , A_1 , A_2 , A_3 sont des fonctions du rayon vecteur $r = OM$; v est la vitesse et i l'angle de cette vitesse avec OM .

Nous appellerons *forces perturbatrices* les forces autres que F .

On peut déterminer le mouvement du point M par des quadratures. D'abord, sa trajectoire est dans un plan passant par O , car le plan osculateur à cette ligne passe constamment par ce point fixe. Prenons, dans ce plan, un système de coordonnées polaires, de pôle O . Soient σ le moment cinétique par rapport à O et p la dis-

(62)

tance du pôle à la tangente à la trajectoire. On a

$$\sigma = v\rho.$$

D'autre part,

$$\frac{d\sigma}{dt} = F_2\rho;$$

d'où

$$\begin{aligned} d\log\sigma &= \frac{F_2}{v} dt = A_3 v \cos i dt = A_3 dr, \\ \log\sigma &= \int A_3 dr. \end{aligned}$$

Pour la commodité de l'écriture, posons

$$(1) \quad \int A_3 dr = A, \quad A_3 = \frac{dA}{dr}.$$

Nous avons

$$(2) \quad \sigma = r^2 \frac{d\theta}{dt} = ke^A \quad (k = \text{const.}),$$

équation qui généralise *l'intégrale des aires* de la théorie des forces centrales.

Appliquons maintenant le théorème des forces vives. Nous avons

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = F_1 dr + F_2 v dt = (F_1 + A_3 v^2) dr$$

ou, en remarquant que

$$\begin{aligned} v^2 \cos^2 i &= v^2 - \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 = v^2 - \frac{k^2 e^{2A}}{r^2}, \\ (3) \quad \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dr} &= F - \frac{A_2 k^2 e^{2A}}{r^2} + v^2 (A_1 + A_2 + A_3), \end{aligned}$$

équation différentielle linéaire du premier ordre en v^2 , qui nous donnerait, par deux quadratures, v en fonction de r . On aurait ensuite, par la méthode classique des forces centrales, θ et t par deux nouvelles quadratures.

2. Cherchons l'équation de la trajectoire.

Posons $r = \frac{1}{u}$ et calculons la quantité

$$(4) \quad x = \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2.$$

on a

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2} k^2 e^{2\Lambda} = x k^2 e^{2\Lambda}.$$

Portons dans (3) :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} u^2 k^2 e^{2\Lambda} \left(\frac{dx}{du} + 2x \frac{d\Lambda}{du} \right) \\ & = F - A_2 k^2 u^2 e^{2\Lambda} + x k^2 e^{2\Lambda} (A_1 + A_2 + A_3), \end{aligned}$$

ou, en remarquant que

$$\begin{aligned} u^2 \frac{d\Lambda}{du} &= -\frac{d\Lambda}{dr} = -A_3, \\ -\frac{1}{2} u^2 \frac{dx}{du} &= x(A_1 + A_2) - A_2 u^2 + \frac{F}{k^2} e^{-2\Lambda}, \end{aligned}$$

posons

$$(5) \quad 2 \int (A_1 + A_2) dr = B;$$

notre équation devient

$$(6) \quad \frac{dx}{du} - x \frac{dB}{du} = 2 A_2 - 2 \frac{F}{k^2 u^2} e^{-2\Lambda},$$

dont l'intégrale générale est

$$(7) \quad x = e^B \left[h + 2 \int \left(e^{-B} A_2 - \frac{F}{k^2 u^2} e^{-B-2\Lambda} \right) du \right] \quad (h = \text{const.}).$$

Ayant x en fonction de u , l'équation (4) donnera θ par une quadrature. On peut aussi, en dérivant par rapport à θ , former l'équation du second ordre :

$$(8) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{2} \frac{dx}{du}.$$

Supposons que l'on connaisse la trajectoire et, par

conséquent, x en fonction de u . On peut alors tirer de l'équation (6)

$$F = k^2 e^{2\Lambda} u^2 \left[\Lambda_2 + \frac{1}{2} x \frac{dB}{du} - \frac{1}{2} \frac{dx}{du} \right]$$

ou

$$(9) \quad F = k^2 e^2 \left[u^2 \left(\Lambda_2 - \frac{1}{2} \frac{dx}{du} \right) - (\Lambda_1 + \Lambda_2) x \right].$$

Ceci peut être considéré comme une *généralisation de la formule de Binet*. Elle nous donne la force centrale F , connaissant la trajectoire et les forces perturbatrices, lesquelles peuvent être choisies arbitrairement. On voit qu'il y a une infinité de lois de force, de la nature présentement étudiée, qui permettent de réaliser une trajectoire quelconque donnée à l'avance.

Dans le cas particulier où les forces perturbatrices sont nulles, la formule (9) se réduit à

$$F = -k^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right),$$

ce qui est la classique formule de Binet.

3. Cherchons les *lois de force qui donnent lieu à la première loi de Képler*. Supposons qu'une trajectoire particulière soit une ellipse, de foyer O , définie par l'équation

$$(10) \quad u = \frac{1 + e \cos \theta}{p}.$$

On a, dans cette hypothèse,

$$(11) \quad x = -\frac{1 - e^2}{p^2} + \frac{2u}{p}$$

et, en portant dans (9),

$$(12) \quad F = k^2 e^{2\Lambda} \left[\left(\Lambda_2 - \frac{1}{p} \right) u^2 + \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{p} \left(\frac{1 - e^2}{p} - 2u \right) \right].$$

Mais, F ne doit pas dépendre des constantes k, e, p .
Donc le crochet du second membre doit être le produit
d'une fonction de u par une fonction de e et de p . Or,
il s'écrit

$$A_2 u^2 - \frac{B_1}{p} + \frac{1-e^2}{p^2} B_2,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(13) \quad B_1 = u^2 + 2u(A_1 + A_2) \quad B_2 = A_1 + A_2.$$

Il faut que B_1 et B_2 soient dans un rapport constant
avec $A_2 u^2$, soit

$$B_1 = \lambda A_2 u^2, \quad B_2 = \mu A_2 u^2 \quad (\lambda, \mu = \text{const.}).$$

On tire de là

$$(14) \quad A_1 = \frac{\mu u^2 - 1}{\lambda - 2\mu u}, \quad A_2 = \frac{1}{\lambda - 2\mu u}.$$

Portant dans (12), il vient

$$(15) \quad F = \frac{k^2 e^{2A} u^2}{\lambda - 2\mu u} \left(1 - \frac{\lambda}{p} + \mu \frac{1-e^2}{p^2} \right) = v \frac{e^{2A}}{r(\lambda r - 2\mu)}$$

($v = \text{const.}$).

En prenant la dérivée logarithmique par rapport à r
et se reportant à (1), ceci peut aussi s'écrire

$$(16) \quad A_3 = \frac{F'}{2F} + \frac{\lambda r - \mu}{r(\lambda r - 2\mu)}.$$

*On peut donc satisfaire à la première loi de Képler
en prenant une force F arbitraire, les forces pertur-
batrices étant ensuite données par (14) et (16), où
 λ et μ sont des constantes quelconques.*

Si l'on veut, en même temps, vérifier la deuxième
loi de Képler, il faut que A soit nul; la formule (15)
donne alors

$$(17) \quad F = \frac{v}{r(\lambda r - 2\mu)}.$$

La force perturbatrice tangentielle est nulle; les autres sont toujours données par (14).

En particulier, *on doit retrouver la loi de Newton*. Effectivement, il suffit de supposer $\mu = 0$, $\lambda = \infty$, $\frac{v}{\lambda} = -m$.

4. Cherchons maintenant *quelles sont les lois de force qui donnent exactement les trajectoires d'Einstein*.

L'équation différentielle d'une telle trajectoire est, si l'on prend pour unités la vitesse de la lumière et la constante de la gravitation, de la forme suivante (1)

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{2m}{b^2} u + 2m u^3,$$

où m désigne la masse attirante et a et b des constantes d'intégration. Avec nos notations, nous avons donc

$$x = \frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{2m}{b^2} u + 2m u^3.$$

Portant dans (9), il vient

$$(18) \quad F = k^2 e^{2\lambda} \left[u^2 \left(A_2 - \frac{m}{b^2} - 3m u^2 \right) - (A_1 + A_2) \left(\frac{a^2 - 1}{b^2} + \frac{2m}{b^2} u + 2m u^3 \right) \right].$$

Comme tout à l'heure, nous voulons que la loi de force soit indépendante des constantes d'intégration et le crochet doit être le produit d'une fonction de u par une fonction de a et de b . Posons, outre (13),

$$u^2(A_2 - 3m u^2) - 2m u^3(A_1 + A_2) = B_3.$$

(1) Cf. BECQUEREL, *Le principe de Relativité*, p. 232; Gauthier-Villars, 1922.

On a alors

$$F = k^2 e^{2\Lambda} \left(B_3 - \frac{m}{b^2} B_1 - \frac{a^2 - 1}{b^2} B_2 \right)$$

et, comme tout à l'heure, il faut avoir des identités de la forme

$$B_1 = \lambda B_2, \quad B_3 = \mu B_2;$$

λ et μ étant des constantes déterminées. On tire de là

$$(19) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{-\mu + u^2(1 - 3m\lambda) + 4mu^3}{\lambda - 2u}, \\ A_2 = \frac{\mu + 3m\lambda u^2 - 4mu^3}{\lambda - 2u}. \end{cases}$$

Puis,

$$(20) \quad F = v \frac{e^{2\Lambda} u^2}{\lambda - 2u} = v \frac{e^{2\Lambda}}{r(\lambda r - 2)} \quad (v = \text{const});$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(21) \quad A_3 = \frac{F'}{2F} + \frac{\lambda r - 1}{r(\lambda r - 2)}.$$

Donc, on peut réaliser l'ensemble des trajectoires d'Einstein en prenant une force F arbitraire, les forces perturbatrices étant ensuite définies par (19) et (21).

Si l'on veut maintenant que la loi du mouvement sur la trajectoire soit la même qu'avec la gravitation einsteinienne, il faut avoir (cf. BECQUEREL, *loc. cit.*, p. 230)

$$k e^{\Lambda} = \frac{b}{a} (1 - 2mu);$$

d'où, en portant dans (20) et changeant la constante v ,

$$F = v \frac{u^2(1 - 2mu)^2}{\lambda - 2u}.$$

Si, en particulier, on prend $\lambda = \frac{1}{m}$, $\mu = 0$, $v = -1$,

on aboutit, en utilisant (19) et (21), à la loi de force

$$F_1 = -\frac{m}{r^2} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) + 2v^2 - r'^2 \frac{3 - 4\frac{m}{r}}{1 - 2\frac{m}{r}} \right],$$

$$F_2 = \frac{2mvr'}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)};$$

ce qui est exactement la loi de force correspondant à la gravitation einsteinienne. (Cf. CHAZY, *Comptes rendus*, 29 janvier 1923, page 285).

5. D'après ce qui précède, on voit qu'il existe une infinité de lois de force permettant de reproduire exactement la trajectoire d'Einstein et, par conséquent, d'expliquer le mouvement du périhélie de Mercure. Mais, si l'on s'impose seulement cette dernière condition, le problème admet encore beaucoup d'autres solutions.

Nous nous bornerons à chercher celles qui donnent une loi très voisine de celle de Newton.

Si nous considérons v^2 (carré du rapport de la vitesse du mobile à la vitesse de la lumière) comme infiniment petit du premier ordre, nous remarquons d'abord que mu est du même ordre, ainsi qu'il résulte de la deuxième équation intrinsèque du mouvement, écrite avec l'attraction newtonienne $-mu^2$. Toutes les forces perturbatrices doivent être de l'ordre de m^2u^3 . Nous les réduisons d'ailleurs à leurs parties principales. Dès lors, nous pouvons poser

$$(22) \quad \begin{cases} F = -mu^2 + \alpha m^2u^3, \\ A_1 = \beta mu^2, & A_2 = \gamma mu^2, & A_3 = \varepsilon mu^2, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ étant des nombres constants quelconques (1).

Nous allons maintenant calculer x par la formule (7), en négligeant les infiniment petits du second ordre. Nous avons d'abord, par la formule (1),

$$(23) \quad A = \varepsilon m \int u^2 dr = -\varepsilon mu;$$

puis, par la formule (5),

$$(24) \quad B = -2(\beta + \gamma)mu.$$

Avant d'aller plus loin, cherchons la signification des constantes h et k . Si l'on admet la loi de Newton, l'équation (7) devient

$$x = h + \frac{2m}{k^2} u.$$

En comparant avec (11), on a

$$(25) \quad h = -\frac{1-e^2}{p^2}, \quad k^2 = mp.$$

Avec la loi actuelle, nous pouvons encore poser ces formules. Mais, bien entendu, p et e n'ont plus de signification géométrique simple, puisque la trajectoire n'est plus une conique. Toutefois, on peut dire que p est une longueur voisine du paramètre et e un nombre voisin de l'excentricité de la trajectoire newtonienne.

Portons (23), (24), (25) dans (7). Calculons d'abord la quantité sous le signe \int . Au second ordre près, elle

(1) On pourrait supposer que ce sont des fonctions quelconques de u . Mais, si l'on admet que chacune de ces fonctions possède une dérivée finie et continue pour les petites valeurs de mu , on peut la réduire à la valeur qu'elle prend pour $mu = 0$, car l'erreur commise n'a qu'une répercussion du second ordre sur A_1, A_2, A_3 , et du troisième ordre sur F .

s'écrit

$$\gamma mu^2 + \frac{1}{p} \left[1 + 2 \left(\beta + \gamma + \varepsilon - \frac{\alpha}{2} \right) mu \right],$$

ce qui devient, en intégrant,

$$\frac{u}{p} + \left(\beta + \gamma + \varepsilon - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{mu^2}{p} + \frac{\gamma mu^3}{3}.$$

Dès lors,

$$x = \left[1 - 2(\beta + \gamma)mu \right] \\ \left[-\frac{1-e^2}{p^2} + \frac{2u}{p} + 2 \left(\beta + \gamma + \varepsilon - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{mu^2}{p} + \frac{2}{3} \gamma mu^3 \right],$$

ou, en négligeant le second ordre,

$$x = -\frac{1-e^2}{p^2} + \frac{2u}{p} \left[1 + \frac{m}{p}(1-e^2)(\beta + \gamma) \right] \\ + \frac{2mu^2}{p} \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta - \gamma \right) + \frac{2}{3} \gamma mu^3.$$

Si l'on portait dans (4), on verrait que le calcul de θ en fonction de u se ramène à une intégrale elliptique. Mais, il est plus simple de porter dans (8). On obtient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p} \left[1 + \frac{m}{p}(1-e^2)(\beta + \gamma) \right] \\ + \frac{2mu}{p} \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta - \gamma \right) + \gamma mu^2.$$

Nous savons que l'intégrale cherchée est très voisine de $\frac{1+e \cos \theta}{p}$. Dès lors, nous pouvons, en ne commettant qu'une erreur du second ordre, remplacer u par cette valeur au second membre. Celui-ci prend alors la forme

$$\frac{1}{p} + \frac{2me \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta \right)}{p^2} \cos \theta + \dots,$$

les termes non écrits étant de la forme $a + b \cos 2\theta$, avec des coefficients a et b de l'ordre de $\frac{m}{p}$.

Pour intégrer, on réduit successivement le second membre à chacun de ses termes et l'on cherche l'intégrale particulière correspondante. L'intégrale fournie par $a + b \cos 2\theta$ est $a - \frac{b}{3} \cos 2\theta$. Elle n'a qu'une répercussion négligeable sur l'intégrale générale, parce qu'elle est périodique et son effet ne s'accumule pas au cours des siècles. Au contraire, le terme en $\cos \theta$ donne l'intégrale particulière

$$\frac{m e \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta \right)}{p^2} \theta \sin \theta,$$

qui finit par devenir appréciable pour les grandes valeurs de θ . Dès lors, l'équation approchée de la trajectoire s'écrit

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{p} + \frac{m e \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta \right)}{p^2} \theta \sin \theta.$$

Elle peut, au second ordre près, se mettre sous la forme

$$u = \frac{1 + e \cos (\theta - \theta_0)}{p},$$

en posant

$$(26) \quad \theta_0 = \frac{m}{p} \left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta \right) \theta.$$

Si l'on prend un nouvel axe polaire Ox' , d'angle polaire θ_0 , l'équation de la trajectoire rapportée à cet axe est

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{p}.$$

Elle représente une conique E' . Par rapport à

l'ancien axe Ox , le mouvement résulte du mouvement sur E' , combiné avec une rotation de E' autour de O , dont l'amplitude θ_0 est définie par la formule (26). C'est cette rotation qui constitue le *mouvement périhélique*. Dans la théorie d'Einstein, l'angle θ_0 est égal à $\frac{3m}{\rho} \theta$. Donc, pour que notre loi de force reproduise cette rotation, qui, comme on sait, est conforme à l'observation en ce qui concerne la planète Mercure, il faut et il suffit que l'on ait ⁽¹⁾

$$(27) \quad \varepsilon - \frac{\alpha}{2} - \beta = 3.$$

Citons comme cas particuliers simples :

$$\alpha = -6, \quad \varepsilon = \beta = \gamma = 0,$$

force centrale ⁽²⁾ $-\frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{6m}{r} \right)$;

$$\beta = -3, \quad \alpha = \varepsilon = \gamma = 0,$$

force centrale ⁽²⁾ $-\frac{m}{r^2} \left(1 + 3v^2 \right)$;

$$\varepsilon = 3, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

attraction newtonienne et force tangentielle $\frac{3m v^2 \cos i}{r^2}$;

$$\varepsilon = -\beta = \frac{3}{2}; \quad \alpha = \gamma = 0,$$

attraction newtonienne et force perturbatrice normale à la trajectoire, égale à ⁽³⁾ $\frac{3}{2} \frac{m v^2 \sin i}{r^2}$.

(1) Ce résultat a été indiqué par M. Chazy (*loc cit.*, p. 286), sous une forme à peine différente de celle-ci, que j'avais obtenue, de mon côté (abstraction faite du terme en α , que je n'avais pas considéré), avant d'avoir eu connaissance de sa communication.

(2) Signalé par M. Chazy.

(3) Signalé par M. Lecornu (*Comptes rendus*, 22 janvier 1923).

(73)

La loi du mouvement sur la trajectoire est donnée par (2), qui devient ici

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k \left(1 - \frac{\varepsilon m}{r} \right).$$

Si l'on veut avoir la deuxième loi de Képler, il faut que ε soit nul, la condition (27) devenant alors

$$\alpha + 2\beta + 6 = 0.$$

Si l'on veut avoir la même vitesse aréolaire qu'avec la loi d'Einstein, il faut prendre $\varepsilon = 2$; la condition (27) devient alors

$$\alpha + 2\beta + 2 = 0.$$

[K'21 α]

QUADRATURE GRAPHIQUE DU CERCLE PAR LE RAPPORT DE MÉTIUS;

PAR LE GÉNÉRAL CHAPEL.

J'ai été conduit à remarquer que le Rapport de Mélius $\frac{355}{113}$, qui approche de π à $\frac{1}{10^7}$ près, peut s'écrire :

$$\frac{355}{113} = 1 + 2 \frac{11^2}{7^2 + 8^2}.$$

Sous cette forme, il se traduit facilement en constructions géométriques permettant de résoudre graphiquement le problème de la Quadrature du Cercle et celui de la Rectification de la Circonférence, avec les approximations respectives de $\frac{0,5}{10^7}$ et $\frac{1}{10^7}$.

La construction suivante répond à ce double pro-

blème et en fournit actuellement la solution simple la plus approchée :

Sur un même côté d'un angle droit de sommet O, porter $OA = 7$ et $OC = 11$; sur l'autre côté, porter $OB = 8$ et $OD = 11$. Reporter les segments AB en OE sur le premier côté et DC en OF sur le second côté. (Par ouverture de compas : inutile de tracer les lignes AB, CD.) Mener la ligne EF et abaisser sur cette ligne la perpendiculaire OH ; on a :

$$\frac{EF^2}{OE^2} = \frac{EF}{EH} = \pi \dots, \quad \frac{EF}{OE} = \sqrt{\pi} \dots,$$

avec les approximations respectives indiquées ci-dessus. EF est le côté du carré équivalent au cercle de rayon OE et aussi la longueur de la demi-circonférence de rayon EH. On adapte à un rayon donné quelconque par une parallèle à OF dans le premier cas, et deux parallèles aux côtés de l'angle droit dans le cas de la Rectification.

On possède depuis longtemps nombre de tracés géométriques permettant de résoudre les deux problèmes (Quadrature et Rectification) avec une approximation suffisante pour toutes les applications graphiques : cependant, même à ce point de vue, les solutions ci-dessus présentent quelque intérêt, en ce qu'elles n'exigent pas le tracé effectif du Cercle.

QUESTIONS.

2460. Étant donnée une cardioïde (C), on mène par son point de rebroussement une corde variable, d'extrémités M et M'.

1° Il existe une parabole (P) osculatrice à (C) en M et

ayant son foyer sur MM' , et une parabole analogue (P') relative au point M' . Le lieu des foyers de ces deux paraboles est une cardioïde.

2° L'une des cordes communes à (P) et (P') est la troisième tangente que l'on peut mener à (C) du point de concours I des tangentes à cette courbe en M et en M' .

3° Le lieu du foyer F'' de la parabole (P'') bitangente à (C), la corde de contact étant MM' , est un cercle. Sa directrice enveloppe un cercle. Son axe passe par un point fixe. La droite IF'' passe par un point fixe.

4° Quand (P'') est-elle osculatrice à (C)?

J.-A. MOREN.

2461. Les diagonales AC , BD d'un quadrilatère convexe inscriptible le partagent chacune en deux triangles.

1° La somme des rayons des cercles inscrits à ces triangles qui touchent une diagonale est égale à la somme des rayons des cercles inscrits qui touchent l'autre diagonale. Et réciproquement.

2° Même propriété pour les cercles exinscrits qui touchent les diagonales elles-mêmes (et non leurs prolongements).

3° Il reste 8 cercles exinscrits qui se partagent en deux groupes de quatre cercles tels que la somme des quatre rayons des cercles d'un groupe soit égale à la somme des quatre rayons des cercles de l'autre groupe.

B. NIEWENGLOWSKI.

2462. 1° Étant donnée une ellipse, les diagonales du quadrilatère circonscrit à cette ellipse qui a pour côtés les tangentes aux sommets appartenant à un même axe et deux tangentes variables se coupant sur cet axe, enveloppent une hyperbole concentrique à l'ellipse. Quand on passe d'un axe à l'autre, on obtient deux hyperboles conjuguées.

2° Le lieu du milieu du segment intercepté sur une tangente variable par les tangentes en deux sommets consécutifs, est une hyperbole équilatère.

J.-A. MOREN.

2463. Soient ABC , $A'B'C'$ deux triangles inscrits à une même conique. Les six points (AA', BC) , $(AA', B'C')$, (BB', CA) , $(BB', C'A')$, (CC', AB) , $(CC', A'B')$ sont sur une même conique.

R. B.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une plaque carrée, homogène, pesante PQRS est assujettie aux liaisons suivantes, réalisées sans frottement : deux sommets consécutifs P et Q glissent sur une même circonférence (C) fixe dont le plan est horizontal et dont le diamètre est égal aux diagonales de la plaque. Celle-ci peut donc librement tourner autour de l'axe Oz_1 de la circonférence et autour du côté PQ.

1° Étudier le mouvement de la plaque. Limiter la discussion au cas particulier où, à l'instant initial, la plaque fait un angle θ_0 avec le plan de (C) et se trouve animée d'une rotation de vitesse ω autour de l'axe de (C), en cherchant seulement le sens de la variation initiale de l'angle θ du plan de la plaque et de celui de la circonférence.

2° La plaque étant immobile, verticale, au-dessous du plan de (C), on lui applique une percussion en son centre. Quel est l'état des vitesses immédiatement après la percussion?

NOTATIONS. — ψ angle de PQ et d'un rayon fixe, Ox , de (C); θ angle de la plaque et du plan de C; $2a$ côté, m masse de la plaque; $m\alpha$, $m\beta$, $m\gamma$ projections de la percussion donnée sur les côtés PQ, QR et sur la normale au plan de la plaque.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — La force vive est

$$2T = \frac{2m a^2}{3} [2\theta'^2 + (2 + 3 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta) \psi'^2],$$

et la fonction des forces

$$U = m g a \sin \theta$$

(on suppose θ nul quand le carré est horizontal et placé vers l'extérieur de la circonférence et l'on suppose $0 < \theta < \pi$ quand la plaque est au-dessous du plan $z_1 = 0$). L'équation de Lagrange relative à ψ donne une intégrale première, on en

obtiendra une autre par le théorème de la force vive et l'on constate aisément que l'intégration des équations du mouvement se ramène à des quadratures.

Pour la discussion, il suffit d'étudier le signe initial de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, dérivée que donne, par exemple, l'équation de Lagrange relative à θ . On constatera que la valeur remarquable de ω^2 (qui correspond à θ constant) est

$$\frac{3g}{a} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0 (3 + 4 \cos \theta_0)}.$$

Pour la deuxième partie appliquer le théorème du moment cinétique aux axes Oz_1 et PQ; les vitesses angulaires sont

$$\frac{3}{4} \frac{\alpha}{a} \text{ et } \frac{3}{4} \frac{\gamma}{a}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une roue de poids P est assimilable à une circonférence homogène de rayon r, dont le centre O est situé sur l'axe Oz de rotation, mais dont le plan Q fait un angle α avec le plan R normal à l'axe.

On prend pour origine le centre O, pour axe Oy, l'intersection de Q et R.

1° Équation de l'ellipsoïde d'inertie de la roue, relatif au point O, rapporté aux axes rectangulaires Oxyz.

2° Évaluer les réactions qui s'exerceraient pendant un mouvement de la roue, de vitesse angulaire ω , autour de Oz supposé horizontal et fixe, sur les tourillons qu'on assimilera à deux points situés sur Oz, à une distance r du centre.

Application numérique : $\alpha = 1^\circ$; ω correspondant à 200 tours par minute, $r = 1^m$.

3° Question analogue à la précédente en supposant qu'au poids P s'ajoute un couple d'axe Oz, de moment connu N.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Un changement de coordonnées immédiat conduit à l'équation demandée.

2° et 3° Aux réactions statiques qui, en laissant de côté l'indétermination des composantes axiales, peuvent être prises verticales ascendantes et égales à $\frac{P}{2}$, il faut ajouter les réac-

tions dues au mouvement. Leur résistance sera nulle (centre de gravité sur l'axe) et leur mouvement résultant, relatif au point O, aura pour projection sur les axes O*x*, O*y*, O*z*

$$L' = D\omega^2 - E\omega', \quad M' = -E\omega^2 - D\omega', \quad N' = 0.$$

Dans ces formules, qui sont classiques, D et E sont des produits d'inertie valant ici

$$D = 0, \quad E = \frac{Pr^2}{2g} \sin \alpha \cos \alpha,$$

ω est la vitesse et ω' l'accélération angulaire. Dans le cas 2° ω' est nul; dans le cas 3° ω' vaut $\frac{N}{C}$ avec

$$C = \frac{Pr^2(1 + \cos^2 \alpha)}{2g}.$$

Dans l'un et l'autre cas il est bien aisé de réduire le couple ainsi obtenu à deux forces appliquées aux tourillons; forces qui, pour des valeurs données de ω et ω' auront des directions fixes par rapport à la plaque tandis que les réactions statiques ont des directions fixes par rapport au sol.

(Grenoble, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Une plaque carrée, homogène, pesante est assujettie à rester constamment tangente à un cylindre de révolution fixe à axe vertical sur lequel elle peut librement rouler et glisser sans frottement.*

Étudier son mouvement.

Montrer que les théorèmes généraux de la Mécanique permettent d'obtenir trois intégrales premières. Pousser l'intégration aussi loin que possible dans le cas particulier suivant :

Au début du mouvement le centre de gravité de la plaque se trouve sur le cylindre et la vitesse initiale de ce point est nulle. Mais la plaque est animée d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire connue autour de l'axe du cylindre.

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — On prendra pour axes l'axe du cylindre (axe des *z*) et deux axes horizontaux. Les paramètres choisis seront :

φ , angle avec Ox du plan diamétral de la génératrice de contact ;

u , distance du centre de gravité à la génératrice de contact ;

z , cote du centre de gravité ;

θ , angle d'une diagonale du carré avec l'horizontale du plan du carré.

On écrira l'équation des forces vives, l'intégrale des aires dans le plan xOy , le théorème des projections sur Oz (qui donne $\frac{d^2 z}{dt^2} = \text{const.}$), l'équation de Lagrange relative à θ qui donne $\left(\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}\right)$.

Les deux premières équations se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned} (a^2 + k^2 + u^2) \varphi'^2 + u'^2 - 2au'\varphi' &= h, \\ (a^2 + k^2 + u^2) \varphi' - au' &= C \end{aligned}$$

et l'élimination de φ' conduit à une équation différentielle en u .

Dans le cas particulier envisagé on a

$$\theta_0 = z'_0 = 0, \quad \varphi_0 = u_0 = 0, \quad \varphi'_0 = \omega, \quad u'_0 = a\omega;$$

on obtient immédiatement les valeurs correspondantes des constantes d'intégration C et h . La discussion est très simple et il n'y a pas lieu d'y insister.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une bielle d'accouplement de locomotive est composée d'un prisme à base rectangle de dimensions 12×20 . Longueur de la bielle $2l = 2^m, 40$. L'effort de traction ou de compression qu'elle a à supporter sera pris en moyenne égal à 30000^{kg} . La manivelle a une longueur de $0^m, 30$.

La locomotive a des roues de $2^m, 20$ de diamètre et une vitesse maximum de 120^{km} à l'heure.

Calculer l'effort moléculaire maximum de la bielle en tenant compte à la fois de l'effort de traction et des forces d'inertie.

(Le mouvement de la bielle est un mouvement de translation.)

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — En un point quelconque A de la bielle nous aurons à composer :

1° Un effort de traction ou de compression égal à $\frac{T}{S} T = 30000$;

S section de la bielle;

2° La force centrifuge qui, sur une longueur dl de bielle, a la valeur

$$\rho S dl \omega^2 a,$$

avec $\omega = \frac{10^2}{3,3}$ rad. par seconde.

Cette force donne une composante de traction égale à

$$\rho S dl \omega^2 a \times \sin \alpha,$$

soit en tout

$$2 \rho S l \omega^2 a \sin \alpha,$$

ou par unité de surface

$$2 \rho l \omega^2 a \sin \alpha,$$

et un moment fléchissant, maximum au milieu de la bielle, égal à

$$M = \rho S \omega^2 a \cos \alpha \int_0^l l dl = \rho S \omega^2 a \cos \alpha \frac{l^2}{2}.$$

L'effort moléculaire normal qui en résulte est, d'après la formule de résistance composée,

$$(1) \quad \frac{M}{w} + \frac{P}{S} = \frac{3 \rho \omega^2 a \cos \alpha l^2}{2 \times 0,1} + \frac{30000}{S} + 2 \rho l \omega^2 a \sin \alpha.$$

Il faut donc chercher le maximum de

$$\frac{3}{0,2} \times l \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 18 \cos \alpha + 2 \sin \alpha.$$

La valeur de α une fois calculée, l'effort moléculaire maximum est donné par (1). (Caen, juin 1920.)

[C21]

**SUR L'INTÉGRATION
DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES RATIONNELLES ;**

PAR E. GOURSAT.

1. Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions rationnelles de x et de y , satisfaisant à la condition d'intégrabilité

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nous supposons, ce qui ne diminue pas la généralité, que ces deux fonctions sont continues pour

$$x = y = 0.$$

Pour intégrer l'équation aux différentielles totales

$$(2) \quad dz = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

on peut chercher une fonction primitive de la fonction rationnelle du paramètre auxiliaire t

$$(3) \quad \varphi(t) = x P(xt, yt) + y Q(xt, yt),$$

s'annulant pour $t = 0$ et remplacer ensuite t par l'unité dans cette fonction primitive. Ce procédé revient au fond à calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

suivant la ligne droite allant de l'origine du point (x, y) . Il est facile de vérifier directement ce résultat. Soit en

effet $T(x, y)$ l'intégrale définie

$$(4) \quad T(x, y) = \int_0^1 [x P(xt, yt) + y Q(xt, yt)] dt;$$

la dérivée partielle $\frac{\partial T}{\partial x}$ a pour expression

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \int_0^1 [P(xt, yt) + xt P'_x(xt, yt) + yt Q'_x(xt, yt)] dt,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte de la condition (1),

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t P(xt, yt)] dt = [t P(xt, yt)]_0^1 = P(x, y).$$

On vérifierait de même que l'on a $\frac{\partial T}{\partial y} = Q(x, y)$.

L'intégration de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ du paramètre t exige la résolution d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de y . Je me propose de préciser la difficulté algébrique de ce problème et de montrer que l'intégration n'exige aucune résolution d'équation algébrique lorsque les coefficients des fonctions rationnelles $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ne satisfont à aucune relation particulière, en dehors de la condition d'intégrabilité (1). Je m'appuierai pour cela sur le lemme suivant :

Tous les résidus de la fonction rationnelle $\varphi(t)$ sont indépendants de x et de y . Le calcul que nous venons de faire prouve en effet que la valeur de l'intégrale définie

$$I = \int_c \varphi(t) dt,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque dans le plan de la variable complexe t , est indépendante de x

et de y , car la dérivée $\frac{dI}{dx}$ par exemple est égale à

$$\int_c \frac{d}{dt} [t P(xt, yt)] dt = 0.$$

2. Cela posé, on sait que l'intégrale $\int \varphi(t) dt$ se compose d'une partie rationnelle en t et de termes logarithmiques. La partie rationnelle en t s'obtient par des opérations rationnelles effectuées sur les coefficients de $\varphi(t)$; elle s'exprimera donc rationnellement au moyen de ces coefficients et, par suite, quand on remplacera t par l'unité, on obtiendra *une fonction rationnelle de x et de y* .

Supposons qu'on ait retranché cette partie rationnelle de l'intégrale que l'on cherche; il restera à calculer une fonction primitive d'une fonction rationnelle

$$(5) \quad \varphi(t) = \frac{F_{m-1}(t)}{F_m(t)},$$

$F_m(t)$ et $F_{m-1}(t)$ étant deux polynomes en t , dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières de x et de y ; le premier de degré m , le second de degré $m - 1$ au plus. De plus, l'équation $F_m(t) = 0$ n'admet, pour des valeurs arbitraires de x et de y , que des racines simples. Soient

$$\theta_1(x, y), \theta_2(x, y), \dots, \theta_m(x, y)$$

ces m racines; on a aussi

$$\varphi(t) = \frac{c_1}{t - \theta_1} + \frac{c_2}{t - \theta_2} + \dots + \frac{c_m}{t - \theta_m},$$

les résidus c_1, c_2, \dots, c_m étant indépendants de x et y d'après le lemme établi plus haut. Je dis de plus que *tous ces résidus sont égaux, si le polynome $F_m(t)$ est indécomposable, c'est-à-dire s'il n'est pas le pro-*

duit de plusieurs polynomes de degré moindre en t , dont les coefficients sont aussi des polynomes en x, y . Supposons en effet ce polynome indécomposable; les m racines $\theta_i(x, y)$ sont m branches d'une fonction algébrique des deux variables x et y . On peut donc faire décrire aux variables complexes x, y , des chemins fermés tels que la racine $\theta_1(x, y)$ par exemple se change en $\theta_k(x, y)$. La fonction $\frac{c_1}{t - \theta_1(x, y)}$ se change donc en $\frac{c_k}{t - \theta_k(x, y)}$, et comme c_1 et c_k sont des constantes, on a forcément $c_1 = c_k$. On a donc, dans ce cas,

$$\varphi(t) = c \left\{ \frac{1}{t - \theta_1} + \frac{1}{t - \theta_2} + \dots + \frac{1}{t - \theta_m} \right\} = c \frac{F'_m(t)}{F_m(t)},$$

car le polynome $F_m(t)$ ne diffère du produit

$$(t - \theta_1)(t - \theta_2) \dots (t - \theta_m)$$

que par un facteur indépendant de t . La constante c se détermine immédiatement et, par suite, on a

$$(6) \quad \int \varphi(t) dt = c \log |F_m(t)|.$$

On voit que, dans ce cas, l'intégrale renferme un seul logarithme et s'obtient sans avoir à résoudre aucune équation. Il est à peu près évident que ce cas doit être considéré comme le plus général; en effet, si $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont les fonctions rationnelles les plus générales d'un degré donné vérifiant la condition (1), le polynome $F_m(t)$ correspondant sera indécomposable, si d'autres conditions ne sont pas satisfaites.

3. Si le polynome $F_m(t)$ n'est pas indécomposable, il est égal au produit de plusieurs polynomes indécom-

posables F_1, F_2, \dots, F_r , tous différents

$$(7) \quad F_m(t) = F_1(t) F_2(t) \dots F_r(t),$$

dont les coefficients sont des polynomes entiers en x, y . Le raisonnement du paragraphe précédent prouve que les résidus de $\varphi(t)$, correspondant aux racines d'un de ces polynomes $F_i(t)$, sont égaux et par suite la fonction rationnelle $\varphi(t)$ est de la forme

$$(8) \quad \varphi(t) = c_1 \frac{F_1'(t)}{F_1(t)} + c_2 \frac{F_2'(t)}{F_2(t)} + \dots + c_r \frac{F_r'(t)}{F_r(t)},$$

c_1, c_2, \dots, c_r étant des constantes. On a donc

$$(9) \quad \int \varphi(t) dt = c_1 \log |F_1(t)| + c_2 \log |F_2(t)| + \dots + c_r \log |F_r(t)|.$$

Si l'on a décomposé $F_m(t)$ en polynomes indécomposables par la formule (7), les constantes c_1, c_2, \dots, c_r se déterminent facilement. On a par exemple le coefficient c_1 en exprimant que $F_{m-1}(t) - c_1 F_1' F_2 \dots F_r$ est divisible par F_1 .

Toute la difficulté algébrique de la question se ramène donc à ce problème : Étant donné un polynome $F(x, y, t)$ entier par rapport aux variables x, y, t , reconnaître si ce polynome est décomposable en un produit de polynomes de même espèce et, dans le cas de l'affirmative, effectuer cette décomposition.

4. Il est clair que la méthode s'étend immédiatement à l'intégration des différentielles totales de la forme

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de x, y, z . Le résultat qui sert de point de départ s'étend aussi aux différentielles totales, quelles que soient les fonc-

tions analytiques $P(x, y)$, $Q(x, y)$, car l'hypothèse que ces fonctions sont rationnelles ne joue aucun rôle dans la démonstration. Si $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ est une différentielle exacte, les résidus de la fonction auxiliaire

$$\varphi(t) = x P(xt, yt) + y Q(xt, yt),$$

de la variable t , sont indépendants de x et de y . Nous supposons, pour fixer les idées, que P et Q sont des fonctions uniformes.

Cette propriété peut servir à déterminer très aisément la forme générale de certaines différentielles totales à coefficients transcendants.

Considérons par exemple une différentielle totale de la forme

$$(9) \quad dz = e^{x+ay} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy],$$

$P(x, y)$ et $Q(x, y)$ étant des fonctions rationnelles de x et de y . On démontre, comme plus haut, que l'on peut prendre pour z l'intégrale définie

$$(10) \quad Z(x, y) = \int_0^1 e^{(x+ay)t} [xP(xt, yt) + yQ(xt, yt)] dt.$$

Une suite d'intégration par parties conduit, par des calculs rationnels, à une partie tout intégrée

$$e^{(x+ay)t} R(x, y),$$

où $R(x, y)$ est une fonction rationnelle de x et de y , et à une intégrale de la forme

$$\int_0^1 e^{(x+ay)t} \frac{F_{m-1}(t; x, y)}{F_m(t; x, y)} dt,$$

F_m et F_{m-1} étant des polynomes de degré m et $m - 1$ en t , dont les coefficients sont des fonctions ration-

nelles de x et de y , et le polynome F_m étant premier avec sa dérivée. Les résidus de la fonction

$$\varphi_1(t) = e^{(x+ay)t} \frac{F_{m-1}}{F_m}$$

doivent être indépendants de x et de y . Soit $t = \theta(x, y)$ une racine de $F_m(t) = 0$; le résidu correspondant

$$e^{(x+ay)\theta(x,y)} \frac{F_{m-1}(\theta)}{F'_m(\theta)}$$

est le produit d'une fonction transcendante par une fonction algébrique. Pour que ce produit se réduise à une constante, il faut évidemment que l'on ait

$$(x + ay)\theta(x, y) = c, \quad \frac{F_{m-1}(\theta)}{F'_m(\theta)} = b,$$

la constante c pouvant être nulle. Les racines de l'équation $F_m(t) = 0$ sont donc de la forme $\theta = \frac{c}{x + ay}$, et la fonction $\varphi_1(t)$ a pour expression

$$\varphi_1(t) = e^{(x+ay)t} \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{t - \frac{c_i}{x + ay}},$$

et l'intégrale $\int_0^1 \varphi_1(t) dt$ devient, en posant

$$t = \frac{u}{x + ay},$$

$$\Phi(x, y) = \int_0^{x+ay} e^u \left(\sum \frac{b_i}{u - c_i} \right) du.$$

On voit immédiatement que la différentielle totale $d\Phi$ a pour expression

$$d\Phi = e^{x+ay} \left(\sum \frac{b_i}{x + ay - c_i} \right) (dx + a dy),$$

et toute différentielle exacte (g) est de la forme

$$d[e^{x+ay}R(x, y)] + e^{x+ay} \frac{F_{m-1}(x+ay)}{F_m(x+ay)} (dx + a dy),$$

$R(x, y)$ étant une fonction rationnelle quelconque de x, y et F_m, F_{m-1} deux polynomes de degré égal à l'indice, F_m étant premier avec sa dérivée. Nous voyons de plus que cette décomposition peut être effectuée par des opérations rationnelles. Dans le cas actuel, le polynome $F_m(t, x, y)$ est toujours décomposable en m facteurs analytiquement distincts.

§. Considérons encore une équation aux différentielles totales du second ordre complètement intégrable

$$(11) \quad d^2z = P(x, y) dx^2 + 2Q(x, y) dx dy + R(x, y) dy^2,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de x et de y . Elle est équivalente au système

$$(12) \quad \begin{cases} dp = P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \\ dq = Q(x, y) dx + R(x, y) dy, \\ dz = p dx + q dy, \end{cases}$$

ce qui donne les conditions d'intégrabilité

$$(13) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

En posant, comme plus haut, $x = Xt, y = Yt$, z devient une fonction $\Phi(t; X, Y)$, pour laquelle on a

$$(14) \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\Phi}{dt^2} = X^2P(Xt, Yt) + 2XYQ(Xt, Yt) + Y^2R(Xt, Yt);$$

l'intégrale de cette équation qui est nulle, ainsi que sa

dérivée, pour $t = 0$, a pour expression

$$(15) \quad \Phi(t, X, Y) \\ = \int_0^t (t-u) [X^2 P(Xu, Yu) \\ + 2XYQ(Xu, Yu) + Y^2 R(Xu, Yu)] du,$$

et en faisant $t = 1$ dans le second membre, et y remplaçant X et Y par x et y respectivement, on obtient l'intégrale particulière de l'équation (11) qui est nulle, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, pour $x = y = 0$. Il est aisé de le vérifier par un calcul direct. On a par exemple

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \int_0^t (t-u) [2XP + X^2 u P'_x + 2YQ \\ + 2XYu Q'_x + Y^2 u R'_x] du, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \int_0^t (t-u) [2P + 4Xu P'_x + X^2 u^2 P''_{x^2} \\ + 4Yu Q'_x + 2XYu^2 Q''_{x^2} + Y^2 u^2 R''_{x^2}] du,$$

ou, en remplaçant Q'_x , Q''_{x^2} , R''_{x^2} par P'_y , P''_{xy} , P''_{y^2} respectivement,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = \int_0^t (t-u) [2P + 4Xu P'_x + 4Yu P'_y \\ + X^2 u^2 P''_{x^2} + 2XYu^2 P''_{xy} + Y^2 u^2 P''_{y^2}] du \\ = \int_0^t (t-u) \left\{ 2P + \frac{4d}{du} [P(Xu, Yu)] \right. \\ \left. + u^2 \frac{d^2}{du^2} [P(Xu, Yu)] \right\} du \\ = \int_0^t (t-u) \frac{d^2}{du^2} [u^2 P(Xu, Yu)] du \\ = \left[(t-u) \frac{d}{du} (u^2 P) + u^2 P \right]_{u=0}^{u=t}$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} = t^2 P(Xt, Yt).$$

Pour $t = 1$, on a bien $\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} = P(X, Y)$, et l'on vérifierait de même que l'on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X \partial Y} = Q(X, Y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = R(X, Y).$$

L'intégrale (15) se compose d'une partie rationnelle et d'une intégrale de la forme

$$\int \frac{\varphi(t, X, Y) dt}{F_m(t, X, Y)},$$

F_m et φ étant deux polynomes en t à coefficients rationnels en X et Y , dont le premier est premier avec sa dérivée F'_m , et dont le second est au plus de degré $m - 1$. Les résidus de cette fonction rationnelle ne sont pas nécessairement indépendants de X et de Y , mais ces résidus sont des *fonctions linéaires* de X et de Y . Soit en effet I_C l'intégrale

$$I_C = \int_C (t - u) [X^2 P + 2XYQ + Y^2 R] du,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque C dans le plan de la variable complexe u . D'après le calcul que nous venons de faire, on a

$$\frac{\partial^2 I_C}{\partial X^2} = \int_C \frac{d}{du} \left[(t - u) \frac{d(u^2 P)}{du} + u^2 P \right] du = 0$$

et l'on démontrerait de même que l'on a

$$\frac{\partial^2 I_C}{\partial X \partial Y} = 0, \quad \frac{\partial^2 I_C}{\partial Y^2} = 0.$$

Les conséquences sont analogues à celles qui ont été indiquées au n° 2. Si le polynome $F_m(t, X, Y)$ est indécomposable, la fonction rationnelle $\frac{\varphi}{F_m}$ est de la

forme

$$(AX + BY + C) \frac{d}{dt} \log F_m,$$

A, B, C étant des constantes, et l'intégrale s'obtiendra par des calculs rationnels.

6. L'introduction de la variable auxiliaire t avait seulement pour but de conserver la symétrie entre les variables x et y , mais le résultat essentiel relatif aux résidus est indépendant de cet artifice. Soient $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions analytiques uniformes lorsque les variables complexes x et y restent respectivement dans deux domaines D_x et D_y , et qui satisfont à la condition (1) dans ces domaines. Nous supposons de plus que quand on donne à y une valeur constante \bar{y} dans D_y , $P(x, \bar{y})$ et $Q(x, \bar{y})$ sont des fonctions méromorphes de x dans D_x .

Les résidus de la fonction $f(x) = P(x, \bar{y})$ sont indépendants de \bar{y} . Il suffit pour cela de prouver que la valeur de l'intégrale

$$I = \int_c P(x, \bar{y}) dx,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque dans D_x , est indépendante de \bar{y} . Or on a immédiatement

$$\frac{\partial I}{\partial y} = \int_c \frac{\partial P}{\partial y} dx = \int_c \frac{\partial Q}{\partial x} dx = [Q]_c = 0.$$

Inversement, si une fonction $P(x, y)$ satisfait aux conditions précédentes, on peut lui associer une autre fonction $Q(x, y)$, qui est aussi une fonction méromorphe de x pour une valeur constante de y , telle que $P dx + Q dy$ soit une différentielle exacte. En

effet, si les résidus de $P(x, y)$ sont indépendants de y , on a $\int_c \frac{\partial P}{\partial y} dx = 0$, et les résidus de $\frac{\partial P}{\partial y}$ sont nuls. On aura donc pour Q l'intégrale $\int \frac{\partial P}{\partial y} dx$ d'une fonction méromorphe dont tous les résidus sont nuls, c'est-à-dire une autre fonction méromorphe.

En particulier, soit $P(x, y)$ une fonction rationnelle des deux variables x et y , telle que les résidus de la fonction $P(x, y)$ de la seule variable x soient indépendants de y . Le raisonnement prouve qu'on peut lui associer une autre fonction rationnelle $Q(x, y)$ telle que $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ soit une différentielle exacte.

[R1b]

SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS DE TROIS PLANS QUI GLISSENT L'UN SUR L'AUTRE ;

PAR FERNAND JOSSE,

Élève à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

1. Soient P_0, P_1, P_2, \dots des plans qui glissent sur un même plan fixe (lequel peut se confondre avec l'un d'eux). Le mouvement de P_i par rapport à P_j sera désigné par le symbole $\left(\frac{P_i}{P_j}\right)$. A un instant donné, ce mouvement est tangent à une rotation de centre I_{ij} (centre instantané de rotation) et de vitesse angulaire ω_{ij} . I_{ij} est confondu avec I_{ji} et l'on a

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Si l'on considère trois quelconques de ces plans P_j , P_k , la théorie des mouvements relatifs conduit immédiatement aux résultats suivants :

1° Les centres I_{jk} , I_{ki} , I_{ij} sont en ligne droite ;

2° On a

$$\frac{\omega_{jk}}{I_{ij}I_{ik}} = \frac{\omega_{ki}}{I_{jk}I_{ji}} = \frac{\omega_{ij}}{I_{ki}I_{kj}},$$

où il faut tenir compte des conventions de signes ordinaires, pour les numérateurs et pour les dénominateurs. Ces égalités ont comme conséquence

$$\omega_{jk} + \omega_{ki} + \omega_{ij} = 0,$$

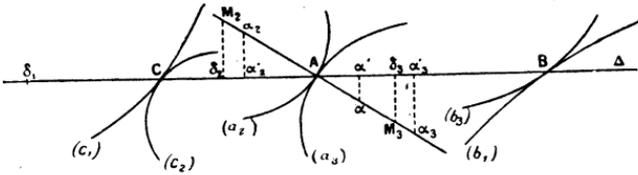
formule évidente *a priori*.

2. Prenons les plans P_1 , P_2 , P_3 . Le mouvement $\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$ peut être obtenu par le roulement d'une courbe (a_3) sur courbe (a_2) ; le mouvement $\left(\frac{P_1}{P_3}\right)$ par le roulement d'une courbe (b_1) sur une courbe (b_3) ; le mouvement $\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ par le roulement d'une courbe (c_2) sur une courbe (c_1) . Les courbes (b_1) et (c_1) sont liées à P_1 , (c_2) et (a_2) à P_2 , (a_3) et (b_3) à P_3 .

Pour éviter un excès d'indices, appelons A le centre I_{23} , B le centre I_{31} et C le centre I_{12} . Alors, A, étant le centre instantané de rotation pour le mouvement $\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$, est le point de contact de (a_2) et (a_3) . De même B est le point de contact de (b_3) et (b_1) , C le point de contact de (c_1) et (c_2) .

Aux points A, B, C les courbes (a) , (b) et (c) ont en tout six centres de courbure. *L'objet de cette Note est d'établir qu'il existe entre ces six centres de courbure une relation et d'en rechercher la forme.*

3. Désignons par Δ (*fig. 1*) la droite ABC. Cette droite enveloppée, respectivement par rapport aux trois



plans P_1, P_2, P_3 , trois courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. Soient $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les points caractéristiques de Δ . On peut supposer que Δ roule sur Γ_1 , en donnant à cette droite un glissement convenable le long d'elle-même. Soit alors P_0 un plan lié à Δ . Le centre I_{01} est le point δ_1 . Le centre I_{02} doit être aligné sur le précédent et sur le centre I_{12} , c'est-à-dire sur C. D'autre part le même centre est sur la normale à Δ en δ_2 qui est son point caractéristique dans $\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$.

C'est donc le point δ_2 même ⁽¹⁾.

Exprimons que les courbes (a_3) et (a_2) roulent l'une sur l'autre : il suffit d'écrire que le point A, entraîné dans l'un ou l'autre des mouvements $\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$ et $\left(\frac{P_3}{P_0}\right)$, a la même vitesse, ce qui donne

$$\omega_{20} \delta_2 A = \omega_{30} \delta_3 A.$$

Posons encore, pour simplifier les notations,

$$\omega_{10} = \omega_1, \quad \omega_{20} = \omega_2, \quad \omega_{30} = \omega_3;$$

la relation précédente et les relations analogues

(1) On voit donc accessoirement que, dans le mouvement $\left(\frac{P_2}{P_0}\right)$, la base est le lieu de δ_2 dans P_0 , c'est-à-dire Δ , et la roulante le lieu de δ_2 dans P_2 , c'est-à-dire Γ_2 . Donc l'hypothèse que Δ roule sur Γ_1 entraîne la conséquence que Δ roule sur Γ_2 et, bien entendu, sur Γ_3 aussi.

s'écrivent

$$(1) \quad \begin{cases} \omega_2 \delta_2 A = \omega_3 \delta_3 A, \\ \omega_3 \delta_3 B = \omega_1 \delta_1 B, \\ \omega_1 \delta_1 C = \omega_2 \delta_2 C. \end{cases}$$

Introduisons maintenant les centres de courbure α_2 de (a_2) et α_3 de (a_3) en A , et reproduisons le raisonnement de M. J. Pérès dans un article récent ⁽¹⁾.

Supposons que le mouvement de Δ soit maintenant tel que le point A soit fixe sur cette droite, et soit P_4 un plan entraîné dans ce mouvement. Les centres I_{24} et I_{34} sont les points M_2 et M_3 de $\alpha_2 \alpha_3$, qui se projettent sur Δ en δ_2 et δ_3 . Soit V la vitesse du point A , entraîné dans l'un ou l'autre des mouvements $\left(\frac{P_2}{P_4}\right)$, $\left(\frac{P_3}{P_4}\right)$. On a

$$V = M_2 A \omega_{24} = M_3 A \omega_{34},$$

d'où

$$\omega_{32} = \omega_{34} - \omega_{24} = V \left(\frac{1}{M_2 A} - \frac{1}{M_3 A} \right).$$

Si l'on refaisait le raisonnement, en remplaçant Δ par $\alpha_2 \alpha_3$, on aurait

$$\omega_{32} = V \left(\frac{1}{\alpha_2 A} - \frac{1}{\alpha_3 A} \right).$$

On tire de là

$$\frac{1}{M_2 A} - \frac{1}{M_3 A} = \frac{1}{\alpha_2 A} - \frac{1}{\alpha_3 A},$$

ou encore

$$\frac{1}{AM_3} - \frac{1}{AM_2} = \frac{1}{A\alpha_3} - \frac{1}{A\alpha_2}.$$

Soient α'_2 , α'_3 les projections sur Δ de α_2 , α_3 , on obtient,

⁽¹⁾ *A propos de la formule d'Euler-Savary* (N. A., 1923, p. 205).

par projection de l'égalité précédente,

$$\frac{1}{\Lambda \delta_3} - \frac{1}{\Lambda \delta_2} = \frac{1}{l},$$

en posant

$$\frac{1}{\Lambda \alpha'} = \frac{1}{\Lambda \alpha_3} - \frac{1}{\Lambda \alpha_2} \quad \text{et} \quad \Lambda \alpha' = l.$$

On reconnaît, en invoquant des résultats classiques, que le point α' n'est autre que la projection sur Δ du point α diamétralement opposé à A sur le cercle des inflexions du mouvement $\left(\begin{smallmatrix} P_3 \\ P_2 \end{smallmatrix} \right)$.

Récrivons l'égalité précédemment obtenue, ainsi que les égalités analogues :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Lambda \delta_3} - \frac{1}{\Lambda \delta_2} = \frac{1}{l}, \\ \frac{1}{B \delta_1} - \frac{1}{B \delta_3} = \frac{1}{m}, \\ \frac{1}{C \delta_2} - \frac{1}{C \delta_1} = \frac{1}{n}. \end{array} \right.$$

3. On tire des égalités (1)

$$(3) \quad \Lambda \delta_2 \cdot B \delta_3 \cdot C \delta_1 = \Lambda \delta_3 \cdot B \delta_1 \cdot C \delta_2.$$

Les trois points δ_1 , δ_2 , δ_3 interviennent dans les quatre relations (2) et (3). En éliminant ces trois points il doit rester, comme je l'ai dit au n° 2, une relation entre les six centres de courbure α_2 , α_3 , ..., etc.

Pour faire cette élimination, remarquons qu'on satisfait à (3) de la manière la plus générale en posant

$$\frac{B \delta_1}{C \delta_1} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{C \delta_2}{\Lambda \delta_2} = \frac{\nu}{\lambda}, \quad \frac{\Lambda \delta_3}{B \delta_3} = \frac{\lambda}{\mu},$$

λ , μ , ν étant quelconques. La première de ces relations donne

$$\frac{B \delta_1}{\mu} = \frac{C \delta_1}{\nu} = \frac{B \delta_1 - C \delta_1}{\mu - \nu} = \frac{BC}{\mu - \nu},$$

d'où

$$B \delta_1 = BC \frac{\mu}{\mu - \nu}, \quad C \delta_1 = BC \frac{\nu}{\mu - \nu},$$

et, de même,

$$C \delta_2 = CA \frac{\nu}{\nu - \lambda}, \quad A \delta_2 = CA \frac{\lambda}{\nu - \lambda},$$

$$A \delta_3 = AB \frac{\lambda}{\lambda - \mu}, \quad B \delta_3 = AB \frac{\mu}{\lambda - \mu}.$$

La première des relations (2) donne, d'autre part,

$$l = \frac{A \delta_2 \cdot A \delta_3}{A \delta_2 - A \delta_3}.$$

En remplaçant $A \delta_2$ et $A \delta_3$ par leurs valeurs, on trouve, après réduction,

$$l = AB \cdot CA \frac{\lambda}{(\lambda - \mu)CA - (\nu - \lambda)AB} = \frac{\lambda AB \cdot CA}{\lambda CB + \mu AC + \nu BA}.$$

On a de même

$$m = \frac{\mu BC \cdot AB}{\lambda CB + \mu AC + \nu BA},$$

$$n = \frac{\nu CA \cdot BC}{\lambda CB + \mu AC + \nu BA}.$$

Multiplions ces relations respectivement par \overline{BC}^2 , \overline{CA}^2 , \overline{AB}^2 et ajoutons. On reconnaît que λ , μ , ν s'éliminent et il reste

$$l \overline{BC}^2 + m \overline{CA}^2 + n \overline{AB}^2 + BC \cdot CA \cdot AB = 0,$$

ou, en remplaçant l , m , n par leurs valeurs,

$$(5) \quad \overline{A\alpha'} \cdot \overline{BC}^2 + \overline{B\beta'} \cdot \overline{CA}^2 + \overline{C\gamma'} \cdot \overline{AB}^2 + BC \cdot CA \cdot AB = 0.$$

C'est la relation demandée. Il serait intéressant d'en obtenir une interprétation géométrique simple, permettant, en particulier, de construire un des six centres de courbure, connaissant les cinq autres.

[R9b]

CHOC EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

I. Le problème plan.

1. Je me propose de revenir ici sur l'étude du choc de deux solides quelconques *en tenant compte du frottement au contact*. C'est là une question déjà étudiée et l'on sait que les méthodes de la Mécanique rationnelle en fournissent la solution sans que l'on rencontre jamais, comme dans d'autres questions où intervient le frottement, *aucune indétermination ou impossibilité* (1). Nous utiliserons dans cet article, pour résoudre le problème posé et arriver à la conclusion précédente, une représentation géométrique très simple et qui présente des avantages.

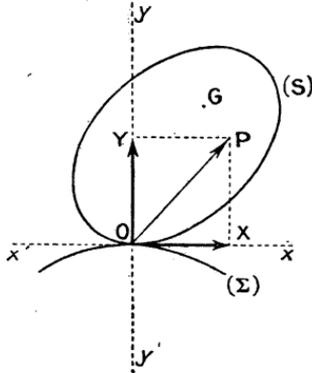
Faut-il dire que ces quelques pages n'apportent pas de *résultats* nouveaux.

2. Envisageons d'abord le cas d'une plaque matérielle quelconque (S), mobile dans un plan et y rencontrant, à un instant donné, un obstacle fixe (Σ); O est le point de contact; les axes de coordonnées Ox et Oy sont respectivement la tangente et la normale aux surfaces en contact; le centre de gravité de la plaque G a, à l'instant du choc, les coordonnées a et b . Nous supposons connu le coefficient de restitution

(1) Un cas particulier intéressant a été étudié récemment ici même (cf. *Nouvelles Annales*, avril et juin 1923).

(ou d'élasticité) e ; enfin, le contact a lieu avec frottement, le coefficient de frottement étant connu.

Fig. 1.



Étant données, à l'instant t_0 où commence le choc, les composantes α_0, β_0 de la vitesse du point G et la rotation instantanée ω_0 de la plaque, il s'agit de déterminer, à l'instant t_1 où le choc se termine, les quantités analogues $\alpha_1, \beta_1, \omega_1$.

Pour cela notons d'abord que, X et Y étant les composantes de la percussion P qui s'exerce sur (S), on a les équations classiques

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_0 = \frac{X}{m}, \\ \beta_1 - \beta_0 = \frac{Y}{m}, \\ \omega_1 - \omega_0 = \frac{bX - aY}{mk^2} \end{array} \right.$$

(quantité de mouvement et moment cinétique en G), m étant la masse de la plaque et k le rayon de giration relatif au point G. D'autre part la vitesse du point de

BIBLI
BRAY
UNIVERS

la plaque qui est en O est

$$\begin{aligned} \text{au début du choc} & \begin{cases} U_0 = \alpha_0 + b \omega_0, \\ V_0 = \beta_0 - a \omega_0; \end{cases} \\ \text{à la fin du choc} & \begin{cases} U_1 = \alpha_1 + b \omega_1, \\ V_1 = \beta_1 - a \omega_1, \end{cases} \end{aligned}$$

et l'on en déduit, d'après (1),

$$(2) \quad \begin{cases} U_1 - U_0 = \frac{X(k^2 + b^2) - abY}{mk^2} = \frac{\partial \varphi(X, Y)}{\partial X}, \\ V_1 - V_0 = \frac{-abX + Y(k^2 + a^2)}{mk^2} = \frac{\partial \varphi(X, Y)}{\partial Y}, \end{cases}$$

avec

$$\varphi(X, Y) = \frac{X^2(k^2 + b^2) - 2abXY + (k^2 + a^2)Y^2}{2mk^2}.$$

Tout revient donc à déterminer U_1 et V_1 : X et Y en résultent grâce aux relations (2), puis, d'après les relations (1), l'état final des vitesses.

3. Il serait facile d'achever la question par le calcul. Nous procéderons plutôt géométriquement, en utilisant les remarques suivantes.

La courbe

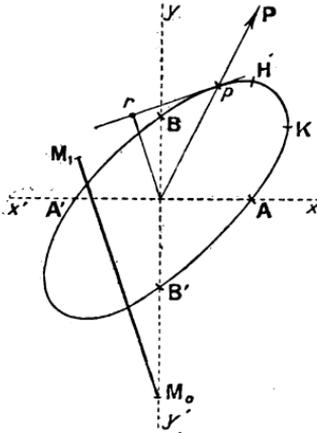
$$\varphi(x, y) = 1$$

est une ellipse dont le tracé est immédiat : le grand axe est porté par la droite OG ($bx - ay = 0$) et les longueurs des demi-axes sont proportionnelles à $\sqrt{k^2 + a^2 + b^2}$ et k . L'ellipse présente la disposition de la figure 2 si, ce qui n'est pas une restriction, on suppose ab positif⁽¹⁾ : les points H et K de cette ellipse (point le plus haut et point le plus à droite) sont dans l'angle

(1) Nous pouvons laisser de côté le cas où ab serait nul. C'est, au fond, le cas traité dans les articles précédemment cités.

des axes xOy . Soient p le point où la demi-droite qui porte la percussion rencontre cette ellipse et r le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en p à l'ellipse ; soient M_0 et M_1 les points de coordonnées U_0, V_0 et U_1, V_1 : d'après les formules (2) les segments Or et $M_0 M_1$ sont parallèles et de même sens.

Fig. 2.



Observons enfin que l'on peut écrire des formules analogues à (1) et (2) pour tout intervalle partiel du temps $t_0 t_1$ que dure le choc. Soient alors U et V les composantes de la vitesse du point de contact à un instant quelconque du choc et soit M le point de coordonnées U et V . Pendant le choc le point M va, suivant un certain chemin, de M_0 en M_1 : à chaque instant le déplacement de ce point a lieu dans la direction Or , le point r étant déterminé par la construction précédente où l'on remplace la percussion P par la réaction à l'instant considéré.

Cette réaction (comme d'ailleurs la percussion totale P) est située au-dessus de $X'OX$, de sorte que le

point p est toujours sur la demi-ellipse supérieure A'BHKA. Le point M_0 est connu, il est au-dessous de X'OX puisque la vitesse normale V_0 au début du choc doit être supposée négative. La trajectoire du point M est immédiate : si, pendant tout ou partie du choc, il y a glissement, la réaction correspondante fait avec Oy l'angle de frottement dans le sens opposé au glissement ; les points p et r sont donc bien déterminés et M décrira un segment de droite parallèle à Or et de même sens. Si, au contraire, il n'y a pas glissement, U sera nul et le point M se déplacera sur $y'Oy$, le point p correspondant étant en H. Dans tous les cas on déterminera sans peine le point M_1 puisque l'on en connaît l'ordonnée

$$(3) \quad V_1 = -eV_0,$$

e étant le coefficient de restitution.

Pour terminer la discussion nous distinguerons plusieurs cas.

4. *Premier cas : pas de glissement au début du choc.* U_0 est nul et M_0 est sur Oy' . Deux hypothèses sont possibles.

a. Pendant le choc il n'y a pas de glissement, le point M décrit l'axe $y'Oy$ jusqu'en M_1 déterminé par la relation (3). Le point p correspondant est en H et la percussion portée par OH. Cette solution est donc acceptable si \widehat{yOH} est inférieur ou égal à l'angle de frottement φ .

b. Pendant le choc un glissement s'établit. La réaction tangentielle devant être opposée au glissement dont le sens est défini par Or , il faut que Oy soit inté-

rieur à l'angle \widehat{rOp} . Cela implique, comme on le voit immédiatement sur la figure, que p soit un point de l'arc BH; le glissement sera donc négatif. La position du point M_1 en résulte (*fig. 2*) et l'on voit que le glissement n'est possible que si \widehat{yOH} est plus grand que l'angle de frottement.

Les deux hypothèses s'excluent et nous obtenons donc toujours une seule solution du problème.

5. *Deuxième cas : U_0 positif.* Dans ce cas, au moins au début du choc, le glissement est positif et le point p est bien déterminé sur l'arc A'B. On a donc la direction Or (contenue dans l'angle $\widehat{x'Oy}$) et le point M décrit la parallèle menée par M_0 . Prenons sur cette parallèle le point dont l'ordonnée est donnée par (3).

Si le point ainsi obtenu correspond encore à un glissement positif, c'est le point M_1 et le problème est résolu; le glissement reste positif pendant tout le choc. Sinon la droite issue de M_0 coupe l'axe $y'y$ en un point M' et il faut diviser le choc en deux périodes. La première nous amène en M' avec un glissement nul. Nous nous trouvons ensuite dans les conditions du *premier cas* et nous aurons, pour la fin du choc, *pas de glissement* ou *glissement négatif* suivant la valeur du coefficient de frottement.

6. *Troisième cas : U_0 négatif.* Au début du choc le glissement est négatif et le point p bien déterminé sur l'arc d'ellipse AB.

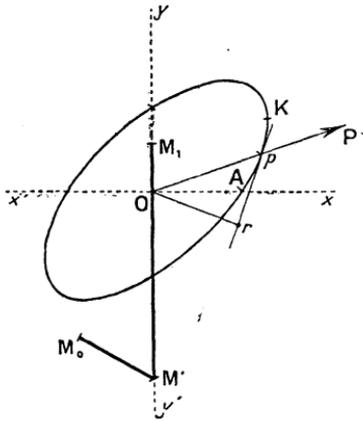
a. p est sur l'arc BH. Or est alors dans l'angle $x'Oy$ de sorte que le glissement augmentera en valeur absolue. M_1 correspond donc toujours à un glissement négatif

et la solution convenable sera toujours obtenue en menant par M_0 la parallèle à Or .

b. p est sur l'arc HK . Or est dans l'angle xOy . Le glissement sera négatif pendant tout le choc si le point M_1 , déterminé en menant par M_0 la parallèle à Or , est à gauche de $y'Oy$. Sinon, il faudra s'arrêter, comme dans le second cas, en M' sur $y'Oy$ et le choc comportera une seconde période, toujours *sans glissement*, d'après les résultats du premier cas.

c. p est sur l'arc KA . Dans ce cas Or est dans l'angle $y'Ox$ et la parallèle menée par M_0 ne rencontre pas $x'Ox$ mais rencontre toujours $y'Oy$. Le choc comporte

Fig. 3.



toujours deux périodes, la première amenant en M' , la deuxième amenant en M_1 , sans qu'aucun glissement s'établisse (*fig. 3*).

7. On voit que, dans tous les cas, la solution du problème est déterminée sans que l'on rencontre aucune

impossibilité. L'application de la méthode n'exige pas le tracé de l'ellipse; on en connaît les axes et, parce que toute ellipse homothétique et concentrique peut jouer le même rôle, on prendra pour longueur de ces axes $2\sqrt{k^2 + a^2 + b^2}$ et $2k$ (§ 3). Il y aurait peu de chose à ajouter pour obtenir, de façon également graphique, la percussion P.

Le dernier cas envisagé (§ 6, c) présente une circonstance à première vue paradoxale : la vitesse normale du point de contact augmente en valeur absolue pendant la première partie du choc.

Dans le cas de corps mous ($e = 0$) le point M_1 se trouve sur l'axe $x'Ox$ et une discussion classique, pour laquelle nous pouvons renvoyer le lecteur à un article de M. Delassus ⁽¹⁾, permettra de décider si, après le choc, le mouvement de la plaque sera le mouvement libre ou le mouvement lié (avec ou sans glissement). Peut-on, dans le cas du glissement, se trouver dans le cas où les lois du frottement *paraissent* conduire à une impossibilité et où, comme le montre clairement M. Delassus, il se produit choc avec établissement brusque du roulement ? Il est facile de voir que non : la droite D de M. Delassus est, avec les notations utilisées ici, la droite OK et l'impossibilité en question ne pourrait se présenter que pour

$$U_1 < 0, \quad \widehat{yOK} < \varphi \quad (2).$$

Il suffit de se reporter à la discussion précédente pour constater que ces inégalités ne seront pas simultanément

(1) *Nouvelles Annales*, 1920, p. 485.

(2) φ étant l'angle de frottement (cf. *loc. cit.*, note précédente, § 4 et 5).

vérifiées (1). Les corps étant *mous*, le choc est donc bien terminé lorsque le point M_1 vient sur $x'Ox$.

8. Nous avons envisagé, jusqu'ici, le choc d'une plaque sur un obstacle fixe, mais il n'est pas plus difficile d'étudier le choc de deux plaques (S) et (S') mobiles dans un plan. Gardant les notations précédentes et accentuant les quantités relatives à la seconde plaque, on aura les équations déjà écrites (1) et

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_1 - \alpha'_0 = -\frac{X}{m'}, \\ \beta'_1 - \beta'_0 = -\frac{Y}{m'}, \\ \omega'_1 - \omega'_0 = \frac{-b'X + a'Y}{m'k'^2}; \end{array} \right.$$

il faut faire intervenir les composantes U et V de la vitesse, par rapport à (S')₁ du point de (S) qui est en O; ces composantes sont, au début et à la fin du choc,

$$\begin{aligned} U_0 &= \alpha_0 + \omega_0 b - \alpha'_0 - \omega'_0 b', & U_1 &= \alpha_1 + \omega_1 b - \alpha'_1 - \omega'_1 b' \\ V_0 &= \beta_0 - \omega_0 a - \beta'_0 + \omega'_0 a', & V_1 &= \beta_1 - \omega_1 a - \beta'_1 + \omega'_1 a', \end{aligned}$$

on en déduit encore

$$U_1 - U_0 = \psi'_X(X, Y), \quad V_1 - V_0 = \psi'_Y(X, Y),$$

avec, cette fois,

$$\begin{aligned} \psi(X, Y) &= \frac{X^2 + Y^2}{2m} + \frac{X^2 + Y^2}{2m'} + \frac{b^2 X^2 - 2abXY + a^2 Y^2}{2mk^2} \\ &\quad + \frac{b'^2 X^2 - 2a'b'XY + a'^2 Y^2}{2m'k'^2}. \end{aligned}$$

(1) U_1 ne peut être négatif que : 1° dans le premier cas, si $\widehat{y'OH} < \varphi$; 2° dans le second cas, si l'on a la même inégalité; 3° dans le troisième cas, α , où l'on a encore la même inégalité.

Il n'y a plus qu'à répéter mots pour mots la discussion précédente en partant cette fois de l'ellipse qui a pour équation

$$\psi(x, y) = 1.$$

Ici encore *aucune indétermination ou impossibilité.*

Nous n'insisterons pas davantage sur les problèmes *plans* et réservons, pour un prochain article, l'application des mêmes méthodes aux questions analogues dans *l'espace*.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1925.

Mathématiques élémentaires.

Sur les côtés d'un triangle ABC, pris comme diagonales, on construit, dans le plan du triangle, les carrés CPBP', AQCQ', BRAR'. Les notations sont choisies de telle sorte que les sens de parcours, marqués par l'ordre indiqué par les sommets, correspondent au sens de rotation ABC.

I. *On considère la figure constituée par l'ensemble des neuf points A, B, C, P, Q, R, P', Q', R', et par les segments qui ont pour extrémités deux quelconques d'entre eux. Montrer qu'à chacun de ces segments, on peut en associer au moins un autre qui lui soit égal; comparer les directions des segments associés.*

Montrer que les segments QR et Q'R' sont vus du

milieu de BC sous un angle droit; que QR' et RQ' concourent au pied de la hauteur issue de A sur BC, que les triangles ABC, PQR, $P'Q'R'$ ont même centre de gravité.

II. On n'étudiera, dans tout ce qui suit, que des triangles $T(ABC)$ auxquels correspondent trois points P, Q, R alignés. Indiquer comment on peut construire de tels triangles.

La condition imposée peut se traduire, soit par une relation $f(a^2, b^2, c^2) = 0$, entre les longueurs des côtés, soit par une relation entre la surface et la somme des carrés des côtés, soit par une relation symétrique entre les cotangentes des angles du triangle. On établira ces relations.

III. a. Les sommets B et C étant donnés, trouver le lieu de A et l'enveloppe de $Q'R'$;

b. A et P étant donnés, trouver les lieux de B, C, P' , Q' , R' et les enveloppes des côtés de $P'Q'R'$;

c. Q' et R' étant donnés, trouver les lieux de A, B, C, P, Q, R, l'enveloppe de la droite PQR et les enveloppes des côtés de T.

IV. Montrer que les nombres a, b, c qui vérifient la relation $f(a^2, b^2, c^2) = 0$, obtenue dans la deuxième partie, ne sont jamais simultanément des nombres entiers.

On posera

$$a^2 = x, \quad b^2 = y, \quad c^2 = z,$$

$$y + z - x = 2X^2, \quad z + x - y = 2Y^2, \quad x + y - z = 2Z^2$$

$$(0 \leq X \leq Y \leq Z).$$

Trouver la relation qui existe entre X, Y, Z.

Démontrer que si x, y, z sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble X, Y, Z sont entiers et premiers entre eux deux à deux.

Déduire de là le moyen d'obtenir toutes les solutions en nombres entiers de l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

SOLUTION

Par Jean DOLLOX.

I. Le sens de rotation du triangle ABC sera dans toute la suite, pour fixer les idées, le sens trigonométrique.

En ce qui concerne la première partie du problème, nous nous bornerons à quelques indications essentielles, à l'aide desquelles le lecteur trouvera facilement la réponse à toutes les questions posées.

a. Démontrons d'abord que les quadrilatères tels que AQP'R et AQ'PR' sont des parallélogrammes.

Soit par exemple le premier. On passe de Q à C par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point $\frac{A+C}{2}$ (1);

(1) Nous employons la notation $\frac{A+C}{2}$ pour désigner le milieu de AC. Cette notation peut être justifiée de la façon suivante : Soient B' le milieu de AC et O un point quelconque, on a toujours l'égalité géométrique

$$\vec{OB'} = \vec{OA} + \vec{OC} \quad \text{ou} \quad \vec{OB'} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}).$$

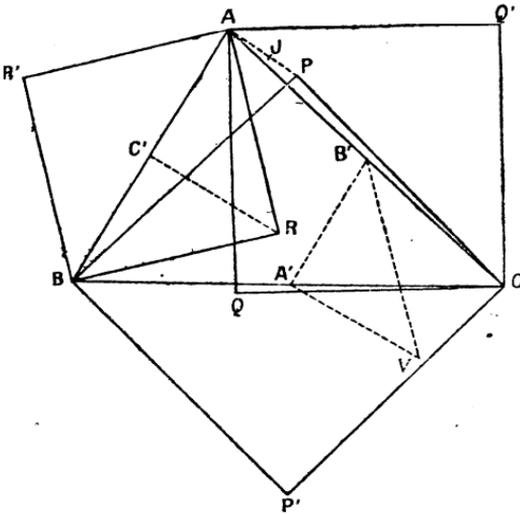
Puisque O est arbitraire, on peut se permettre de schématiser cette égalité sous la forme

$$B' = \frac{A+C}{2}.$$

On justifierait de même la notation $\frac{A+B+C}{3}$ utilisée plus loin pour désigner le centre de gravité du triangle ABC.

on passe de même de C à P' par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour du point $\frac{B+C}{2}$. On passe donc directement de Q à P' par une translation qu'on peut déterminer ainsi : on considère le point $\frac{A+C}{2}$, il est invariant dans la première rotation, on lui applique la seconde et l'on a en \overrightarrow{AV} (fig. 1) le vecteur de la translation. Ce vecteur est évidemment équipollent à AR.

Fig. 1.



Remarques. — 1. La première des rotations considérées change A en Q. la seconde change donc Q en R : le point R se déduit de Q par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\frac{B+C}{2}$.

2. Les deux parallélogrammes AQR'P' et AQ'R'P' sont égaux et ont les côtés homologues rectangulaires.

Les diagonales homologues, telles que AP et QR sont donc égales et portées par des droites rectangulaires : on passe du sens \overrightarrow{QR} au sens \overrightarrow{PA} par une rotation d'un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$.

b. Nous allons montrer maintenant que QR' et RQ' se coupent au pied de la hauteur abaissée de A.

En effet, du triangle ABC on déduit :

AR'Q par une similitude $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4}\right)$ de centre A;

AQ'R par une similitude $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{\pi}{4}\right)$ de centre A.

Par le pied H de la hauteur issue de A, menons maintenant deux droites inclinées de $\frac{\pi}{4}$ sur BC; ce sont les transformées de BC dans les similitudes précédentes, c'est-à-dire QR' et RQ'.

c. Les triangles ABC, PQR, P'Q'R' ont même centre de gravité. En effet l'existence, établie au début, de parallélogrammes tels que AQPR' entraîne que $\frac{Q+R}{2} = \frac{A+P'}{2}$, etc.

On a donc

$$\frac{Q+R}{2} + \frac{R+P}{2} + \frac{P+Q}{2} = \frac{A+P'}{2} + \frac{B+Q'}{2} + \frac{C+R'}{2},$$

$$\frac{Q'+R'}{2} + \frac{R'+P'}{2} + \frac{P'+Q'}{2} = \frac{A+P}{2} + \frac{B+Q}{2} + \frac{C+R}{2},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{A+B+C}{3} = \frac{P+Q+R}{3} = \frac{P'+Q'+R'}{3}.$$

On verrait aisément, du reste, que la droite qui

joint, par exemple, Q' au milieu de BQ (et qui est l'une des médianes du triangle $P'Q'R'$) et la droite joignant A au milieu de BC se coupent aux deux tiers de leur longueur à partir des sommets.

II. Nous supposons désormais le triangle ABC tel que les points P, Q, R soient alignés. Si ces points sont deux à deux distincts, l'un d'eux est compris entre les deux autres et nous pouvons toujours supposer, pour faire la figure, que ce soit le point R ⁽¹⁾.

Ceci posé, supposons donnés P, Q, R et proposons-nous de construire le triangle ABC . Il suffit (I, remarque 2) de prendre \overrightarrow{PA} de même longueur que \overrightarrow{QR} et faisant avec lui un angle de $\frac{\pi}{2}$; \overrightarrow{PB} et \overrightarrow{PC} s'obtiennent de même à partir de \overrightarrow{RP} et \overrightarrow{PQ} et le lecteur vérifiera sans peine que le triangle ABC ainsi *déterminé* répond bien à la question.

Indiquons aussi une construction, qui présente quelque intérêt pour la suite, des milieux A', B', C' , des côtés du triangle ABC . Nous avons vu (I, remarque 1) que l'on passe de R à Q par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de A' : A' est donc l'un des sommets du carré construit sur RQ pour diagonale et l'on obtient de façon analogue B' et C' (*fig. 2*). On voit immédiatement sur la figure que PA', QB', RC' sont bien respectivement perpendiculaires aux côtés du triangle ABC et de longueur moitié. Posons maintenant

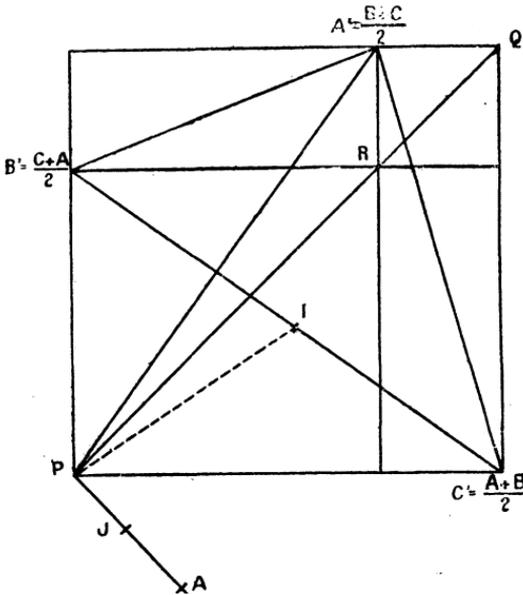
$$RQ = \frac{X}{\sqrt{2}}, \quad PR = \frac{Y}{\sqrt{2}}, \quad PQ = \frac{Z}{\sqrt{2}};$$

(1) Il suffit de choisir convenablement les notations.

les carrés des côtés du triangle ABC valent respectivement

$$(1) \quad \begin{cases} a^2 = Y^2 + Z^2, \\ b^2 = Z^2 + X^2, \\ c^2 = X^2 + Y^2, \end{cases}$$

Fig. 2.



et l'on a d'autre part

$$(2) \quad Z = X + Y.$$

On tire des relations (1)

$$(1') \quad \begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = 2X^2, \\ c^2 + a^2 - b^2 = 2Y^2, \\ a^2 + b^2 - c^2 = 2Z^2, \end{cases}$$

et, pour trouver la relation entre a^2 , b^2 , c^2 , il suffira de

porter ces valeurs de X^2 , Y^2 , Z^2 dans la relation

$$(X + Y + Z)(X + Y - Z)(Y + Z - X)(Z + X - Y) = 0,$$

qui doit être substituée à (2) en l'absence de toute hypothèse sur la disposition des points P, Q, R et sur le signe de X, Y, Z.

Cette dernière relation s'écrit encore

$$(3) \quad X^4 + Y^4 + Z^4 - 2(Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2) = 0,$$

et une simple substitution donne

$$f(a^2, b^2, c^2) \equiv 5(a^4 + b^4 + c^4) - 6(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0,$$

relation à laquelle un calcul facile permet encore de substituer

$$8S = a^2 + b^2 + c^2,$$

S étant l'aire du triangle ABC.

Il est d'ailleurs aisé de trouver une relation simple entre les cotangentes des angles du triangle ABC. Ces angles sont égaux à ceux que forment les droites PA', QB', RC' prises deux à deux. Or, sur la figure 2, on évalue immédiatement les coefficients angulaires des droites en question dans le système d'axes PC', PB'. De la formule donnant la tangente trigonométrique d'une différence d'angles, on déduit tang A, tang B, tang C, et l'on trouve

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2.$$

Cas particulier. — Tout triangle rectangle isocèle est évidemment un triangle T, deux des points PQR étant confondus.

III. Certains éléments sont variables, l'ordre des points P, Q, R sera variable. Il va sans dire que nous renonçons à toute hypothèse concernant cet ordre.

1° *Supposons B et C donnés.* — Il en sera de même de P et de A' (milieu de BC). En se reportant à la figure 2 on voit que, si I est le milieu de B'C', on a

$$PI = \frac{B'C'}{2} = \frac{PA'}{2} = \text{const.}$$

Le lieu de I est donc un cercle de centre I, de rayon $\frac{PA'}{2}$. Le lieu du point A s'en déduit par une homothétie de centre A', de rapport 2 : c'est un cercle passant par P et par les deux sommets, autres que B et C, du carré construit sur BC.

La droite Q'R' passe par le milieu J de AP et est perpendiculaire à AP' (*fig. 1*); mais le lieu de J se déduit du lieu de A par une homothétie de centre P et de rapport $\frac{1}{2}$, JA' parallèle à AP' est également perpendiculaire à Q'R'. L'enveloppe de cette dernière droite est donc une hyperbole de foyer A', le lieu de J étant le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

2° *Supposons A et P donnés.* — La droite PQR, perpendiculaire à AP, est fixe. Pour obtenir le lieu de B on fera subir à la droite PQR une similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$, le lieu de C s'obtient par une similitude analogue, d'angle $+\frac{\pi}{4}$.

Les lieux de B et C sont donc des droites dont la construction est immédiate. Les points Q' et R' se déduisent de Q et R par une rotation de centre A, d'angle $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Les lieux de Q' et R' sont donc des droites qui se déduisent de la droite PQR par l'une ou l'autre des deux rotations mentionnées.

Enfin le lieu de P' sera la droite homothétique de la

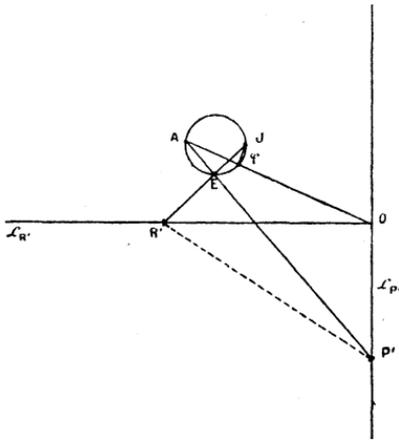
droite PQR, A étant le centre et 2 le rapport d'homothétie.

L'enveloppe de la droite Q'R' se réduit au point J, milieu de AP.

Cherchons l'enveloppe de la droite P'R'. Les droites JR' et AP', passant par les points fixes J et A, sont constamment rectangulaires; elles déterminent donc des divisions semblables sur les droites $L_{R'}$ et $L_{P'}$ (elles-mêmes rectangulaires) lieux respectifs de R' et P'. L'enveloppe de P'R' est donc une parabole tangente à $L_{R'}$ et $L_{P'}$.

Établissons ce résultat par une voie plus élémentaire. Le lieu du point E (*fig.* 3) est le cercle de dia-

Fig. 3.



mètre AJ qui peut être considéré comme inverse, par rapport à A, de $L_{P'}$. On a donc

$$\overline{AE} \cdot \overline{AP'} = \text{const.} = A\varphi \cdot AO$$

et le cercle circonscrit au quadrilatère EOP'R' passe par le point fixe φ . Il suffit alors d'envisager la droite

de Simson relative au point φ du triangle $OR'P'$ pour voir que φ est le foyer d'une parabole tangente à $P'R'$, L_P et L_R . On raisonnerait de même pour l'enveloppe de la droite $P'Q'$.

3° *Supposons donnés Q' et R' .* — On connaît le point J , milieu de $Q'R'$. D'autre part, AP' étant égal et perpendiculaire à $Q'R'$ (1) la droite qui joint les points $J = \frac{A+P}{2}$ et $A' = \frac{P+P'}{2}$ sera perpendiculaire à $Q'R'$ et égale à $\frac{Q'R'}{2}$. Le point A' est donc connu.

La droite PQR passe évidemment (*fig. 2*) par le milieu K de JA' . Son enveloppe se réduit donc à ce point et, l'angle en P étant droit, le lieu du point P est la circonférence de diamètre JK .

Le lieu de A s'en déduit par une symétrie de centre J . Enfin on passe du lieu de A aux lieux de B et C par rotation de $\mp \frac{\pi}{2}$ autour de R' et Q' respectivement et l'on passe du lieu de A aux lieux de R et Q par des similitudes $(\sqrt{2}, \mp \frac{\pi}{4})$ de centre R' et Q' .

Il reste à trouver les enveloppes des côtés du triangle T . Soit AB un côté de ce triangle qui rencontre en C' la perpendiculaire abaissée de R' sur lui. Le lieu de $C' = \frac{A+B}{2}$ est un cercle déduit du lieu de A par une similitude $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4})$ de centre R' . L'enveloppe de AB est donc une hyperbole de foyer R' , le cercle décrit sur l'axe transverse étant le lieu de C' . L'enveloppe de AC sera de même une hyperbole ayant Q' pour foyer. L'enveloppe de BC se réduit au point A' .

IV. Il s'agit d'abord de vérifier que l'équation

$$f(a^2, b^2, c^2) \equiv 5(a^4 + b^4 + c^4) - 6(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0$$

qui peut aussi s'écrire

$$5(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 16(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0$$

ne peut être satisfaite par des valeurs, *toutes entières*, de a, b, c .

L'équation étant homogène, il suffit de démontrer qu'elle n'a pas de solutions en nombres entiers *premiers dans leur ensemble* puisqu'on se ramènerait toujours à ce cas en mettant en facteur la quatrième puissance du plus grand commun diviseur de a, b, c .

Soient donc a, b, c trois entiers premiers entre eux dans leur ensemble. Je dis que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est jamais multiple de 4. En effet, a, b, c sont forcément non tous pairs, d'après l'hypothèse faite; si un seul de ces trois nombres est impair, ou bien s'ils le sont tous, $a^2 + b^2 + c^2$ sera un nombre impair; si enfin deux des entiers a, b, c sont impairs, nous aurons, par exemple,

$$a = 2a', \quad b = 2b' + 1, \quad c = 2c' + 1,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4(a'^2 + b'^2 + c'^2 + b' + c') + 2 = \text{mult. } 4 + 2.$$

L'impossibilité de $f = 0$ en nombres entiers premiers dans leur ensemble en résulte. Admettons en effet un instant qu'on puisse trouver 3 entiers a, b, c tels que $f = 0$; puisque 16 est premier avec 5, il diviserait $(a^2 + b^2 + c^2)^2$. Donc 4 diviserait $a^2 + b^2 + c^2$, ce qui, d'après le lemme précédent, est impossible.

Posons, comme il est indiqué dans l'énoncé,

$$\begin{aligned} a^2 &= x, & b^2 &= y, & c^2 &= z, \\ \left\{ \begin{array}{l} y + z - x = 2X^2, \\ z + x - y = 2Y^2, \\ x + y - z = 2Z^2, \end{array} \right. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{cases} x = Y^2 + Z^2, \\ y = Z^2 + X^2, \\ z = X^2 + Y^2, \end{cases}$$

et supposons

$$0 \leq X \leq Y \leq Z;$$

entre X, Y, Z on a la relation

$$Z = X + Y.$$

Supposons que x, y, z soient entiers et premiers entre eux dans leur ensemble et satisfassent à

$$f(x, y, z) = 0.$$

Je dis que X, Y, Z seront entiers et premiers entre eux deux à deux. En effet la relation $f = 0$ est le résultat de l'élimination de X, Y entre les équations

$$(E) \quad \begin{cases} x = Y^2 + (X + Y)^2 = X^2 + 2XY + 2Y^2, \\ y = X^2 + (X + Y)^2 = 2X^2 + 2XY + Y^2, \\ z = X^2 + Y^2. \end{cases}$$

Les équations (E) sont résolubles en X^2, XY, Y^2 :

$$\begin{cases} 2X^2 = y + z - x, \\ 2Y^2 = z + x - y, \\ 4XY = x + y - 3z \end{cases}$$

et l'on peut écrire $f = 0$ sous la forme

$$4(y + z - x)(z + x - y) = (x + y - 3z)^2;$$

mais $y + z - x$ et $z + x - y$ sont de même parité, de même $z + x - y$ et $x + y - 3z$; enfin, d'après l'égalité précédente, $x + y - 3z$ est manifestement pair X^2, Y^2, XY sont donc des entiers.

D'ailleurs X^2 et Y^2 seront premiers entre eux, sans

quoy x, y, z auraient un diviseur commun : en effet, si X^2 et Y^2 avaient un diviseur commun δ , δ^2 diviserait $X^2 Y^2$, δ diviserait XY et d'après les équations (E), il diviserait simultanément x, y, z qui, par suite, ne seraient pas premiers dans leur ensemble. Il en résulte que X et Y sont entiers : en effet, décomposons X^2, Y^2, XY en facteurs premiers

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \\ Y^2 = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n}, \\ XY = u_1^{\gamma_1} u_2^{\gamma_2} \dots u_n^{\gamma_n}, \end{array} \right.$$

X^2 et Y^2 n'ayant pas de facteur commun

$$(XY)^2 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n} = u_1^{2\gamma_1} u_2^{2\gamma_2} \dots u_n^{2\gamma_n}.$$

De l'identité des deux décompositions, on déduit la parité des α et des β . X et Y sont donc entiers, et comme

$$Z = X + Y,$$

Z est un entier premier à X et à Y .

Les solutions en nombres entiers premiers dans leur ensemble de l'équation $f(x, y, z) = 0$ sont donc fournies par les équations (E) où X et Y sont des entiers premiers entre eux. On passe à la solution générale en substituant, aux valeurs x, y, z définies par (E), les valeurs kx, ky, kz , k étant un entier quelconque.

Autre solution par M. FAUCHEUX.



[T5]

CAPACITÉS ÉLECTRIQUES ET GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR MAURICE JANET.

Si l'on se donne un système de conducteurs, suivant les connexions que l'on établit entre eux et la manière dont on les charge, on peut avoir à envisager diverses *capacités*. Les capacités les plus intéressantes que l'on est amené à introduire ainsi se trouvent liées entre elles par certaines relations dont il existe des représentations géométriques simples. Nous indiquerons deux représentations de cette nature en nous bornant au cas d'un système de quatre conducteurs : nous ne ferons ainsi appel qu'à l'espace à trois dimensions; on pourrait étudier d'une manière analogue le cas de n conducteurs en faisant appel à l'espace à $n - 1$ dimensions. La première de ces représentations géométriques est due à Potier (¹) : la recherche d'une démonstration explicite des résultats indiqués par lui est l'origine de ce travail; nous donnons une telle démonstration qui offre une application intéressante d'un théorème connu de géométrie élémentaire. Nous proposons ensuite une deuxième représentation géométrique, qui est à certains égards plus naturelle. Enfin la recherche d'un lien entre les deux représentations conduit à quelques énoncés géométriques que nous indiquons.

1. Supposons en présence *quatre* conducteurs,

(¹) POTIER, *Capacités entre les conducteurs* (*Journal de Physique*, 3^e série, t. VI, 1897, p. 238). P. JANET. *Leçons d'électro-technique générale* (5^e éd., t. I, Chap II, n^o 15, p. 28).

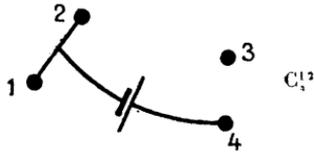
suffisamment éloignés de tous les autres, et supposons-les d'abord à l'état neutre. Si l'on établit éventuellement des connexions entre eux et si l'on met deux des conducteurs ainsi obtenus (K), (K') respectivement en communication avec les deux bornes d'un générateur, d'une pile par exemple, il s'établit entre ces deux conducteurs une différence de potentiel de valeur absolue V , et ils prennent deux charges de même valeur absolue Q et de signes contraires; le rapport $\frac{Q}{V}$ est la *capacité* du système (K, K') dans les conditions indiquées. Nous emploierons pour cette capacité la notation suivante :

Si aucune connexion n'a été faite et si K, K' sont les conducteurs 1, 2.



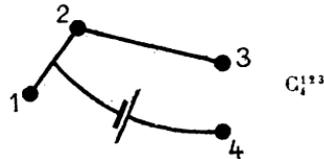
C_{12}^0

Si 1, 2 étant en communication, K, K' sont respectivement (1,2) et (4).



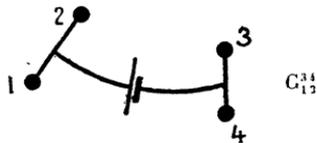
C_{12}^{13}

Si 1, 2, 3 sont en communication.



C_{12}^{123}

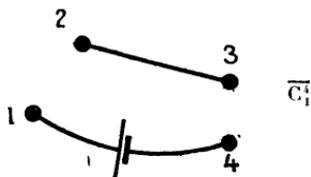
Si 1, 2 d'une part; 3, 4 de l'autre sont en communication.



C_{12}^{34}

(123)

Si 2, 3 sont en communication,
K, K' étant respectivement 1,
4.



A ces hypothèses et aux hypothèses analogues que l'on peut faire en échangeant le rôle des conducteurs correspondent

$$6 + 12 + 4 + 3 + 6 = 31$$

capacités, auxquelles nous ferons correspondre 31 longueurs de définition simple dans un certain tétraèdre, tétraèdre (T) ou tétraèdre (Θ).

2. *Tétraèdre T.* — Les différences de potentiel de deux quelconques des quatre conducteurs sont des fonctions linéaires et homogènes bien déterminées des trois charges Q_2, Q_3, Q_4 ($Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$)⁽¹⁾. Pour chaque distribution électrique possible, le potentiel de l'un des conducteurs peut être pris arbitrairement; ce potentiel choisi, les autres sont bien déterminés; autrement dit, on peut représenter les potentiels V_1, V_2, V_3, V_4 des quatre conducteurs d'un système donné par les formules

$$V_1 = \varphi, \quad V_2 = \varphi + \psi_2, \quad V_3 = \varphi + \psi_3, \quad V_4 = \varphi + \psi_4,$$

où ψ_2, ψ_3, ψ_4 désignent des fonctions linéaires et homogènes bien déterminées, et φ une fonction arbitraire de Q_2, Q_3, Q_4 ; en prenant pour φ une fonction linéaire et homogène et écrivant l'expression de V_i en

(¹) Traduction de la formule $\int \int_{(D)} \frac{du}{dn} dS = 0$, où u désigne une fonction harmonique dans le domaine limité par (D).

fonction des Q dont l'indice est différent de i , ce qui est possible grâce à l'équation $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$, nous obtenons un système de formules

$$V_i = \sum_{k=1}^{k=4} b_{ik} Q_k \quad \text{où} \quad b_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Assujettissons maintenant les b aux conditions $b_{ik} = b_{ki}$; grâce à la symétrie (1) du tableau des coefficients des ψ , ces conditions sont compatibles; elles déterminent d'ailleurs entièrement la fonction φ . La signification physique des b s'aperçoit immédiatement en annulant deux des Q dans les formules précédentes :

$$b_{ik} = -\frac{1}{2C_i^2}.$$

Cela posé, considérons un tétraèdre (T) $S_1 S_2 S_3 S_4$, dont les arêtes aient pour longueurs (2) les quan-

(1) Cette symétrie résulte de la formule

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_i V_i' = \sum_{i=1}^{i=4} Q_i' V_i,$$

où (Q, V) ; (Q', V') sont les charges et potentiels correspondant à deux distributions quelconques; formule qui est la traduction, dans le cas d'un système de conducteurs, de la suivante

$$\iint_{(D)} u \frac{du}{dn} dS = \iint_{(D)} u' \frac{du'}{dn} ds,$$

où u, u' désignent deux fonctions harmoniques dans le domaine limité par (D) .

(2) Les C sont liées entre elles par des relations d'inégalité qui prouvent que la construction du tétraèdre est réellement possible. Cela résultera *a posteriori* de l'étude qui suit : réciprocity des tétraèdres T et Θ , et note du numéro 3.

tités $\frac{1}{\sqrt{C_i^k}}$. La quantité S ,

$$S = Q_1 \cdot \overline{MS}_1^2 + Q_2 \cdot \overline{MS}_2^2 + Q_3 \cdot \overline{MS}_3^2 + Q_4 \cdot \overline{MS}_4^2,$$

est une fonction du point M qui prend la valeur $-2\sqrt{V_i}$ lorsque M vient en S_i . D'ailleurs, puisque

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0,$$

le lieu des points pour lesquels S est égale à une constante k est un plan; quand la valeur de la constante varie, le plan se déplace parallèlement à lui-même; la distance de deux positions du plan est d'ailleurs proportionnelle à la variation de la constante. La direction de ce plan et le facteur de proportionnalité peuvent s'obtenir par l'un des procédés suivants (1) :

1° Répartissons les quatre points en deux groupes, $S_1 S_2 S_3$ d'une part, S_4 de l'autre; soit G_4 le centre de gravité de $S_1 S_2 S_3$ affectés des masses $Q_1 Q_2 Q_3$. Les plans considérés sont perpendiculaires à la droite $G_4 S_4$ et la différence des valeurs de la constante k pour deux tels plans est égale (en valeur absolue) à la distance des deux plans multipliée par

$$2|Q_4|, \text{ distance } G_4 S_4.$$

2° Répartissons les quatre points en deux groupes $S_1 S_2$ d'une part, $S_3 S_4$ de l'autre. Soient G_{12} le centre de gravité de $S_1 S_2$, affectés des masses Q_1, Q_2 ; G_{34} celui de $S_3 S_4$, affectés des masses Q_3, Q_4 . Les plans considérés sont perpendiculaires à la droite $G_{12} G_{34}$ et la différence des valeurs de k pour deux tels plans est égale à la distance des deux plans multipliée

(1) Voir p. ex. HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire*, t. II, n° 609.

par

$$2 | Q_1 + Q_2 |, \text{ distance } G_{12}G_{34}.$$

On appliquera l'une ou l'autre de ces règles aux diverses hypothèses faites; on remarquera que lorsque (1) et (2) sont en communication, les potentiels de (1) et de (2) devant être les mêmes, les plans considérés doivent être parallèles à l'arête S_1S_2 ; et l'on arrivera aux conclusions suivantes :

Lorsque les inverses des racines carrées des C_i^k sont égales respectivement aux arêtes a_i^k (distances S_iS_k), les inverses des racines carrées de C_4^{12} , C_4^{123} , C_{12}^{34} , \overline{C}_4^3 sont égales respectivement aux longueurs suivantes :

a_4^{12} : distance de S_4 à l'arête S_1S_2 (hauteur d'une face);

a_4^{123} : distance de S_4 au plan $S_1S_2S_3$ (hauteur du tétraèdre);

a_{12}^{34} : plus courte distance des arêtes S_1S_2 , S_3S_4 ;

\overline{a}_4^3 : distance mutuelle des parallèles à S_2S_3 menées par S_1 et S_4 .

Faisons de plus une remarque qui nous sera utile dans la suite : dans le cas (3) où $V_2 = V_3 = V_4 = V$, la différence $V_1 - V$ s'écrit encore $Q_i \frac{h_1 h_i}{\cos(S_1H_1, S_iH_i)}$, où i est indifféremment 2, 3 ou 4 et où h_k représentent les longueurs des hauteurs S_kH_k du tétraèdre. (On pourra, pour le voir, introduire d'abord le point K_i intersection de la perpendiculaire à la face $S_2S_3S_4$ en S_i avec le plan de la face opposée à S_i .)

3. *Tétraèdre Θ .* — Le tétraèdre Θ s'introduira immédiatement grâce aux formules qui donnent les

charges en fonction des potentiels

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik} V_k,$$

où les a sont des constantes entièrement déterminées par la donnée du système des quatre conducteurs. Les deux équations, déjà rencontrées,

$$\sum_{i=1}^{i=4} Q_i V_i = \sum_{i=1}^{i=4} Q_i V_i, \quad \sum_{i=1}^{i=4} Q_i = 0,$$

montrent immédiatement que le tableau des 16 coefficients a_{ik} est symétrique et que la somme des coefficients d'une même colonne (ou d'une même ligne) est nulle. Or si l'on considère quatre vecteurs dont la somme géométrique est nulle, leurs produits scalaires deux à deux forment précisément un tableau carré de 16 nombres jouissant des propriétés précédentes. Cette remarque suggère immédiatement la construction suivante : menons quatre vecteurs $\vec{\omega\Sigma}_i$ de même origine ω dont les produits scalaires deux à deux soient égaux aux a_{ik} : il suffit ⁽¹⁾ pour cela de construire trois d'entre eux, ce qui est possible puisque l'on connaît leurs longueurs $\sqrt{a_{ii}}$ et les cosinus de leurs angles deux à deux $\frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}a_{kk}}}$: en leur adjoignant le vecteur opposé à leur somme géométrique, on obtient quatre vecteurs qui répondent à toutes les conditions

(1) La construction est *réellement* possible, car on a les inégalités $a_{ii} > 0$, $a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2 > 0$ puisque l'énergie $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=4} Q_i V_i$ est une forme quadratique des V définie positive.

imposées, comme on le voit en utilisant les relations qui existent entre les a_{ik} . ω est évidemment le centre de gravité du tétraèdre $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$.

V_1, V_2, V_3, V_4 désignant quatre nombres quelconques, considérons le vecteur \vec{V} :

$$\vec{V} = V_1 \cdot \overrightarrow{\omega \Sigma_1} + V_2 \cdot \overrightarrow{\omega \Sigma_2} + V_3 \cdot \overrightarrow{\omega \Sigma_3} + V_4 \cdot \overrightarrow{\omega \Sigma_4}.$$

Son produit scalaire par $\overrightarrow{\omega \Sigma_i}$ est

$$V_1 a_{i1} + V_2 a_{i2} + V_3 a_{i3} + V_4 a_{i4} = Q_i.$$

On appliquera cette remarque aux cinq cas à étudier. On remarquera, pour simplifier, qu'un des potentiels, au choix, peut être supposé nul; on remarquera de plus que la condition éventuelle $Q_k = 0$ se traduit géométriquement par l'orthogonalité des vecteurs \vec{V} et $\overrightarrow{\omega \Sigma_k}$. On obtiendra alors les conclusions suivantes :

Les racines carrées des capacités $C_1^2, C_1^{12}, C_4^{123}, C_{12}^{34}, \bar{C}_1^4$ sont égales respectivement aux longueurs suivantes du tétraèdre (Θ) :

β_1^2 : distance de Σ_1 (ou Σ_2) au plan $\omega \Sigma_3 \Sigma_4$;

β_4^{12} : distance de Σ_4 à la droite $\omega \Sigma_3$;

β_4^{123} : distance $\omega \Sigma_4$;

β_{12}^{34} : distance du milieu de $\Sigma_1 \Sigma_2$ au milieu de $\Sigma_3 \Sigma_4$;

$\bar{\beta}_1^4$: distance de Σ_1 (ou de Σ_4) à la droite qui joint les milieux de $\Sigma_2 \Sigma_3$ et de $\Sigma_1 \Sigma_4$.

4. Construction de (Θ) à l'aide de (T) . — La remarque faite à la fin du n° 2 montre que des vecteurs, de même origine ω , parallèles aux hauteurs de (T) , égaux à leurs inverses [tous du sens des hauteurs de (T)] considérées comme allant du sommet vers la

base, ou tous du sens contraire] forment ⁽¹⁾ précisément un système répondant à toutes les conditions imposées aux $\vec{\omega\Sigma}_i$.

Les raisonnements précédents s'appliquant d'ailleurs à un tétraèdre (T) quelconque, nous arrivons à la conclusion géométrique suivante :

Si les vecteurs déterminés par un point ω et les sommets $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ d'un tétraèdre (Θ) sont parallèles aux hauteurs d'un tétraèdre donné (T) (de même sens), égaux à leurs inverses, chaque distance β du tétraèdre (Θ) est égale à l'inverse de la distance α de mêmes indices du tétraèdre (T).

§. *Réciprocité de la transformation (T, Θ).* — Prenons le transformé par polaires réciproques de (T) relativement à une sphère ayant pour centre le point O, centre de gravité de (T), et pour rayon $\frac{1}{2}$; nous obtenons précisément un tétraèdre ($\bar{\Theta}$) égal à (Θ), le point ω coïncidant avec O lui-même. Si maintenant nous opérons sur ($\bar{\Theta}$), comme nous venons d'opérer sur (T), nous obtiendrons, d'après la propriété bien connue des transformations par polaires réciproques, le tétraèdre (T) lui-même. Si donc on appelle (b) les longueurs qui ont pour définitions dans (T) les défi-

(1) Cette remarque prouve en particulier que ces quatre vecteurs ont une résultante nulle, ce qui est bien connu.

Ce dernier point s'aperçoit d'une façon très intuitive, comme veut bien me le faire remarquer M. Bricard, en considérant les quatre vecteurs comme les résultantes pour les quatre faces d'une pression uniforme sur toute l'aire du tétraèdre, ou encore, si l'on veut pas invoquer de raisons d'hydrostatique, en utilisant l'identité vectorielle évidente :

$$u\Delta v + v\Delta w + w\Delta u + (v-u)\Delta(v-w) = 0.$$

nitions mêmes des (β) dans (Θ) , et (α) les longueurs qui ont pour définitions dans (Θ) les définitions mêmes des (a) dans (T) , le résultat du numéro précédent entraîne le suivant :

Chaque distance (b) du tétraèdre (T) est égale à l'inverse de la distance (α) de mêmes indices du tétraèdre (Θ) .

6. Si la sphère par rapport à laquelle est faite la transformation par polaires réciproques a un rayon R quelconque, le tétraèdre $(\bar{\Theta}')$ obtenu est homothétique à $(\bar{\Theta})$; la même transformation appliquée à $(\bar{\Theta}')$ donne évidemment (T) lui-même. En désignant par des lettres grecques accentuées les longueurs de $(\bar{\Theta}')$ homologues aux longueurs de $(\bar{\Theta})$ que nous avons introduites, on voit que *les produits de chaque longueur a par la longueur α' de mêmes indices, et ceux de chaque longueur b par la longueur α' de mêmes indices sont tous égaux*. Dans les résultats qui précèdent sont contenus implicitement plusieurs énoncés géométriques simples que l'on pourra retrouver par une étude directe. En voici deux à titre d'exemple :

Si les médianes $(^1)$ d'un tétraèdre sont parallèles aux hauteurs d'un autre tétraèdre, les médianes du second sont parallèles aux hauteurs du premier et les huit produits que l'on peut former avec une médiane de l'un et la hauteur correspondante de l'autre sont tous égaux.

K étant une constante donnée, et (T) un tétraèdre pour lequel on représente par b_i^h la distance d'un

⁽¹⁾ Droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée.

sommet (i ou k) au plan passant par le centre de gravité et les autres sommets, construisons le tétraèdre (Θ) dont les arêtes sont mesurées par les quantités $\frac{K^2}{b_i^2}$; le tétraèdre déduit de (Θ) comme Θ a été déduit de (T) (avec la même valeur de la constante K) est précisément le tétraèdre (T).

[P'6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT ;

PAR E. LAINÉ.

La présente Note, rédigée à l'intention des candidats à l'Aggrégation, a pour but de préciser le mode d'application de la théorie des transformations de contact au problème de l'intégration des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Nous nous contenterons de rappeler les résultats essentiels de la théorie des transformations de contact, renvoyant, par exemple, pour la démonstration, aux leçons classiques de M. Goursat (¹).

I. — Équations différentielles et transformations de contact du plan.

1. On appelle élément linéaire (x, y, p) l'ensemble d'un point (x, y) et d'une droite de coefficient angulaire p passant par ce point.

Lorsque x, y et p sont des fonctions d'un paramètre

(¹) GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Chap. IX et X.

variable telles que l'on ait

$$(1) \quad dy - p dx = 0,$$

les ∞^1 éléments correspondant aux différentes valeurs du paramètre forment une multiplicité m_1 ; l'ensemble des points appartenant à cette m_1 en est le support ponctuel.

Si le support ponctuel se réduit à un point, la m_1 se compose de ce point et des ∞^1 droites qui s'y coupent : ces m_1 particulières sont désignées par la notation m_1^0 . Si le support ponctuel forme une courbe, la m_1 se compose des points et des tangentes de la courbe, chaque tangente étant associée à son point de contact : ces m_1 sont désignées par la notation m_1^1 .

2. Cherchons, par exemple, à quelle condition les équations

$$(2) \quad f(x, y, p) = 0, \quad \varphi(x, y, p) = 0$$

définissent une m_1 . On aura, en différentiant,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial p} dp = 0, \end{cases}$$

et les équations (2) et (3) doivent entraîner l'équation (1). Il existe donc deux coefficients λ et μ tels que l'on ait, en tenant compte de (2),

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - p &= 0, \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 1 &= 0, \\ \lambda \frac{\partial f}{\partial p} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial p} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant λ et μ ,

$$\frac{\partial f}{\partial p} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0,$$

ou encore, en employant la notation des crochets de Jacobi,

$$(4) \quad [f, \varphi] = 0.$$

Ainsi, pour que les équations (2) définissent une m_1 , il faut qu'elles entraînent l'équation (4). Inversement, si les équations (2) entraînent (4), on a, par exemple,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} = \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial p} = \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

et l'on tire des équations (3)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) (dy - p dx) = 0.$$

Si le premier facteur était nul, les fonctions f et φ ne seraient pas indépendantes, et les équations (2) ne pourraient évidemment définir une m_1 . En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que les équations (2) définissent une m_1 est que f et φ soient deux fonctions indépendantes, et que les équations (2) entraînent (4). Par suite pour que les équations

$$f(x, y, p) = a, \quad \varphi(x, y, p) = b$$

définissent, quelles que soient les constantes a et b , une m_1 , il faut et il suffit que f et φ soient deux fonctions distinctes annihilant identiquement le crochet $[f, \varphi]$: on dit dans ce cas que ces deux fonctions sont en involution.

3. L'équation

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0$$

définit ∞^2 éléments; cherchons à associer ces éléments de façon à obtenir des m_1 .

Si le premier membre de (5) ne contient pas p , la solution est immédiate. Soit (C) la courbe définie alors par l'équation (5); cette équation est vérifiée par tous les éléments obtenus en associant à chaque point de (C) une droite arbitraire passant par ce point. On aura donc deux catégories de m_1 vérifiant l'équation (5) :

1° Les m_1^0 ayant pour support ponctuel un point quelconque de la courbe (C);

2° La m_1^1 ayant pour support ponctuel la courbe (C) elle-même.

Quand f contient p , le problème proposé est identique à celui de l'intégration de l'équation différentielle

$$f(x, y, y') = 0;$$

les m_1^0 qui vérifient l'équation (5) fournissent alors des intégrales au sens de Lie (1).

Pour plus de symétrie nous désignerons désormais par p et r les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'équation (5) représente alors indifféremment ∞^2 éléments linéaires, ou une équation différentielle du premier ordre. Intégrer cette équation revient à associer, de toutes les manières possibles, ces ∞^2 éléments de façon à obtenir des m_1 .

4. Nous allons généraliser un peu la notion d'enveloppe. Rappelons que, étant donnée une famille de courbes à un paramètre

$$f(x, y, a) = 0,$$

(1) E. GOURSAT, *loc. cit.*, n° 63.

on dit ordinairement que ces courbes ont une enveloppe quand :

1° Les équations

$$f(x, y, a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0$$

ne sont pas incompatibles;

2° L'élimination de a entre ces deux équations conduit à une équation en (x, y) qui définit une courbe.

Considérons une famille de multiplicités à un paramètre. Il peut se présenter trois cas :

1° Il existe, à distance finie ou non, un nombre limité d'éléments tels que chacun d'eux appartienne à toutes les multiplicités de la famille. Dans ce cas nous dirons qu'il existe une enveloppe \mathcal{C}_0 ;

2° Il existe une multiplicité, n'appartenant pas à la famille considérée, mais telle que chacun de ses éléments appartienne à une multiplicité de la famille. Dans ce cas nous dirons qu'il existe une enveloppe \mathcal{C}_1 ;

3° Enfin, en dehors de ces deux cas, nous dirons que la famille considérée n'a pas d'enveloppe.

Soit, par exemple, une famille de m_1^1 ayant pour supports ponctuels une famille de courbes algébriques

$$f(x, y) = a.$$

Il existe une enveloppe formée des éléments déterminés par les points communs à l'infini de toutes ces courbes. Soit encore une famille d'ellipses égales tangentes à une droite donnée en un point donné; elles déterminent une famille de m_1^1 à un paramètre ayant encore évidemment une enveloppe \mathcal{C}_0 . Soit enfin une famille de courbes à un paramètre ayant un point commun (x_0, y_0) . Il existe, pour les m_1^1 correspondantes,

une enveloppe C_1 , qui n'est autre que la m_1^0 ayant pour support ponctuel le point (x_0, y_0) .

Ceci posé, l'équation (5) représente une famille de m_1 à un paramètre, qui donnent par définition l'intégrale générale; s'il existe une enveloppe, elle sera nommée intégrale singulière. Quand f ne dépend pas de p , les m_1^0 qui ont pour supports ponctuels les divers points de la courbe (C) correspondante donnent l'intégrale générale; la m_1^1 qui a pour support ponctuel la courbe (C) donne l'intégrale singulière.

3. Soient

$$(6) \quad X = X(x, y, p), \quad Y = Y(x, y, p), \quad P = P(x, y, p)$$

des équations qui établissent une correspondance entre les éléments des plans (x, y) et (X, Y) . On dit que ces équations définissent une transformation de contact (T. C.) quand il existe une fonction non nulle $\varphi(x, y, p)$ telle que l'on ait identiquement

$$(7) \quad dY - PdX = \varphi(dy - p dx). \quad \bullet$$

Dans ce cas, à toute m_1 du plan (x, y) , les équations (6) font correspondre une M_1 du plan (X, Y) .

Inversement, si X, Y et P sont trois fonctions des variables x, y, p vérifiant (7), on démontre (1) :

- 1° Que ces trois fonctions sont distinctes;
- 2° Qu'elles vérifient les équations

$$[X, Y] = 0, \quad [P, X] = \varphi, \quad [P, Y] = \varphi P;$$

(1) Cf. par exemple, pour le cas particulier du plan, S. LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen*, Kap. 3.

3° Que l'on a

$$(8) \quad P \equiv \frac{Y_x + p Y_y}{X_x + p X_y} \equiv \frac{Y_p}{X_p},$$

où l'on a écrit d'une façon générale F_u pour $\frac{\partial F}{\partial u}$.

Cette dernière relation détermine P sans ambiguïté; il est en effet impossible que l'on ait à la fois

$$\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} = 0,$$

car on en déduirait successivement

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} = 0,$$

et par suite,

$$\varphi = [P, X] = 0.$$

On peut se donner arbitrairement l'une des fonctions X ou Y ; on prendra pour l'autre une fonction en involution avec la première, et P sera donnée par la formule (8). Comme l'équation (7) peut encore s'écrire

$$d(Y - PX) + X dP = \varphi(dy - p dx),$$

on voit aussi qu'on peut se donner arbitrairement P ; on prendra pour $Y - PX$ une fonction en involution avec P , on aura X par une formule analogue à (8) et l'on en déduira Y .

Par exemple, si X et Y sont deux fonctions distinctes arbitraires des seules variables x et y , elles vérifient la relation d'involution. La T. C. ainsi obtenue change une m_1^0 en une M_1^0 , et une m_1^1 en une M_1^1 ; elle conserve donc la nature des supports ponctuels, et on l'appelle pour cette raison « transformation ponctuelle prolongée ».

Lorsque l'une des fonctions X ou Y contient p , il en

est de même de l'autre, d'après l'équation (8); on a alors une T. C. proprement dite. On peut les obtenir toutes de la façon suivante : soit $\Omega(x, y, X, Y)$ une fonction telle que l'équation

$$\Omega = 0$$

n'entraîne pas

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial X} & \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial X} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial Y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial X} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial Y} \end{vmatrix} = 0$$

Les équations

$$\Omega = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial X} + P \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = 0,$$

résolues par rapport à X, Y, P , donnent la T. C. la plus générale. L'équation

$$\Omega(x, y, X, Y) = 0$$

montre qu'à une m_1^0 cette T. C. fait correspondre en général une M_1^1 . D'après la forme du déterminant Δ , il y a réciprocité entre les deux systèmes de variables x, y, p et X, Y, P .

Remarquons encore qu'à deux m_1 ayant un élément commun, une T. C. fait correspondre deux M_1 ayant aussi un élément commun.

Tels sont, rapidement rappelés, les points essentiels de la théorie des transformations de contact.

6. Revenons maintenant à l'équation différentielle (5)

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0.$$

Aux ∞^2 éléments représentés par cette équation, la T. C. (6) fait correspondre ∞^2 éléments représentés par l'équation

$$(5') \quad F(X, Y, P) = 0.$$

A toute intégrale de (5) correspond ainsi une intégrale de (5'), et réciproquement. En particulier, d'après ce qu'on a vu plus haut, si l'une des équations admet une intégrale singulière, il en est de même de l'autre : si l'équation (5) admet une intégrale singulière du type (C_0) ou du type (C_1) , l'équation (5') admettra une intégrale singulière du même type, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie comme nous le verrons plus loin.

Considérons, par exemple, l'équation de Clairaut

$$(9) \quad y - px + f(p) = 0;$$

les équations

$$X = p, \quad Y = px - y, \quad P = x,$$

qui donnent

$$x = P, \quad y = PX - Y, \quad p = X,$$

définissent une T. C. (transformation de Legendre) qui n'est autre qu'une transformation par polaires réciproques relativement à la parabole

$$2\eta - \xi^2 = 0.$$

Elle conduit de l'équation (9) à l'équation

$$(10) \quad Y - f(X) = 0.$$

L'équation (10) admet comme intégrales :

1° Les M_1^0 (intégrale générale) ayant pour support

ponctuel un point quelconque (X_0, Y_0) de la courbe (C) représentée par l'équation (10). Il leur correspond la famille de droites

$$x = P, \quad y = PX_0 - f(X_0) \quad (p = X_0),$$

qui donne l'intégrale générale de l'équation (9);

2° Une M_1' (intégrale singulière) ayant pour support ponctuel la courbe (C)

$$X = X, \quad Y = f(X), \quad P = f'(X).$$

Il lui correspond la courbe

$$x = f'(X), \quad y = Xf'(X) - f(X) \quad (p = X),$$

qui est l'intégrale singulière de l'équation de Clairaut.

7. Nous allons déduire des considérations précédentes un procédé d'intégration de l'équation

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0.$$

L'équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène,

$$[f, X] \equiv \frac{\partial f}{\partial p} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial X}{\partial p} = 0,$$

admet comme on sait deux intégrales distinctes, dont l'une est f . Soit $X(x, y, p)$ une intégrale de cette équation distincte de f . Nous supposons naturellement que f contient p ; comme nous venons d'intégrer l'équation de Clairaut, nous supposons de plus que l'équation (5) n'est pas une équation de ce type. On aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial p} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0,$$

et par suite,

$$\frac{\partial X}{\partial p} \neq 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} + p \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0.$$

Les fonctions X et f étant en involution, il leur correspond une fonction $P(x, y, p)$ et une seule telle que les équations

$$(6) \quad X = X(x, y, p), \quad Y = f(x, y, p), \quad P = P(x, y, p)$$

définissent une T. C. Si nous appliquons cette T. C. à l'équation (5), l'équation transformée s'écrit

$$Y = 0.$$

Cette dernière équation admet pour intégrales :

1° Les M_1^0 définies par les équations

$$Y = 0, \quad X = a,$$

où a est une constante arbitraire. On en déduit, pour l'équation (5), une famille d'intégrales à un paramètre, représentée par les équations

$$f(x, y, p) = 0, \quad X(x, y, p) = a;$$

c'est l'intégrale générale.

2° L'intégrale singulière

$$Y = 0, \quad P = 0$$

à laquelle correspond, pour l'équation (5), l'intégrale singulière

$$f(x, y, p) = 0, \quad P(x, y, p) = 0.$$

à condition, bien entendu, que ces équations soient compatibles.

8. Il nous faut maintenant présenter quelques remarques importantes sur la correspondance établie entre les deux plans (x, y) et (X, Y) par les équations (6).

En identifiant les deux membres de l'équation fonda-

mentale

$$dY - P dX = \varrho(dy - p dx)$$

on a les relations

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial p} - P \frac{\partial X}{\partial p} = 0, & \frac{\partial Y}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} = \varrho, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} = -\varrho p. \end{cases}$$

C'est en partant des relations (11) que l'on établit les identités classiques de la théorie des T. C. ; on en tire aussi sans difficulté la relation

$$\frac{D(X, Y, P)}{D(x, y, p)} = \varrho^2,$$

qui montre bien pourquoi l'hypothèse

$$(12) \quad \varrho \neq 0$$

est essentielle dans toute cette théorie.

Soit alors (X_0, Y_0, P_0) un élément du plan (X, Y) . Si les équations

$$(13) \quad \begin{cases} X(x, y, p) = X_0, & Y(x, y, p) = Y_0, \\ P(x, y, p) = P_0 \end{cases}$$

n'ont pas pour conséquence la nullité de ϱ , elles définissent en général un ou plusieurs éléments du plan xy . Mais si elles sont incompatibles avec (12), deux cas singuliers pourront se produire :

1° Les équations (13) sont incompatibles, et alors à l'élément (X_0, Y_0, P_0) ne correspond aucun élément du plan (x, y) ;

2° Les équations (13) forment un système indéterminé; alors, à l'élément considéré, correspondent une infinité d'éléments, formant ou non une multiplicité. Par exemple, à l'élément $(0, 0, 0)$ du plan (X, Y) , la

T. C. définie par les équations

$$Y = y^2 - x^2 - 2\rho xy, \quad X = x + \rho y, \quad P = -2x$$

fait correspondre dans le plan (x, y) la m_1^0 qui a pour support ponctuel l'origine; on a ici

$$\varphi = 2y.$$

de sorte que φ s'annule bien pour tout élément de cette m_1^0 .

On voit de même qu'il peut y avoir des M_1 du plan (X, Y) auxquelles ne corresponde aucune m_1 du plan (x, y) . Considérons, par exemple, la T. C. définie par les équations

$$Y = -x + \frac{2y}{\rho} + \rho^2, \quad X = \frac{y}{\rho^2} + 2\rho, \quad P = \rho$$

$$\left(z = \frac{1}{\rho} \right),$$

d'où l'on tire

$$x = -Y + 2PX - 3P^2, \quad y = P^2(X - 2P), \quad \rho = P;$$

à la M_1

$$Y = 0, \quad P = 0$$

ne peut correspondre comme multiplicité; car comme on a ici

$$\varphi P \equiv 1,$$

il en résulte

$$[P, Y] = 1.$$

On trouve en effet qu'il correspond à cette multiplicité l'élément unique $(0, 0, 0)$ du plan (x, y) .

Ces considérations offrent un intérêt particulier pour l'étude de la correspondance entre les intégrales singulières. Remarquons à ce sujet que l'extension donnée à la notion d'enveloppe entraîne, comme nous l'avons fait observer déjà, une extension de la notion d'inté-

grale singulière. Prenons, par exemple, les cercles ayant pour centre l'origine; leur équation différentielle

$$x + \rho y = 0$$

n'a pas d'intégrale singulière au sens ordinaire. Cependant la T. C.

$$Y = x + \rho y, \quad X = y \sqrt{1 + \rho^2}, \quad P = \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{\rho}$$

met en évidence une intégrale singulière du type (\mathcal{C}_0) , composée des deux éléments communs à tous ces cercles aux points cycliques.

(A suivre.)

CONCOURS D'AGREGATION DE 1925.

Calcul différentiel et intégral.

Soit D une droite mobile qui engendre une surface S non développable.

1° On demande la condition nécessaire et suffisante pour que, en chaque position de D , les tangentes aux lignes asymptotiques de S , passant aux différents points de D , forment un parabolôïde P . On montrera que D reste parallèle à un plan fixe.

Les surfaces S correspondantes constitueront la classe des surfaces S_0 .

2° Conditions : a. Pour que le parabolôïde P ait constamment ses deux plans directeurs rectangulaires.

b. Pour que la direction diamétrale de P soit indépendante de D .

3° L_1, L_2, L_3 étant trois lignes asymptotiques quelconques d'une surface S_0 , montrer qu'entre les rayons de torsion ⁽¹⁾ respectifs T_1, T_2, T_3 de ces lignes, aux points où elles rencontrent une même génératrice D , existe une relation linéaire, dont les coefficients ne dépendent pas de D .

4° Dans quel cas deux asymptotiques d'une surface S_0 seront-elles à torsion constante ?

5° Oz étant perpendiculaire au plan directeur commun à tous les paraboloides P , on appelle θ l'angle que fait avec Oz la normale à S_0 au point M et T le rayon de torsion ⁽²⁾ de l'asymptotique L qui passe en M . Le point M_1 étant situé sur la même génératrice D que M et décrivant l'asymptotique L_1 quand D varie, soit $r_1 = MM_1$. Démontrer la relation

$$r_1 = \sqrt{C_1 T} \sin \theta,$$

C_1 étant indépendant de D .

6° Les coordonnées de M étant exprimées au moyen de l'arc s de L , on exprimera les coordonnées de M_1 au moyen de la même variable. Soit ω l'angle de la normale principale MK à L et de la direction Δ perpendiculaire aux tangentes aux diverses lignes L_1 aux points de D . Démontrer la relation

$$\text{tang } \omega = \frac{1}{2} \frac{dT}{ds}.$$

(1) L'énoncé imprimé remis aux candidats est ainsi rédigé : « ... montrer qu'entre les torsions respectives T_1, T_2, T_3, \dots ».

Bien que cette erreur de texte soit vénielle, et apparaisse immédiatement si les calculs sont bien conduits, elle peut dérouter les candidats.

(2) L'énoncé portait encore « torsion » au lieu de « rayon de torsion ».

SOLUTION

PAR BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Sur une surface S réglée non développable :

1° A chaque génératrice D correspondent ∞^3 quadriques se raccordant avec S tout le long de D .

2° Parmi elles, une, et une seule, est osculatrice à S tout le long de D ; c'est la quadrique, lieu des tangentes asymptotiques (autres que D) issues des divers points de D .

L'explication qui suit est correcte, mais exige un complément : D et une génératrice voisine D' déterminent ∞^3 quadriques q formant un système linéaire; si D' tend vers D , ces quadriques tendent vers un système linéaire ∞^3 de quadriques Q ayant en chaque point de D un contact simple avec S . Adjoignant à D et D' une nouvelle génératrice D'' voisine des deux premières, D , D' et D'' déterminent une quadrique q_1 et une seule; quand D' et D'' tendent toutes deux, séparément, vers D , la quadrique q_1 tend vers une quadrique Q_1 bien déterminée, osculatrice à S tout le long de D . Le raisonnement a besoin d'être complété par la démonstration de l'existence effective des limites indiquées.

On peut démontrer, géométriquement et rigoureusement, ces résultats de bien des façons :

Sur la génératrice D choisie, marquons trois points quelconques M_1, M_2, M_3 et trois tangentes quelconques à S , $M_1 T_1, M_2 T_2, M_3 T_3$; traçons sur S des courbes arbitraires C_1, C_2, C_3 tangentes respectivement en M_1, M_2, M_3 à $M_1 T_1, M_2 T_2, M_3 T_3$. Une généra-

trice D' , distincte de D , voisine ou non de D , coupe C_1, C_2, C_3 en M_1, M_2, M_3 respectivement. Les trois droites M_1M_1, M_2M_2, M_3M_3 déterminent une quadrique et une seule q , contenant d'ailleurs D et D' . La génératrice de q issue d'un point M , variable sur D , rencontre D' en un point M' . Supposons maintenant que D' tende vers D ; M_1M_1 tend vers M_1T_1 , de sorte que q tend vers la quadrique Q déterminée par M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3 ; la génératrice MM' de q issue de M , tend vers une droite MT , génératrice de Q , coupant S en deux points infiniment voisins, donc tangente à S : S et Q se raccordent donc en tous les points de D . La droite D étant donnée, Q ne dépend plus que de l'orientation de M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3 chacune dans le plan tangent correspondant: ces quadriques Q forment donc un système linéaire α^3 .

Imaginons écrite l'équation générale d'une quadrique Q de ce système; on peut trouver dans ce système une quadrique et une seule q_1 contenant une nouvelle génératrice D' de S , voisine ou non de D . En chaque point M de D passe une génératrice et une seule de q_1 , distincte de D ; cette génératrice est tangente à S au point M et coupe de nouveau S en un point M' situé sur D' ; si nous imaginons que D' se rapproche de plus en plus de D , chaque droite telle que MM' , toujours tangente à S en M et la coupant en un nouveau point de plus en plus voisin de M , tend, comme on sait, vers une position limite bien déterminée, à savoir la tangente asymptotique MT , autre que D , issue de M dans le plan tangent à S en ce point M . Comme toutes les droites MM' sont constamment sur une même quadrique q_1 , leurs positions limites sont aussi sur une même quadrique Q_1 .

On remarquera d'ailleurs qu'un plan quelconque

passant par M coupe S et q_1 suivant deux courbes ayant un contact simple en M et ayant un nouveau point commun μ' situé sur D' , voisin de M si D' est voisin de D . Donc les sections planes de S et Q_1 par un plan quelconque sont osculatrices au point où leur plan coupe D .

Q_1 est un hyperboloïde à une nappe, ou un parabolôïde. Si Q est un parabolôïde, le plan directeur mené par D coupe le plan de l'infini suivant une droite, autre que D , qui est génératrice de Q_1 , donc tangente (asymptotique) à S : le plan directeur du parabolôïde est donc le plan asymptote de S relatif à D . Si, quelle que soit D , Q_1 est toujours un parabolôïde, la section de S par le plan de l'infini est enveloppe de tangentes asymptotiques, donc ligne asymptotique de S . N'oublions pas que les lignes asymptotiques se conservent dans une transformation homographique. Si une surface Σ , réglée ou non, admet une section plane comme ligne asymptotique particulière, ou bien cette section est une droite, ou bien la surface se raccorde avec le plan de la section tout le long de cette section. Or pour la surface S les plans asymptotes sont tous distincts du plan de l'infini pour les génératrices à distance finie, donc la première hypothèse est réalisée : les points à l'infini de S sont répartis sur une droite, autrement dit la surface admet un plan directeur.

Réciproquement, l'existence d'un plan directeur entraîne l'existence sur S d'une droite (non génératrice) à l'infini, laquelle est tangente asymptotique et appartient à chaque quadrique Q_1 : ces quadriques sont toutes des parabolôïdes. Il ne sera plus désormais question que d'une surface réglée S_0 à plan directeur, surface non cylindrique.

La recherche des lignes asymptotiques d'une telle surface, au lieu d'une équation de Riccati, ne dépend plus que d'une équation linéaire; il semblerait donc que nous devions effectuer deux quadratures pour les obtenir. En réalité il n'y en a qu'une à effectuer, car les génératrices de la surface appartiennent à un complexe linéaire : elles rencontrent en effet toutes la droite à l'infini du plan directeur. M. Picard a établi dès 1877 que, pour toute surface réglée dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, une quadrature unique est nécessaire pour obtenir les lignes asymptotiques : on trouvera la démonstration soit aux *Annales de l'École Normale* (1877) soit au tome I de l'Analyse de M. Picard ⁽¹⁾. Si L, L_1, L_2 sont trois asymptotiques particulières rencontrant une génératrice variable D en M, M_1, M_2 le rapport $\frac{MM_1}{MM_2}$ ou, si l'on préfère, $(M_1 M_2 M \infty)$, reste constant si D balaie S_0 . On peut écrire les équations paramétriques de la surface S_0 d'une façon particulière, de façon que la quadrature se trouve automatiquement effectuée : ceci se rattache aux travaux de M. Cartan sur les systèmes différentiels et à la notion de *classe* introduite par ce mathématicien. Donnons-nous arbitrairement une courbe L et une direction de plan Π arbitraire : en chaque point M de L , la génératrice D sera l'intersection

⁽¹⁾ Le raisonnement de M. Picard suppose que le complexe ne soit pas *spécial* : on peut construire *a priori*, par calculs algébriques ou différentiations, une courbe particulière, rencontrant chaque génératrice en *deux* points, et asymptotique particulière de la surface. Cette courbe représente donc en réalité *deux* asymptotiques et l'équation de Riccati s'intègre par une quadrature. Si le complexe devient spécial, la courbe se réduit à l'axe du complexe, qui doit être considéré comme représentant encore *deux* asymptotiques particulières confondues.

du plan osculateur et du plan parallèle à Π ; il est clair que L est une asymptotique particulière de la surface S_0 lieu de D . Le reste s'ensuit.

L'hypothèse (α) peut aussi se résoudre géométriquement. Si *une* génératrice D donne un paraboloidé P *équilatère*, on peut remarquer que S et P ont même point central (même si P n'est pas équilatère), et que ce point central C s'obtiendra dans le cas présent en prenant la génératrice de P perpendiculaire au plan directeur de S_0 ; cette génératrice est tangente asymptotique pour S_0 . Si *toutes* les génératrices D donnent un paraboloidé équilatère, C décrit la ligne de striction : cette ligne se trouve courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction Δ normale au plan directeur : mais Δ étant toujours direction asymptotique, la tangente à la courbe lieu de C est toujours parallèle à Δ , donc la ligne de striction est une droite perpendiculaire au plan directeur; S_0 est un conoïde droit; la réciproque est évidente, car l'axe est génératrice de chaque paraboloidé.

Un calcul simple, guidé par un peu de géométrie, retrouve ces résultats aisément. Soient les équations

$$(S) \quad X = x + av, \quad Y = y + bv, \quad Z = z + cv,$$

où x, y, z, a, b, c dépendent du paramètre u .

Nous calculons aisément

$$(1) \quad \begin{cases} D \equiv |x' a x''| + v \{ |x' a a''| + |a' a x''| \} \\ \quad \quad \quad + v^2 |a' a a''|, \\ D' \equiv |x' a a'|, \quad D'' \equiv 0; \end{cases}$$

D' est supposé non nul identiquement; l'équation des asymptotiques est donc

$$(2) \quad \frac{dv}{du} = \Delta + v \Delta_1 + v^2 \Delta_2,$$

où $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ ne dépendent que de u . La tangente asymptotique au point (u, v) a pour équations

$$(3) \quad \begin{aligned} & \frac{X - x - av}{x' + a'v + (\Delta + v\Delta_1 + v^2\Delta_2)a} \\ &= \frac{Y - y - bv}{y' + b'v + (\Delta + v\Delta_1 + v^2\Delta_2)b} \\ &= \frac{Z - z - cv}{z' + c'v + (\Delta + v\Delta_1 + v^2\Delta_2)c} \end{aligned}$$

u constant et v variant seul, les dénominateurs des rapports égaux (3) sont des trinomes du second degré en v si $\Delta_2 \neq 0$; donc les parallèles aux diverses tangentes, menées d'un point fixe, engendrent un cône du second degré; sur ce cône, quatre génératrices ont pour rapport anharmonique celui des quatre v correspondants. Sur la droite D les quatre points M ont aussi pour rapport anharmonique celui des quatre v , et de plus, si v augmente indéfiniment, la génératrice correspondant au point M tend à devenir parallèle à D : on en déduit que les tangentes MT décrivent un hyperboloïde à une nappe. Si $\Delta_2 \equiv 0$, les dénominateurs se réduisent au premier degré, les droites MT sont toutes parallèles à un même plan, et pour les mêmes raisons que plus haut, déduites des rapports anharmoniques, elles engendrent un parabolôïde P . Or $\Delta_2 \equiv 0$ revient à $[a' a'' a'''] \equiv 0$, ce qui exprime que les droites D restent parallèles à un même plan.

Pour une surface S_0 on peut donc écrire

$$S_0 \quad \begin{cases} X = v, \\ Y = u + mv, \\ Z = z. \end{cases} \quad m, z \text{ fonctions de } u,$$

L'équation des asymptotiques

$$(4) \quad \frac{dv}{du} = \frac{z''}{2m'z'} + \frac{v}{2} \left(\frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'} \right)$$

s'intègre en écrivant

$$(5) \quad C = \int \frac{z'' du}{2\sqrt{m' z^3}} \quad v = C \sqrt{\frac{z'}{m'}}$$

On peut écrire les équations de la tangente **MT** asymptotique

$$(6) \quad \frac{X-x}{\frac{dv}{du}} = \frac{Y-u-mX}{1+m'v} = \frac{Z-z}{z'}$$

où $\frac{dv}{du}$ a pour valeur (4).

L'équation du parabolôide **P** est

$$(7) \quad \frac{(Y-u-mX)z'-(Z-z)}{Xz' - \frac{Zz''}{2m'z'}} = \frac{m'(Z-z)}{\frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'}\right)(Z-z) + z'}$$

L'un des plans directeurs est horizontal, l'autre a pour équation

$$(8) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'}\right)[(Y-mX)z' - Z] = m'z'X - \frac{Zz''}{2z'}$$

2. L'hypothèse (a) donne $m'' = 0$, d'où $m = A + B'u$, **A** et **B** étant constants et $B \neq 0$. Les équations

$$(9) \quad X = v, \quad Y = u + (A + Bu)v, \quad Z = z$$

montrent que pour $v = -\frac{1}{B}$ on obtient $X = -\frac{1}{B}$, $Y = -\frac{A}{B}$ qui est donc l'axe du conoïde droit obtenu. La quadrature (5) est immédiate.

Pour l'hypothèse (b), on peut, sans particulariser, supposer l'axe de **P**, déjà horizontal, parallèle à Oy . On a donc

$$(10) \quad \frac{z''}{z'} - \frac{m''}{m'} = 0, \quad z = Km + K_1,$$

où K et K_1 sont constants. On a la surface

$$(11) \quad \begin{cases} X = v, \\ Y = u + m v, \\ Z = K m, \end{cases}$$

obtenue en supprimant K_1 , ce qui revient à un simple glissement le long de Oz . La résolution en u et m de (11) donne

$$(12) \quad u = Y - \frac{XZ}{K}, \quad m = \frac{Z}{K}.$$

L'équation de la surface est donc

$$(13) \quad Y = aZX + f(aZ),$$

où a est une constante arbitraire et f une fonction arbitraire. La quadrature (5) s'obtient encore immédiatement. On a une construction géométrique très simple de la surface (13), obtenue en considérant dans le plan xOy la droite à un paramètre

$$y = \mu x + f(\mu).$$

On trace dans le plan xOy une courbe arbitraire et on imprime à chaque tangente une translation parallèle à Oz , proportionnelle à la pente de cette tangente. La courbe et la surface obtenues sont simultanément soit transcendentes, soit algébriques, soit unicursales. Cette construction géométrique montre qu'il n'y a pas de surface réglée non développable satisfaisant simultanément aux deux hypothèses (a), (b) (1). Mais on peut obtenir dans l'hypothèse (b) une surface qui soit un conoïde oblique : il suffit que les tangentes transportées

(1) Ou plutôt si la courbe du plan xOy , étudiée au point de vue *tangentiel*, se réduit à un point, la surface S_0 correspondante est un paraboloides *équilatère*. Mais c'est une solution banale, tout comme le paraboloides *non équilatère* trouvé aussitôt après.

rencontrent toutes une droite dont on prendra les équations sous la forme

$$Y = \lambda X, \quad Z = \mu X.$$

Mais on ne trouve qu'une solution banale, à savoir un parabolôïde hyperbolique non équilatère : *a priori* il est bien évident que toute génératrice D du parabolôïde fait constamment retrouver comme parabolôïde P associé la surface elle-même.

3. Pour traiter aisément les dernières parties, il suffit d'employer la méthode indiquée plus haut. La courbe L est le lieu du point (x, y, z) ; nous utilisons le trièdre de Serret-Frenet (a, a', a'') , (b, b', b'') , (c, c', c'') avec les relations bien connues entre les cosinus, le rayon de courbure R et le rayon de torsion T de la courbe.

La surface S_0 , à plan directeur horizontal,

$$(14) \quad X = x + c'\rho, \quad Y = y - c\rho, \quad Z = z,$$

admet L pour asymptotique particulière. La matrice

$$(15) \quad \left\| \begin{array}{ccc} a + \frac{b'\rho}{T} & a' - \frac{b\rho}{T} & a'' \\ c' & -c & 0 \end{array} \right\|$$

fournit le dS^2 de la surface,

$$(16) \quad dS^2 = \left[1 + \frac{2c''\rho}{T} + (b^2 + b'^2) \frac{\rho^2}{T^2} \right] ds^2 \\ - 2b'' \left(1 + c'' \frac{\rho}{T} \right) ds d\rho + (c^2 + c'^2) d\rho^2$$

les paramètres directeurs de la normale, mineurs de (15),

$$(17) \quad \xi = a'' c, \quad \eta = a'' c', \quad \zeta = a'' \left(c'' + \frac{\rho}{T} \right).$$

On a

$$(18) \quad D \equiv -\alpha''^2 \rho \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{T} \right), \quad D' \equiv -\alpha''^2 \frac{1}{T}, \quad D'' \equiv 0.$$

L'équation des asymptotiques

$$(19) \quad \frac{\rho}{T} \frac{dT}{ds} - 2 \frac{d\rho}{ds} = 0$$

donne

$$(20) \quad \rho = K \sqrt{T} \quad (1),$$

où K est une constante arbitraire; L s'obtient pour $K = 0$.

D'après Enneper, $\pm \sqrt{-R_1 R_2}$, où R_1 et R_2 sont les rayons principaux de S_0 , doit donner la torsion de l'asymptotique générale. D'après Gauss

$$R_1 R_2 = \frac{(EG - F^2)^2}{DD'' - D'^2},$$

et ici

$$\pm \sqrt{-R_1 R_2} = \pm \frac{EG - F^2}{D'} = \pm \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{D'}.$$

La torsion est donc

$$(21) \quad \pm \left(T + 2c'' \rho + \frac{\xi^2}{T} \right) = \pm (T + 2c'' K \sqrt{T} + K^2).$$

Or pour $K = 0$ on doit retrouver T , donc on doit prendre le signe $+$. Considérons donc les trois asymptotiques L , L_1 , L_2 obtenues pour $K = 0$, K_1 , K_2 . On a

$$(22) \quad \begin{cases} T_1 = T + 2c'' K_1 \sqrt{T} + K_1^2, \\ T_2 = T + 2c'' K_2 \sqrt{T} + K_2^2, \end{cases}$$

d'où la relation linéaire annoncée

$$(23) \quad (T_1 - T - K_1^2) K_2 - (T_2 - T - K_2^2) K_1 = 0.$$

(1) Si T est positif, on prend K réel; si T est négatif, on prend K imaginaire pur.

4. Si T est constant, T_1 ne peut être constant que si c'' est constant. L'indicatrice des torsions de L est un petit cercle, donc L est une hélice circulaire d'axe Oz et S_0 est la surface minima bien connue d'escalier, hélicoïde gauche à plan directeur. Les asymptotiques sont les trajectoires orthogonales des génératrices.

5. On a

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{c^2 + c'^2}, \\ r_1 &= \rho \sqrt{c^2 + c'^2} = K \sqrt{T} \sin \theta.\end{aligned}$$

6. La tangente asymptotique MT a pour équations

$$(24) \quad \frac{X - x - c' \rho}{a + \left(b' + \frac{c'}{2} \frac{dT}{ds}\right) \frac{\rho}{T}} = \frac{Y - y + c \rho}{a' - \left(b + \frac{c}{2} \frac{dT}{ds}\right) \frac{\rho}{T}} = \frac{Z - z}{a''}.$$

La considération des dénominateurs montre que les paramètres directeurs α, β, γ de Δ doivent être pris de sorte que

$$\alpha = \lambda \left(b + \frac{c}{2} \frac{dT}{ds}\right), \quad \beta = \lambda \left(b' + \frac{c'}{2} \frac{dT}{ds}\right),$$

et alors on a aussitôt

$$\gamma = \lambda \left(b'' + \frac{c''}{2} \frac{dT}{ds}\right).$$

Mais alors Δ est située dans le plan déterminé par MK normale principale et MN normale à S_0 , c'est-à-dire binormale de L .

La droite $M\Delta$ contient le point qui dans ce plan a pour coordonnées

$$1, \quad \frac{1}{2} \frac{dT}{ds},$$

et il est bien clair que

$$(25) \quad \text{tang } \omega = \frac{1}{2} \frac{dT}{ds}.$$

Nota. — Je signalerai pour terminer une formule

générale relative aux surfaces réglées, formule signalée en particulier par M. Bianchi, et qui aurait pu servir, au lieu de celle d'Enneper, à calculer T_1 . Sur une surface réglée S *quelconque*, une génératrice D rencontre deux asymptotiques L et L_1 aux points M et M_1 , tels que $MM_1 = r_1$; soit φ l'angle des normales à S en MM_1 , c'est-à-dire l'angle des plans osculateurs en M et M_1 , on a

$$(26) \quad r_1 = \sin \varphi \sqrt{TT_1}.$$

Ici les normales ont pour cosinus respectifs

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} c, & c', & c'', \\ \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{2c''\rho}{T} + \frac{\rho^2}{T^2}}}, & \frac{c'}{\sqrt{\dots}}, & \frac{c'' + \frac{\rho}{T}}{\sqrt{\dots}}. \end{array} \right.$$

On a donc

$$r_1 = \rho \sqrt{c^2 + c'^2} \quad \sin \varphi = \frac{\rho \sqrt{c^2 + c'^2}}{T \sqrt{1 + \frac{2c''\rho}{T} + \frac{\rho}{T^2}}},$$

d'où l'on déduit la valeur de T_1 , donnée plus haut, en employant la formule (26) : cette fois on n'apas l'ambiguïté du signe. La formule (26) met de plus en évidence ce fait que toutes les asymptotiques curvilignes ont leur torsion de même signe; ce résultat découle aussi de la valeur (21) déjà trouvée.

Autre solution par M. CH. GUYON.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un cône homogène, de révolution, dont le sommet O est fixe, tourne uniformément autour*

de son axe, avec une vitesse angulaire ω_0 . Brusquement, une arête est immobilisée : quelle vitesse de rotation prend le solide autour de l'arête fixe? On désignera par α le demi-angle au sommet du cône.

II. Dans un plan vertical, une droite D se déplace en restant tangente à une courbe fixe C. La rotation de la droite (relativement à une direction invariable) est uniforme. Un point matériel M est assujéti à rester sur la droite D; les liaisons sont bilatérales et sans frottement. Étudier le mouvement relatif du point M sur la droite.

On formera l'équation différentielle du mouvement relatif dans le cas général d'une courbe plane quelconque C, et d'un point pesant M, n'ayant initialement pas de vitesse relative. On étudiera les cas suivants :

1^e La courbe C est un cercle et le point M n'est pas pesant.

2^e La courbe C est un cercle et le point M est pesant. Le mouvement relatif peut-il être pendulaire? Peut-il y avoir équilibre relatif? Le mouvement relatif peut-il s'effectuer dans un même sens?

3^e La courbe C étant quelconque, peut-il y avoir équilibre relatif?

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — On partira de l'équation naturelle, $R = f(x)$, de la courbe C, et l'on appliquera la méthode de Lagrange. Dans le 3^e, on obtiendra l'équation naturelle de C, et, par deux quadratures, les expressions paramétriques des coordonnées d'un point, en termes finis.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Construire le noyau d'une plaque homogène, demi-circulaire. (On déterminera par le calcul les centres de percussion associés à diverses tangentes du contour de la plaque.)

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — Application immédiate du cours. Le noyau est limité par un triangle mixtiligne : deux segments de droite et un arc d'ellipse.

(Montpellier, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une barre homogène pesante de

masse m , de longueur l est suspendue par son milieu O et s'appuie sur un plan horizontal P passant par le point O .

Un anneau pesant de même masse m coulisse librement sur la barre.

A l'instant initial l'ensemble tourne autour de la verticale Oz avec une vitesse angulaire ω , l'anneau est à une distance a du point O et glisse sur la barre avec une vitesse relative $\alpha\omega$.

1° Calculer le couple variable d'axe Oz qu'il faut appliquer à la barre pour maintenir la vitesse angulaire ω . Quelle est la trajectoire de l'anneau sur le plan P .

2° Les seules forces appliquées étant les poids, étudier le mouvement, indiquer l'allure de la rotation et la forme de la trajectoire de l'anneau.

3° On supprime le plan P d'appui et l'on demande de reprendre la deuxième partie.

On néglige les frottements.

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — 1° Le couple cherché est

$$\Gamma = 2m\omega x x',$$

x étant la distance de l'anneau au point O . Le mouvement relatif de l'anneau par rapport à la barre est donné par

$$x'' = \omega^2 x,$$

d'où

$$x = a \operatorname{ch} \omega t + \alpha \operatorname{sh} \omega t;$$

l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires est donc

$$\rho = a \operatorname{ch} \theta + \alpha \operatorname{sh} \theta.$$

Le couple est connu en fonction du temps.

2° Le théorème des moments et celui de la force vive donnent

$$(k^2 + x^2) \frac{d\theta}{dt} = (k^2 + a^2)\omega,$$

$$(k^2 + x^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (k^2 + a^2 + \alpha^2) \omega^2.$$

Le mouvement de l'anneau est défini par l'équation

$$\frac{dx}{d\theta} = \pm (k^2 + x^2) \sqrt{\frac{k^2 + a^2 + x^2}{(k^2 + a^2)^2} - \frac{1}{k^2 + x^2}},$$

la valeur initiale de $\frac{dx}{d\theta}$ étant α ; la discussion ne présente pas de difficultés. La première des équations écrites montre que la vitesse de rotation conserve un signe constant et indique ses variations avec x .

3° Le mouvement est à trois paramètres x , θ et l'angle φ de la barre avec la verticale ascendante. On a toujours deux équations par les forces vives et les moments :

$$\begin{aligned} (k^2 + x^2) \left[\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \\ = (k^2 + a^2 + x^2) \omega^2 - 2gx \cos \varphi, \\ (k^2 + x^2) \sin^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} = (k^2 + a^2) \omega. \end{aligned}$$

Une troisième équation (équation de Lagrange relative à x ou équation du mouvement relatif de l'anneau) sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x \left[\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \sin^2 \varphi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + g \cos \varphi = 0.$$

L'étude détaillée du mouvement serait assez délicate. On pourra remarquer que, d'après la première équation, l'anneau doit rester au-dessous du plan

$$z = \frac{k^2 + a^2 + x^2}{2g} \omega^2,$$

et que la rotation de la barre a lieu toujours dans le même sens.

(Nancy, juin 1920.)



[A 5a]

SUR L'INDICE DES FRACTIONS RATIONNELLES ;

PAR M. RABATEL,

Professeur au Prytanée militaire de La Flèche.

Étant donnés deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$, on peut leur associer une forme quadratique dont la « signature », c'est-à-dire la différence entre le nombre de ses carrés positifs et le nombre de ses carrés négatifs est égale à l'indice de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{g(x)}$. Ce théorème, établi par Hurwitz (¹), est la généralisation d'un théorème d'Hermite (²) pour le cas particulier de la fraction rationnelle $\frac{f'}{f}$.

Je me propose de donner une nouvelle démonstration de ce théorème et de montrer que la forme quadratique associée à f et g est liée d'une façon simple au résultant de Bezout de ces deux polynomes.

Soient

$$\begin{aligned} f &= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n, \\ g &= B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n, \end{aligned}$$

et supposons d'abord les degrés égaux.

(¹) *Math. Ann.*, Bd 46.

(²) Voir, par exemple, SERRET, *Algèbre I*.

Posons

$$f_0 = A_0, \quad f_1 = A_0 x + A_1, \quad f_2 = A_0 x^2 + A_1 x + A_2, \quad \dots, \\ g_0 = B_0, \quad g_1 = B_0 x + B_1, \quad g_2 = B_0 x^2 + \dots$$

$$F_1 \equiv f g_0 - g f_0 = A_{11} x^{n-1} + A_{12} x^{n-2} + \dots + A_{1n}, \\ F_2 \equiv f g_1 - g f_1 = A_{21} x^{n-1} + \dots + A_{2n}, \\ \dots \\ F_n \equiv f g_{n-1} - g f_{n-1} = A_{n1} x^{n-1} + \dots + A_{nn}.$$

On a

$$A_{ik} = A_{ki},$$

et le résultant de Bezout de f et g est

$$B = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Appelons forme quadratique *associée* à f et g la forme

$$T = \Sigma A_{ik} x_i x_k.$$

Ceci posé, on sait que pour calculer l'indice $\frac{f}{g}$ on est conduit à faire sur g et f les opérations de recherche du plus grand commun diviseur en changeant le signe du reste (1) :

$$g = f Q_1 - R_1, \\ f = R_1 Q_2 - R_2, \\ \dots \\ R_{k-2} = R_{k-1} Q_k - R_k,$$

ou

$$R_1 = f Q_1 - g, \\ R_2 = R_1 Q_2 - f, \\ \dots \\ R_k = R_{k-1} Q_k - R_{k-2},$$

(1) CAUCHY, *Calcul des Indices* (Œuvres complètes).

ce qui donne

$$R_k = U_k f + V_k g,$$

R_k de degré $n - k$, U_k et V_k de degré $k - 1$.

L'indice de $\frac{f}{g}$ est égal au nombre de variations perdues par la suite

$$g, f, R_1, R_2, \dots, R_n$$

quand on y remplace successivement x par $-\infty$ et $+\infty$.

Calcul de R_k . — F_1, F_2, \dots, F_n étant indépendants, on a

$$\begin{aligned} R_k &= \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_n F_n \\ &= f(\lambda_1 g_0 + \dots + \lambda_n g_{n-1}) \\ &\quad - g(\lambda_1 f_0 + \dots + \lambda_n f_{n-1}), \end{aligned}$$

et, comme U_k est de degré $k - 1$,

$$\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

En exprimant que R_k est de degré $n - k$, on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_{12} + \dots + \lambda_k A_{k1} &= 0, \\ \dots & \\ \lambda_1 A_{1k-1} + \dots + \lambda_k A_{kk-1} &= 0. \end{aligned}$$

qui, joint à

$$\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_k F_k = R_k,$$

donne, par élimination des λ et simplification,

$$R_k = \mu_k \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k-1} & A_{1k} x^{n-k} + \dots + A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk-1} & A_{kk} x^{n-k} + \dots + A_{kn} \end{vmatrix},$$

μ_k étant un facteur à déterminer.

De même, on a

$$\lambda_1 g_0 + \dots + \lambda_k g_{k-1} = U_k$$

et

$$U_k = \mu_k \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1k-1} g_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & \dots & A_{kk} g_{k-1} \end{vmatrix},$$

μ_k étant le même coefficient.

Calcul de μ_k . — Désignons par R'_k , U'_k , Q'_k , le coefficient de la plus haute puissance de x dans R_k , U_k , Q_k , nous déduisons de

$$R_{k-1} = R_k Q_{k+1} - R_{k+1},$$

eu égard aux degrés,

$$R'_{k-1} = R'_k Q'_{k+1}$$

et de même de

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= R_k Q_{k+1} - R_{k-1} \\ &= (U_k f + V_k g) Q_{k+1} - (U_{k-1} f + V_{k-1} g) \\ &= (U_k Q_{k+1} - U_{k-1}) f + (\dots) g, \\ U_{k+1} &= U_k Q_{k+1} - U_{k-1}, \end{aligned}$$

et

$$U'_{k+1} = U'_k Q'_{k+1}.$$

En éliminant Q'_{k+1} , on obtient

$$U'_{k+1} R'_k = U'_k R'_{k-1} = \dots = U'_2 R'_1 = B_0.$$

En appelant Δ_k le mineur du déterminant de Bezout formé avec les k premières lignes et les k premières colonnes, on a

$$\begin{aligned} R'_k &= \mu_k \Delta_k, \\ U'_k &= \mu_k B_0 \Delta_{k-1} \end{aligned}$$

et

$$\mu_k \mu_{k+1} = \frac{1}{\Delta_k^2} > 0.$$

Tous les μ sont donc de même signe et comme

$$\mu_1 = \frac{1}{\Lambda_0}$$

ils sont du signe de Λ_0 (1).

Nous avons donc à considérer la suite

$$B_0 x^n, \quad A_0 x^n, \quad \Lambda_0 \Delta_1 x^{n-1}, \quad \Lambda_0 \Delta_2 x^{n-2}, \quad \dots, \quad \Lambda_0 \Delta_n$$

ou

$$x^n, \quad \Delta_1 x^{n-1}, \quad \Delta_2 x^{n-2}, \quad \dots, \quad \Delta_n.$$

Si l'on se reporte à l'étude des formes quadratiques(2) on voit que l'indice de $\frac{f}{g}$ est égal à la signature de la forme quadratique T.

En particulier, les conditions pour que l'indice soit égal à n ou que T soit définie positive sont

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Supposons maintenant que le degré de f soit $n - p$, il suffit dans les calculs précédents de supposer

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \dots = \Lambda_{p-1} = 0$$

et poser

$$f = A_p x^{n-p} + \dots + A_n.$$

Le résultat subsiste par raison de continuité. On peut prendre en effet A_0, \dots, A_{p-1} suffisamment petits pour que toutes les racines de f nouvellement introduites soient supérieures aux racines de g et que le signe de f au voisinage d'une racine de g ne soit pas

(1) La valeur de μ_k n'est pas nécessaire pour la suite. Le calcul donne

$$\mu_{2k} = A_0 \frac{\Delta_2^2 k, \quad \Delta_2^2 k-4 \quad \dots \quad \Delta_2^2}{\Delta_2^2 k-1 \quad \dots \quad \Delta_1^2},$$

$$\mu_{2k+1} = \frac{1}{A_0} \frac{\Delta_2^2 k-1 \quad \dots \quad \Delta_1^2}{\Delta_2^2 k \quad \dots \quad \Delta_2^2}.$$

(2) SERRET, *Algèbre*, I.

changé. L'indice sera le même et quand A_0, \dots, A_{p-1} tendent vers zéro ces racines s'éloignent à l'infini et aucun carré ne s'évanouit.

Si le degré de f est égal à $n + p$, on peut ramener le problème au cas précédent en remplaçant f par le reste de la division de f par g . Si p est pair, l'indice de $\frac{f}{g}$ est égal à la signature de la forme quadratique à $n + p$ variables associée à f et g , mais si p est impair elle en diffère d'une unité (1).

[D1bζ]

**RÉSUMÉ DES PRINCIPALES PROPRIÉTÉS
DES POLYNOMES ORTHOGONAUX (*)**

PAR N. ABRAMESCO.

Les solutions de quelques anciennes questions non

(1) On a, en effet,

$$\begin{aligned} I\left(\frac{f}{g}\right) + I\left(\frac{g}{f}\right) &= \varepsilon, & I\left(\frac{f}{g}\right) &= \text{indice de } \frac{f}{g}, \\ S\left(\frac{f}{g}\right) + S\left(\frac{g}{f}\right) &= 0, & S\left(\frac{f}{g}\right) &= \begin{cases} \text{signature de la forme} \\ \text{quadratique } f.g. \end{cases} \\ S\left(\frac{g}{f}\right) &= I\left(\frac{g}{f}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$-I\left(\frac{f}{g}\right) = S\left(\frac{f}{g}\right) + \varepsilon;$$

or, ε est égal à 0 ou à ± 1 . Il est égal à 0 si $\frac{f}{g}$ a le même signe aux deux limites de l'intervalle $-\infty, +\infty$.

Ce signe est celui de $(-1)^p k$, k étant le rapport des coefficients des termes de plus haut degré de f et g pour $x = -\infty$, de k pour $x = \infty$.

il faut donc, pour que $\varepsilon = 0$, que $(-1)^p > 0$: p pair.

(*) Voir pour la bibliographie : (1) *Encyclopédie des Sciences*

résolues des *Nouvelles Annales de Mathématiques* étant liées avec la théorie des polynomes orthogonaux, et comme ces polynomes ont une grande importance dans la représentation des fonctions par des séries de

mathématiques, t. II, vol. V, fasc. 2; P. APPELL et A. LAMBERT, *Généralisations diverses des fonctions sphériques*.

(²) CHRISTOFFEL, *Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1877, p. 1-10).

(³) HEINE, *Handbuch der Kugelfunktionen* (2^e édition, Berlin, 1878).

(⁴) DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878, p. 411).

(⁵) STIELTJES, *Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1884, p. 409).

(⁶) PICARD, *Cours d'Analyse supérieure* fait à la Sorbonne en 1912, 1918.

(⁷) KAMPÉ DE FÉRIET, *Thèse*, 1915.

(⁸) A. ANGELESCO, *Sur les polynomes généralisant les polynomes de Legendre et Hermite* (*Thèse*, 1916).

(⁹) SZEGÖ, *A Hankel-féle formákról* (Les formes de Hankel) (*Mathematikai és Természettudományi értesítő*, 1918, p. 497).

(¹⁰) N. ABRAMESCO, *Sulle serie di polinomi di una variabile complessa* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 1922, p. 497).

(¹¹) N. ABRAMESCO, *Sur les séries de polynomes à une variable complexe* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1922, p. 77).

(¹²) SZEGÖ, *Ueber die Entwicklung einer analytischen Function nach den Polynomen eines orthogonalsystem* (*Mathematische Annalen*, Bd 82, p. 188).

(¹³) POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, vol. VII, 1885).

(¹⁴) C. POSSÉ, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, Saint-Petersbourg, 1886.

(¹⁵) A. ANGELESCO, *Sur les quadratures mécaniques* (*Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine*, vol. VI 1920, p. 81).

polynomes, nous croyons qu'il ne sera pas sans intérêt de faire un résumé de leurs principales propriétés qui ont déjà été décrites dans divers Mémoires.

1. Considérons une fonction $\varphi(x)$, positive et intégrable dans l'intervalle (a, b) . Les polynomes $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$, de degré égal à l'indice, qui vérifient les relations d'orthogonalité

$$(1) \quad \begin{cases} \int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0 & (m \neq n), \\ \int_a^b \varphi(x) P_n^2(x) dx = I_n = \text{const.}, \end{cases}$$

s'appellent *polynomes orthogonaux*.

La *propriété fondamentale* du polynome orthogonal

$$P_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + c_{n,0}$$

est de vérifier les égalités

$$\int_a^b \varphi(x) x^k P_n(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1),$$

ou

$$\begin{array}{l} c_{n,0}g_0 + c_{n,1}g_1 + \dots + c_{n,n}g_n = 0, \\ c_{n,0}g_1 + c_{n,1}g_2 + \dots + c_{n,n}g_{n+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c_{n,0}g_{n-1} + c_{n,1}g_n + \dots + c_{n,n}g_{2n-1} = 0, \end{array} \quad g_s = \int_a^b \varphi(x) x^s dx,$$

d'où l'on peut déduire des valeurs proportionnelles pour $c_{n,0}, \dots, c_{n,n}$.

2. Le polynome $P_n(x)$ est unique, bien déterminé, complètement défini à un facteur constant près, dont

la valeur est donnée par la seconde des relations (1),

$$\int_a^b \varphi(x) P_n^2(x) dx = I_n.$$

3. Le polynome $P_n(x)$ peut s'écrire

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

Prenant $c_{n,n} = 1$, on a (10)

$$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}, \quad F = (x-t)\varphi(t),$$

$$D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_a^b \varphi(t) t^s dt.$$

4. Le polynome $P_n(x)$ peut se mettre sous la forme (10)

$$P_n(x) = \frac{1}{(b-a)^n n!} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n \psi_n(x)],$$

$\psi_n(x)$ étant une fonction finie pour $x = a$, $x = b$.

5. L'équation $P_n(x) = 0$ a toutes ses racines (10) réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle (a, b) .

6. Supposons que $\psi_n(x)$ reste la même (10) pour tous les polynomes $P_n(x)$ et soit $\psi(x)$ sa valeur. $P_n(x)$ est le coefficient du x^n dans le développement en

série de t de l'expression $\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{dz}{dx}$, z étant la racine de l'équation

$$z = x + t \frac{(z-a)(z-b)}{b-a}, \quad z = x, \quad t = 0,$$

qui peut se développer avec la formule de Lagrange. Cette expression est une fonction génératrice pour les polynomes $P_n(x)$.

Cas particuliers : 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$;

$$z = x + \frac{t}{2}(z^2 - 1), \quad z = x, \quad t = 0; \quad z = \frac{1 - \sqrt{1 - 2tx + t^2}}{t},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum t^n P_n(x),$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

$$P_n(x) = \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{2^n n!} \times \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right],$$

et $P_n(x)$ est le polynome de Legendre.

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (1-x)^\lambda (1+x)^\mu$, $\lambda + 1 > 0$, $\mu + 1 > 0$, $a = -1$, $b = 1$;

$$z = x + \frac{t}{2}(1-z^2), \quad z = \frac{1}{t}(-1 + \sqrt{1 + 2tx + t^2}),$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2tx + t^2}},$$

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(x)} \frac{dz}{dx} = 2^{\lambda+\mu} (1+t + \sqrt{1 + 2tx + t^2})^{-\lambda} \times (1-t + \sqrt{1 + 2tx + t^2})^{-\mu} (1 + 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x)^{-\lambda} (1+x)^{-\mu} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\lambda+1} (1+x)^{\mu+1}],$$

$P_n(x)$ étant le polynome de Jacobi et l'on a, obser-

vant (1),

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\lambda} (1+\mu)^{\mu} P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (m \leq n).$$

7. Si $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^{\lambda} (x-b)^{\mu}$, $\lambda+1 > 0$, $\mu+1 > 0$, le polynome $P_n(x)$ de Jacobi vérifie l'équation différentielle (10)

$$\begin{aligned} (x-a)(x-b) \frac{d^2 y}{dx^2} \\ + [(2+\lambda+\mu)x - a(\mu+1) - b(\lambda+1)] \frac{dy}{dx} \\ - n(n+1+\lambda+\mu)y = 0, \end{aligned}$$

dont l'autre solution est

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-a)^n n!} (x-a)^{-\lambda} (x-b)^{-\mu} \\ \times \int_a^b (t-a)^{n+\lambda} (t-b)^{n+\mu} (t-x)^{-n-1} dt. \end{aligned}$$

Cas particuliers : 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$; le polynome de Legendre $P_n(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

2° $\varphi(x) = \psi_n(x) = (x^2 - a^2)^l$, $l+1 > 0$; le polynome

$$(2) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (x^2 - a^2)^{-l} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - a^2)^{n+l}]$$

vérifie l'équation différentielle

$$(3) \quad (x^2 - a^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(1+l) \frac{dy}{dx} - n(n+1+2l)y = 0.$$

Comme application, considérons *le problème 1365* (*N. A.*, 1881, p. 381; 1917, p. 232) :

Démontrer que l'équation

$$(4) \quad x^{n-l} - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} \\ + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} - \dots = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre $-a$ et $+a$ (Escary).

En désignant $p = n - l$, le premier membre de cette équation est le polynôme

$$P_p = x^p - \frac{p(p-1)}{2(2p+2l-1)} a^2 x^{p-2} \\ + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2(2p+2l-1)(2p+2l-3)} a^4 x^{p-4} - \dots$$

qui vérifie l'équation différentielle (3) (où n est remplacé par p); donc on a

$$P_p = K(x^2 - a^2)^{-l} \frac{d^p}{dx^p} [(x^2 - a^2)^{p+l}] \quad (K = \text{const.}),$$

et donc (§ 5) l'équation proposée $P_p = 0$ a toutes ses racines réelles, distinctes et comprises dans l'intervalle $(-a, +a)$.

Une autre application est *le problème 1366* (*N. A.*, 1881, p. 381; 1917, p. 232) :

Démontrer que l'équation

$$(5) \quad x^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} a^2 x^{n-l-2} \\ + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2(2n-1)(2n-3)} a^4 x^{n-l-4} + \dots = 0$$

a toutes ses racines imaginaires, inégales et comprises dans l'intérieur d'un cercle de rayon égal à a (Escary).

Remplaçant dans cette équation x par ix , on obtient l'équation (4) qui a toutes ses racines réelles, distinctes, dans

l'intervalle $(-a, +a)$; donc l'équation (5) a toutes ses racines imaginaires, distinctes, de module plus petit que a , ou intérieures au cercle de rayon a .

Une dernière application est *le problème 1687* (*N. A.*, 1895, p. 33; 1917, p. 238) :

On sait que l'équation

$$(6) \quad \frac{d^n}{dx^n} [x^n(x-1)^n] = 0$$

peut s'écrire

$$(7) \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdot & \dots & \frac{1}{2n} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix} = 0.$$

démontrer que l'équation

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [x^n(x-1)^n] = 0$$

peut de même s'écrire

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2.3} & \frac{1}{3.4} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3.4} & \frac{1}{4.5} & \dots & \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \dots & \frac{1}{(2n+1)2n} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

De même l'équation

$$\frac{d^{2n-k}}{dx^{2n-k}} [x^n(x-1)^n] = 0$$

peut s'écrire

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\dots(2n-2k+1)} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(2n-k+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n(n+1)\dots(2n-k)} & \dots & \frac{1}{(n+k)(n+k+1)\dots 2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & x^k \end{array} \right| = 0.$$

(Lucien Lévy).

Le premier membre de l'équation (6) est le polynome de Legendre (§ 6, 1^o), où $a=0$, $b=1$; donc (§ 3) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} g & g_1 & \dots & g \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & g_n & \dots & g_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad g_s = \int_0^1 x^s dx = \frac{1}{s+1};$$

donc l'équation (6) a la forme (7). Dérivant le premier membre de (7), on trouve

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [x^n(x-1)^n] = K \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n} \\ 0 & 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \end{vmatrix} \quad (K = \text{const.}).$$

En retranchant des éléments de la ligne du rang n multipliés par n , les éléments de la ligne du rang $(n-1)$ multipliés par $(n-1)$; des éléments de la ligne du rang $(n-1)$ multipliés par $(n-1)$, les éléments de la ligne du rang $(n-2)$ multipliés par $(n-2)$, et ainsi de suite, en retranchant des éléments de la deuxième ligne multipliés par 2, les éléments

de la première ligne, on trouve

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [x^n (x-1)^n]$$

$$= K_1 \begin{vmatrix} \frac{1}{2 \cdot 3} & \frac{2}{3 \cdot 4} & \cdots & \frac{n}{(n+1)(n+2)} \\ \frac{1}{3 \cdot 4} & \frac{2}{4 \cdot 5} & \cdots & \frac{n}{(n+2)(n+3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n(n+1)} & \frac{2}{(n+1)(n+2)} & \cdots & \frac{n}{(2n-1)2n} \\ 1 & 2x & \dots & nx^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$K_1 = (\text{const.}),$$

et divisant les colonnes respectivement par 2, 3, ..., n, on obtient la forme (8).

Procédant de la même manière avec l'équation obtenue, on a, de proche en proche, la forme demandée pour la dernière équation.

8. Les polynômes orthogonaux $P_n(x)$ vérifient la relation de récurrence (10)

$$(9) \quad \frac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}} P_{n+1}(x) - (x - \alpha_n) P_n(x) + \frac{c_{n-1,n-1} I_n}{c_{n,n} I_{n-1}},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{I_n} \int_a^b \varphi(x) x P_n^2(x) dx, \quad \alpha_n = \frac{c_{n,n-1}}{c_{n,n}} - \frac{c_{n+1,n}}{c_{n+1,n+1}}.$$

Cas particuliers : 1° $\varphi(x) = \psi_n(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$; les polynômes de Legendre vérifient la relation

$$(n+1) P_{n+1} - x(2n+1) P_n + n P_{n-1} = 0.$$

$$2^\circ. \varphi(x) = \psi_n(x) = (x-a)^\lambda (x-b)^\mu;$$

$$I_n = \frac{(-1)^n c_{n,n}}{(b-a)^n} \int_b^a (x-a)^n (x-b)^n \varphi(x) dx.$$

Dans le cas des polynômes (4) qui naissent de la série

hypergéométrique,

$$P_n = \frac{1}{n!} x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\gamma-1} (1-x)^{n+\alpha-\gamma}],$$

on a

$$\begin{aligned} & \frac{(n+\alpha)(n+1)P_{n+1}}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha)} \\ & + \left[x - \frac{2n^2 + 2\alpha n + \alpha\gamma - \gamma}{(2n+\alpha-1)(2n+\alpha+1)} \right] P_n \\ & + \frac{(n+\gamma-1)(n+\alpha-\gamma)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha-1)} P_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

9. La limite ⁽¹¹⁾ du rapport $\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ pour $n \rightarrow \infty$ tend vers une racine de l'équation

$$\lambda^2 - \frac{4}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right) \lambda + 1 = 0,$$

déduite de la relation (9) qui est une relation de récurrence de Poincaré ⁽¹³⁾.

Les courbes de convergence des séries de Poincaré, $\Sigma a_n P_n(x)$, à une variable complexe, sont des ellipses de foyers a et b .

10. La limite de $\sqrt[n]{P_n(x)}$ pour $n \rightarrow \infty$ est ⁽⁹⁾

$$e^{\int_a^b \log(x-t) \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}},$$

d'où l'on déduit que les courbes de convergence des séries de Poincaré, $\Sigma a_n P_n(x)$, sont des ellipses de foyers a et b .

11. Les polynômes $P_n(x)$ sont les dénominateurs des réduites d'ordre n du développement de la fonc-

tion

$$\int_a^b \frac{\varphi(y)}{y-x} dy$$

en fraction continue ⁽¹⁴⁾.

12. Les polynomes $P_n(x)$ interviennent dans la théorie des quadratures mécaniques ⁽⁵⁾. La valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx$$

est ⁽¹⁵⁾

$$\int_a^b \varphi(x) P_{n-1}^2(x) dx \left[\sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{P'_n(x_i) P_{n-1}(x_i)} \right],$$

x_1, \dots, x_n étant les racines du polynome $P_n(x)$.

[P'6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

(Suite) ⁽¹⁾;

PAR E. LAINÉ.

9. Sophus Lie a indiqué ⁽²⁾ une représentation géométrique très propre à faire saisir le caractère exceptionnel de l'intégrale singulière. Considérons p comme une troisième coordonnée ponctuelle; pour fixer les idées, nous prendrons l'axe des p perpendiculaire au plan (x, y) supposé horizontal.

⁽¹⁾ Cf. *N. A.*, janvier 1924, p. 131.

⁽²⁾ Cf. *Op. cit.*, Kap. 6.

A tout élément (x, y, p) correspond ainsi un point de l'espace; à toute $m_1^0(x_0, y_0, p)$, la verticale du point (x_0, y_0) . A toute m_1^1 correspond une courbe et une seule, mais inversement à toute courbe de l'espace (x, y, p) ne correspond pas une m_1 . Les seules courbes auxquelles corresponde une m_1 sont celles qui vérifient l'équation de Pfaff

$$dy - p dx = 0;$$

nous les appellerons « courbes de Pfaff ». Toute verticale est donc une courbe de Pfaff.

A deux m_1 tangentes, *i. e.* ayant un élément commun, correspondent deux courbes de Pfaff ayant un point commun. Mais ces courbes ne sont pas en général tangentes en ce point; elles ne le seraient que si les m_1 considérées avaient deux éléments communs infiniment voisins, *i. e.* étaient osculatrices.

En un point d'une courbe de Pfaff la tangente est dans le plan de coefficients directeurs $(p, -1, 0)$, c'est-à-dire dans un plan vertical dont la trace sur le plan (x, y) est précisément la droite de coefficient angulaire p .

Donnons-nous un cylindre quelconque à génératrices verticales; il détermine dans le plan xy une m_1^1 , et comme à cette m_1^1 correspond une courbe de Pfaff et une seule, il en résulte que, sur tout cylindre à génératrices verticales, il existe, en dehors des génératrices, une courbe de Pfaff et une seule; nous l'appellerons la « caractéristique du cylindre ».

A l'équation différentielle

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0$$

correspond une surface S. D'ailleurs à chaque courbe de Pfaff tracée sur S correspond évidemment, par pro-

jection sur le plan (x, y) , une m_1 intégrale de l'équation (5) et inversement. Par exemple, si l'équation (5) ne dépend pas de p , la surface S est un cylindre à génératrices verticales, qui coupe le plan des (x, y) suivant la courbe (C) représentée alors par l'équation (5). Les génératrices sont des courbes de Pfaff auxquelles correspondent les m_1^0 intégrales ayant pour supports ponctuels les différents points de (C) (intégrale générale); d'autre part, à la caractéristique du cylindre correspond la m_1^1 ayant pour support ponctuel la courbe (C) elle-même (intégrale singulière).

Si nous prenons arbitrairement, dans le plan des x, y , une famille de courbes à un paramètre, ces courbes auront en général une enveloppe. L'équation différentielle dont elles donnent l'intégrale générale représente alors une surface S qui possède une propriété particulière. En effet, considérons un élément quelconque de l'enveloppe; cet élément appartient aussi à une autre courbe de la famille. Les deux courbes de Pfaff correspondantes auront un point commun M , mais ne seront pas en général, nous l'avons vu, tangentes en ce point. Les tangentes en M à ces deux courbes devant être dans un même plan vertical, le plan tangent en M à S est vertical. Ainsi le cylindre à génératrices verticales déterminé par l'enveloppe touche la surface S tout le long d'une courbe de Pfaff; autrement dit, la courbe de contact de S et du cylindre circonscrit à génératrices verticales est la caractéristique du cylindre.

Il est clair qu'une surface S prise au hasard ne possède pas cette propriété, puisque sur tout cylindre à génératrices verticales il existe une seule caractéristique. Il en résulte qu'une équation différentielle n'admet pas, en général, d'intégrale singulière.

On verrait sans difficulté que la courbe de contact

de S et du cylindre circonscrit à génératrices verticales, soit (Γ) , se projette sur le plan des (x, y) suivant la courbe lieu des points de rebroussement des courbes intégrales. Cette courbe (Γ) est définie par les équations

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0;$$

on en déduit, suivant un procédé connu, la condition qui exprime que l'équation (5) admet une intégrale singulière.

Si la courbe Γ est une verticale, il lui correspond une intégrale singulière m_1^0 . Pour qu'il y ait une intégrale singulière du type (c_0) , il suffit que toutes les courbes de Pfaff tracées sur la surface S aient un point commun.

9'. Le procédé employé au n° 7 pour intégrer l'équation différentielle

$$(5) \quad f(x, y, p) = 0$$

peut être généralisé. Au lieu de ramener cette équation à une forme immédiatement intégrable

$$Y = 0,$$

supposons qu'on lui ait appliqué une T. C. qui la ramène à la forme

$$(14) \quad F(X, Y, P) = 0;$$

si l'on sait intégrer l'équation (14), on saura, d'après ce qui a été dit au n° 6, intégrer également l'équation (5).

Tel est, sous sa forme la plus générale, le mode d'application de la théorie des T. C. au problème de l'intégration des équations différentielles du premier ordre.

Remarques. — I. Nous ne nous occupons dans cette Note que des transformations finies. La théorie des transformations infinitésimales nécessiterait des développements beaucoup plus longs (1).

II. Toute équation

$$(e_1) \quad f(x, y, p) = 0$$

peut se ramener par une T. C. à l'équation

$$(E) \quad Y = 0;$$

désignons par U cette T. C. La T. C. inverse U^{-1} conduit de (E) à (e_1) . Soit

$$(e_2) \quad \varphi(x, y, p) = 0$$

une autre équation quelconque; il existe une T. C., soit V, telle que V^{-1} conduise de (E) à (e_2) . Le résultat de deux T. C. successives étant encore une T. C., on a ainsi une T. C., UV^{-1} , qui permet de passer de (e_1) à (e_2) . Donc étant données deux équations différentielles quelconques du premier ordre, on peut toujours passer de l'une à l'autre par une T. C. convenablement choisie. Autrement dit, une équation différentielle du premier ordre n'a pas d'invariants par rapport au groupe des T. C.

10. Considérons une multiplicité m_1 du plan xy , et à chaque élément (x, y, p) associons une nouvelle variable r telle que, quand on se déplace sur m_1 , on ait

$$dp - r dx = 0.$$

(1) Cf. VIVANTI, *Leçons élémentaires de la théorie des groupes de transformations*. Cet Ouvrage est un résumé des travaux de Sophus Lie sur la théorie des groupes. — Cf. aussi GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, Chap. XIX.

On pourra alors définir la multiplicité m_1 par trois relations entre les variables x, y, p, r entraînant les équations

$$(15) \quad dy - p dx = 0, \quad dp - r dx = 0.$$

C'est le sens que nous donnerons désormais au mot « multiplicité ».

Revenons maintenant aux équations (6) qui définissent une T. C. Pour qu'à toute m_1 du plan (x, y) corresponde une M_1 du plan (X, Y) , il faut ajouter aux équations (6) une équation nouvelle qui sera

$$R = \frac{P_x + p P_y + r P_p}{X_x + p X_y + r X_p};$$

les équations (15) entraînent alors en effet

$$dP - R dX = 0.$$

Les équations

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = X(x, y, p), \quad Y = Y(x, y, p), \quad P = P(x, y, p), \\ R = \frac{P_x + p P_y + r P_p}{X_x + p X_y + r X_p}, \end{array} \right.$$

dont les trois premières ont pour conséquence

$$dy - p dx = 0,$$

définissent une T. C. prolongée.

Ceci posé, une équation telle que

$$(17) \quad F(x, y, p, r) = 0$$

peut évidemment être considérée comme une équation différentielle du second ordre; intégrer cette équation revient à chercher toutes les m_1 qui la vérifient.

Soit alors

$$(18) \quad U(x, y, a, b) = 0$$

une famille de ∞^2 courbes, représentant l'intégrale générale de (17). Donnons à la constante arbitraire a , dans l'équation (18), une valeur particulière a_0 ; l'équation

$$U(x, y, a_0, b) = 0$$

représente ∞^1 courbes intégrales, qui forment l'intégrale générale d'une équation différentielle

$$X(x, y, p) = a_0.$$

De même l'équation obtenue en donnant à b , dans l'équation (18), une valeur particulière b_0

$$U(x, y, a, b_0) = 0,$$

représente ∞^1 courbes intégrales, qui forment l'intégrale générale d'une équation différentielle

$$Y(x, y, p) = b_0.$$

En résumé, sur une m_1 intégrale quelconque de (17), on a à la fois

$$X(x, y, p) = a, \quad Y(x, y, p) = b.$$

Ces deux équations devant définir une m_1 , quelles que soient les constantes a et b , il en résulte (n° 2) que les fonctions X et Y sont en involution.

On appelle intégrale intermédiaire de (17) toute fonction $\Phi(x, y, p)$ telle que toute intégrale de (17) vérifie l'équation

$$\Phi(x, y, p) = \text{const.}$$

et réciproquement. X et Y sont donc des intégrales intermédiaires, et l'intégrale intermédiaire la plus géné-

rale s'écrit

$$\Phi(x, y, p) \equiv F(XY),$$

F désignant une fonction arbitraire.

Géométriquement, on voit que l'équation différentielle (17) définit ∞^2 courbes intégrales, que l'on peut, d'une infinité de manières, grouper de façon à obtenir ∞^1 familles à un paramètre. A chacun de ces groupements correspond une intégrale intermédiaire.

Soit $\Phi(x, y, p)$ une intégrale intermédiaire quelconque. Il faut noter qu'en général les intégrales singulières, s'il en existe, des équations différentielles

$$\Phi(x, y, p) = \text{const.}$$

ne seront pas des intégrales de l'équation (17). En effet, soient

$$(19) \quad x = \theta_1(\lambda), \quad y = \theta_2(\lambda)$$

les équations paramétriques d'une courbe (C) arbitraire. On peut toujours déterminer $\varphi(a)$ de telle sorte qu'en remplaçant b par $\varphi(a)$ dans l'équation (18), la famille à un paramètre

$$U[x, y, a, \varphi(a)] = 0$$

ait précisément pour enveloppe la courbe (C) : il suffit pour cela que les équations

$$U[x, y, a, \varphi(a)] = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial b} \varphi'(a) = 0$$

soient identiquement vérifiées quand on y remplace x et y par leurs valeurs (19). On en déduit, par un raisonnement classique, que φ est déterminé par l'élimination de λ entre les équations

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} = 0,$$

où l'on a posé

$$V = U[\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \alpha, \varphi(\alpha)].$$

Mais la famille considérée est évidemment l'intégrale générale de l'équation

$$Y - \varphi(X) = 0;$$

l'intégrale singulière de cette équation, qui n'est autre que la courbe arbitraire (C), ne sera évidemment pas, en général, une intégrale de (17).

Considérons maintenant l'équation (17) mise sous la forme

$$(20) \quad r = \varpi(x, y, p).$$

Toute intégrale de l'équation homogène

$$(21) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial y} + \varpi(x, y, p) \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

est, comme on le voit sans difficulté, une intégrale intermédiaire de l'équation (20). Par conséquent si l'on prend pour la fonction P une intégrale quelconque de (21), la T. C. prolongée définie par les équations (16) ramène l'équation (21) à la forme

$$(22) \quad R = 0.$$

L'équation (22) a pour intégrale générale la famille de droites

$$Y = aX + b.$$

En éliminant p entre les équations

$$Y(x, y, p) - aX(x, y, p) = b, \quad P(x, y, p) = a,$$

on aura l'intégrale générale de l'équation (17).

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE.

COURS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES, à l'usage des étudiants en Sciences naturelles, par *G. Verriest*. Première Partie : calcul différentiel et géométrie analytique à deux dimensions. 1 vol. 25×16 de 338 pages. Louvain, éditions Universitas. Paris, Gauthier-Villars, 1923. Prix : 38^{fr}.

M. Verriest publie le Cours qu'il professe, à l'Université de Louvain, pour les étudiants préparant le *Doctorat spécial de Chimie pure et appliquée*. Son livre intéressera un public beaucoup plus étendu : étudiants en Sciences expérimentales, élèves d'Écoles techniques, bref tous ceux qui, pour d'autres études, ont besoin de notions de Mathématiques supérieures. Autant qu'on en peut juger par le premier volume, le programme développé correspond à peu près à celui de notre Certificat de Mathématiques générales.

L'auteur a fait appel, quand c'était utile, à l'intuition géométrique. Mais il s'est gardé de l'imprécision et, lorsqu'il étudie des questions un peu délicates, son exposé comporte toute la rigueur désirable. Les pages qu'il consacre, dans le cours du livre, aux divers aspects de la notion de différentielle, sont particulièrement bien venues à cet égard.

Chaque Chapitre contient beaucoup d'exercices, avec indication des solutions. De plus, un certain nombre d'applications viennent illustrer les théories développées. Citons, entre autres, la formule de Kirchoff établie après l'étude de la différentielle, les calculs d'aberrations donnés en application de la formule de Maclaurin (un peu longs, ces calculs) et, après l'étude des indéterminations, les quelques pages consacrées au galvanomètre balistique.

Il y a grand intérêt à varier ainsi les applications et à ne pas se borner, comme trop souvent, aux seules « applications » géométriques. C'est indispensable, pensons-nous, pour faire

comprendre à l'élève toute la portée des méthodes et pour l'assurer dans le maniement de l'outil mathématique. Et ce n'est sûrement pas empiéter sur un autre enseignement — dont la tenue mathématique peut être négligée et où, en tout cas, des difficultés d'un autre ordre sollicitent l'attention de l'étudiant — que d'exposer, par exemple, après l'étude de la différentielle totale, les quelques relations mathématiques qui sont à la base de la Thermodynamique.

Il faut souhaiter voir bientôt paraître le second volume d'un Cours qui, excellent à tous égards, n'est pas sans originalité et sera très apprécié.

J. P.

LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES EN MATHÉMATIQUES SPÉCIALES,
par *T. Lemoine*. 1 vol. 25 × 16 de 146 pages, avec
9 figures hors texte. Paris, Vuibert, 1923. Prix : 10^{fr.}

Il existe une branche de la Géométrie très négligée en France : c'est la *Géométrie énumérative* (*abzählende Geometrie*), qui a pour objet de calculer le nombre des figures de nature donnée satisfaisant à certaines conditions qui suffisent à les déterminer. Combien d'entre nous savent établir qu'il existe dans l'espace 92 coniques coupant 8 droites données et 666841088 quadriques touchant 9 quadriques données ? Et pourtant les premiers travaux sur les sujets de cet ordre sont ceux de Chasles, géomètre français. C'est en 1864 qu'il a donné sa théorie des caractéristiques des systèmes de coniques, qui ouvrait la Géométrie énumérative.

M. Lemoine a spécialement consacré son Livre à la théorie dont il s'agit. Il se borne à la Géométrie plane.

On appelle *caractéristiques* (μ, ν) d'un système de coniques, dépendant d'un paramètre, le nombre μ des coniques du système qui passent par un point donné et le nombre ν de celles qui touchent une droite donnée. Chasles avait cru que le nombre des coniques du système qui satisfont à une condition donnée quelconque est *toujours* de la forme $a\mu + b\nu$, a et b étant des entiers. Dans un Mémoire célèbre, Halphen a montré que ce n'est pas exact, et a rectifié l'énoncé de Chasles.

M. Lemoine expose les fondements de la théorie, d'après Chasles, aux théorèmes de qui il en ajoute plusieurs qui lui sont propres, puis il l'applique à de nombreux problèmes, qui

concernent des lieux de pôles, de centres, de foyers, etc. et des enveloppes d'axes, de directrices, etc. Il n'y a pas moins de 1376 théorèmes énoncés, donnés en général sans démonstration, comme applications de théorèmes généraux établis en tête des diverses sections entre lesquelles sont répartis ces exercices. Peut-être certains préféreraient-ils que l'auteur eût restreint le nombre des applications, pour développer un peu plus longuement la théorie. Mais peut-être aussi méconnaîtraient-ils le but poursuivi, qui est de montrer combien peut être vaste le champ d'application de principes fort simples. Chacun est libre de s'attacher aux énoncés qui le séduisent.

Quoi qu'il en soit, le Livre, fort attrayant en lui-même, en fait espérer un plus complet sur la Géométrie énumérative. M. Lemoyne paraît tout désigné pour l'écrire, et il apporterait ainsi une belle contribution à notre littérature scientifique.

R. B.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1922.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fin) (1):

PAR J. LEMAIRE.

V. Deux génératrices fixes Δ_1, Δ'_1 de même système, du paraboloïde hyperbolique ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$

(1) Voir le début de cette solution dans nos numéros de juillet (p. 385) et d'octobre (p. 27) dernier.

sont rencontrées en M et M' par une génératrice variable G , de l'autre système.

Il n'existe pas en général de point ω d'où l'on voit le segment MM' sous un angle droit lorsque G varie.

Si Δ_1, Δ'_1 sont rectangulaires, il existe une infinité de points ω situés sur un cercle (Γ_1) , dont le plan passe par une droite fixe D_1 , lorsque le couple Δ_1, Δ'_1 varie.

Au deuxième système de génératrices correspondent, de même, des cercles (Γ_2) dont les plans passent par une droite D_2 . Les droites D_1, D_2 se rencontrent en un point I . Former l'équation de la surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2) , et démontrer que (Σ) est sa propre transformée dans une certaine inversion ayant I pour pôle.

Trouver tous les cercles tracés sur (Σ) , et les pôles des inversions qui n'altèrent pas cette surface.

V. Considérons le parabolôide hyperbolique représenté par

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x,$$

et soient

$$(\Delta_1) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda x, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(\Delta'_1) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\lambda' x, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda'} \end{cases}$$

deux génératrices fixes de même système, (G) une

génératrice variable de l'autre système

$$(G) \quad \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\mu}, \\ \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 2\mu x; \end{cases}$$

les points où celle-ci coupe les deux premières ont pour coordonnées

$$(M) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda\mu}, \\ y = \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\lambda + \mu}{\lambda\mu}, \\ z = \frac{\sqrt{q}}{2} \frac{\lambda - \mu}{\lambda\mu}; \end{cases}$$

$$(M') \quad \begin{cases} x' = \frac{1}{2\lambda'\mu'}, \\ y' = \frac{\sqrt{p}}{2} \frac{\lambda' + \mu'}{\lambda'\mu'}, \\ z' = \frac{\sqrt{q}}{2} \frac{\lambda' - \mu'}{\lambda'\mu'}. \end{cases}$$

La condition pour que MM' soit vu de $\omega(X, Y, Z)$ sous un angle droit est

$$(X - x)(X - x') + (Y - y)(Y - y') + (Z - z)(Z - z') = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & (2\lambda\mu X - 1)(2\lambda'\mu' X - 1) \\ & + [2\lambda\mu Y - \sqrt{p}(\lambda + \mu)][2\lambda'\mu' Y - \sqrt{p}(\lambda' + \mu')] \\ & + [2\lambda\mu Z - \sqrt{q}(\lambda - \mu)][2\lambda'\mu' Z - \sqrt{q}(\lambda' - \mu')] = 0, \end{aligned}$$

qui doit avoir lieu quel que soit μ , d'où

$$\left\{ \begin{aligned} & 4\lambda\lambda' X^2 + (2\lambda Y - \sqrt{p})(2\lambda' Y - \sqrt{p}) \\ & + (2\lambda Z + \sqrt{q})(2\lambda' Z + \sqrt{q}) = 0, \\ & 2(\lambda + \lambda')X + \lambda\sqrt{p}(2\lambda' Y - \sqrt{p}) + \lambda'\sqrt{p}(2\lambda Y - \sqrt{p}) \\ & + \lambda\sqrt{q}(2\lambda' Z + \sqrt{q}) + \lambda'\sqrt{q}(2\lambda Z + \sqrt{q}) = 0, \\ & 1 + \lambda\lambda'(p + q) = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

La dernière condition montre qu'en général il n'existe aucun point ω répondant à la question; cette condition, qui exprime que Δ_1 et Δ'_1 sont orthogonales, pouvait être prévue en supposant la génératrice variable (G) à l'infini. Si elle est satisfaite, infinité de points $\omega(X, Y, Z)$ déterminés par les deux premières équations ci-dessus, lesquelles s'écrivent

$$\begin{aligned} 4\lambda\lambda'(X^2 + Y^2 + Z^2) - 2(\lambda + \lambda')(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) + p + q &= 0, \\ 2(\lambda + \lambda')X + 4\lambda\lambda'(Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q}) - (\lambda + \lambda')(p - q) &= 0, \end{aligned}$$

et représentent un cercle (Γ_1), qui est le lieu de ω pour le système Δ_1, Δ'_1 .

L'équation du plan de ce cercle pouvant s'écrire, en tenant compte de (1),

$$2(\lambda + \lambda')X - \frac{4}{p+q}(Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q}) - (\lambda + \lambda')(p - q) = 0,$$

ce plan passe, quelles que soient les génératrices Δ_1 et Δ'_1 , par la droite fixe

$$(D_1) \quad \begin{cases} 2X = p - q, \\ Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q} = 0. \end{cases}$$

Au deuxième système de génératrices correspondent de même des cercles (Γ_2) dont les plans passent par la droite

$$(D_2) \quad \begin{cases} 2X = p - q, \\ Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q} = 0. \end{cases}$$

Ces deux droites se coupent au point $I\left(\frac{p-q}{2}, 0, 0\right)$, symétrique du sommet O du paraboloïde par rapport au milieu du segment FF' limité aux foyers des paraboles principales contenues dans les plans $\gamma O x$ et $z O x$.

La surface (Σ) lieu des cercles (Γ_1) et (Γ_2) a une équation qui résulte de l'élimination de λ et λ' entre

les équations du cercle (Γ_1) et la condition (1) :

$$(\Sigma) \quad \left| \begin{array}{ccc} 4(X^2 + Y^2 + Z^2) & -2(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) & p + q \\ 4(Y\sqrt{p} + Z\sqrt{q}) & 2X - (p - q) & 0 \\ p + q & 0 & 1 \end{array} \right| = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & i[2X - (p - q)](X^2 + Y^2 + Z^2) \\ & + 8(pY^2 - qZ^2) - (p + q)^2[2X - (p - q)] = 0. \end{aligned}$$

La puissance de I par rapport au cercle (Γ_1) ou à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - \frac{\lambda + \lambda'}{2\lambda\lambda'}(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) + \frac{p + q}{4\lambda\lambda'} = 0$$

ou

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{\lambda + \lambda'}{2}(p + q)(Y\sqrt{p} - Z\sqrt{q}) - \frac{(p + q)^2}{4} = 0$$

a pour valeur $(-pq)$; vérification analogue pour le cercle (Γ_2) : I est ainsi pour (Σ) un centre d'anallagmatie.

La surface (Σ) est une cyclide cubique, elle possède deux symétries par rapport aux plans xOy et xOz ; elle a en outre deux anallagmaties autres que celle de pôle I, et dont les pôles sont les points de contact de la surface avec les plans tangents menés par la droite à l'infini du plan $X = 0$, laquelle est sur (Σ) .

Ces points sont les points, autres que I, où Ox coupe (Σ) , c'est-à-dire les points J et K de cet axe qui ont pour abscisses $\pm \frac{p + q}{2}$. Tout plan perpendiculaire à l'axe Ox coupe (Σ) suivant une hyperbole s'il rencontre cet axe entre J et K, suivant une ellipse imaginaire s'il le rencontre en dehors du segment JK.

S'il passe en I, le plan coupe la surface suivant les droites D_1 et D_2 ; en J, il est tangent à (Σ) le long de

(193)

la droite

$$(L) \quad \begin{cases} X = \frac{p+q}{2}, \\ Y = 0, \end{cases}$$

qui est ainsi une génératrice singulière; de même, s'il passe en K , il est tangent le long de la droite

$$(L') \quad \begin{cases} X = -\frac{p+q}{2}, \\ Z = 0. \end{cases}$$

La trace de (Σ) sur le plan $\gamma O z$ est l'hyperbole équilatère

$$Y^2 - Z^2 + \frac{p^2 - q^2}{4} = 0.$$

Tout plan contenant l'une des droites (D_1) , (D_2) , (L) , (L') détermine un cercle sur (Σ) : en particulier le plan $Z = 0$ coupe la surface suivant (L') et suivant le cercle

$$(C') \quad \left(X - \frac{p}{2}\right)^2 + Y^2 = \frac{q^2}{4},$$

qui a pour centre F et qui passe en I . De même le plan $Y = 0$ la coupe suivant (L) et le cercle

$$(C) \quad \left(X + \frac{q}{2}\right)^2 + Z^2 = \frac{p^2}{4},$$

de centre F' et passant en I ; ces cercles ont respectivement IJ et IK pour diamètres. Dans la transformation de (Σ) en elle-même, par une inversion de pôle I et de puissance $(-pq)$, la droite (L) et le cercle (C) se permutent, ainsi que (L') et (C') .

Génération de (Σ) . — Imaginons qu'un plan mobile tourne autour de la droite (D_1) ; il coupe (L) , (L') , (C) et (C') en quatre points qui appartiennent à un cercle (Γ_1) dont le lieu est la surface; un plan mobile

autour de (D_2) donne une génération analogue avec les cercles (Γ_2) .

Par tout point M de (Σ) passent ainsi un cercle (Γ_1) et un cercle (Γ_2) qui se coupent en un second point M' de IM , tel que $\overline{IM} \cdot \overline{IM'} = -pq$; toute sphère contenant un cercle d'une des familles coupe (Σ) suivant un cercle de l'autre famille, et ces deux cercles ont en commun deux points tels que M et M' , de sorte que la sphère est bitangente à (Σ) . Les axes des cercles (Γ_1) et (Γ_2) sont les génératrices des deux systèmes de (Π) .

Revenons aux génératrices Δ_1 et Δ'_1 , et soit OO' leur perpendiculaire commune, les points O et O' où elle les coupe appartiennent au cercle (Γ_1) dont l'axe est la génératrice du parabolôïde, de même espèce que Δ_1 et Δ'_1 , appartenant au plan équidistant de Δ_1 et Δ'_1 ; on en conclut que (Σ) est la surface anallagmatique enveloppe des sphères coupant orthogonalement la sphère imaginaire de centre I et de rayon $\sqrt{-pq}$, avec le parabolôïde comme surface déférente; cela se vérifie par un calcul simple.

Les points O et O' sont évidemment dans le plan de Monge du parabolôïde qui a ainsi en commun, avec (Σ) , l'hyperbole, située dans ce plan, lieu des points où se croisent deux génératrices rectangulaires; nous verrons plus loin que le reste de l'intersection des deux surfaces est une biquadratique sphérique imaginaire.

L'anallagmatie de pôle K , et de module $p(p+q)$, donne un mode de génération plus simple : un plan variable contenant (L') rencontre (C) et (L) en N et N' , et le cercle de diamètre NN' qui est situé dans ce plan, et que nous nommerons le cercle (Λ) , a pour lieu géométrique la surface cubique.

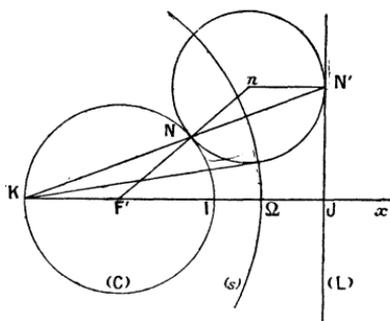
Génération analogue, avec (C') et (L') , à l'aide des cercles (Λ') .

Si n est le centre, situé dans le plan xOz , d'une sphère contenant le cercle (Λ) et tangente à (L) , cette sphère est orthogonale à la sphère (S) de centre K et de rayon $\sqrt{p(p+q)}$, et son centre décrit la parabole (π) située dans le même plan xOz , et ayant F pour sommet et F' pour foyer, et elle a pour enveloppe (Σ) avec laquelle elle se raccorde suivant (Λ) . Les cercles (Λ) constituent une famille de lignes de courbure de (Σ) .

Au mode de génération par les cercles (Λ') , correspond une famille de sphères, orthogonales à la sphère de centre J et de rayon $\sqrt{q(p+q)}$, et ayant leurs centres sur la parabole (π') focale de la précédente; les cercles de raccordement de ces sphères avec (Σ) forment la seconde famille de lignes de courbure.

La surface (Σ) est l'inverse d'un tore : Soient (s) le cercle trace de (S) sur le plan xOz , Ω et Ω' les points

Fig. 3.



où il coupe Ox , Ω étant supposé entre I et J . Transformons l'ensemble (C) , (L) , par une inversion de pôle Ω et de module $\overline{\Omega I} \cdot \overline{\Omega K}$: le cercle (C) se transforme en lui-même, et si J' est le point inverse de J , un calcul fort simple montre que $\Omega J' = KI$; par conséquent (C)

et (L) se transforment en deux cercles égaux (C) et (L_1) . Le cercle $\Omega NN'$, tangent en Ω à Ox , a pour inverse une droite $N_1 N'_1$ parallèle à Ox ; la droite KNN' a pour inverse le cercle $\Omega I N_1 N'_1$; ΩI et $N_1 N'_1$ ont le même axe, par rapport auquel les cercles (C) et (L_1) sont symétriques; finalement, le cercle (Λ) se transforme en le cercle (Λ_1) décrit sur $N_1 N'_1$ comme diamètre dans un plan perpendiculaire au plan xOz , lequel cercle engendre un tore dont la méridienne est l'ensemble des cercles (C) et (L_1) : ce tore (T) est l'inverse de (Σ) ; le point Ω appartient au petit cercle équatorial du tore.

Avec Ω' , on aurait eu un tore dont le grand cercle équatorial eût passé en ce point. La surface (Σ) peut ainsi être transformée en un tore de quatre manières différentes.

Inversement, en transformant un tore par inversion par rapport à un point d'un des cercles équatoriaux, on a une surface (Σ) .

Cette surface cubique n'est donc autre chose qu'une *cyclide de Dupin* particulière; le mode de génération à l'aide des cercles (Λ) est un cas particulier de celui-ci, qui a été signalé par M. Guichard pour une *cyclide de Dupin* quelconque :

Étant donnés deux cercles d'un plan considérés comme inverses l'un de l'autre, si l'on joint un point variable de l'un à son inverse sur l'autre, le cercle ayant pour diamètre le segment de droite obtenu, et situé dans un plan perpendiculaire au plan des cercles, engendre une cyclide de Dupin.

D'ailleurs, en transformant avec un point quelconque de Ox pour pôle, la surface (Σ) et le mode de génération par les cercles (Λ) , on aurait une *cyclide*

de Dupin générale engendrée comme il vient d'être dit.

Des propriétés du tore (T), on déduit sans peine celles de (Σ), que nous contenterons d'énoncer :

Droites de (Σ). — Les seules droites de cette surface sont, outre la droite à l'infini des plans perpendiculaires à Ox , les quatre droites (L), (L'), (D₁), (D₂) : les deux premières sont les inverses du cercle méridien et du cercle équatorial de (T) qui se croisent en Ω , et les deux autres les inverses des deux cercles qui se croisent en Ω et qui appartiennent aux deux plans bitangents au tore qu'on peut faire passer par ce point.

Cercles de (Σ). — Ce sont les cercles des quatre familles que nous avons signalées : les cercles (Λ) sont les transformés des parallèles du tore, les cercles (Λ_1) les transformés des méridiens, les cercles (Γ_1) et (Γ_2) les transformés des cercles situés dans les plans bitangents au tore.

Par tout point M de (Σ) passe un cercle de chaque famille : un cercle (Λ) et un cercle (Λ') qui sont orthogonaux et qui n'ont que ce point commun M, un cercle (Γ_1) et un cercle (Γ_2) qui se coupent en outre au point M' inverse de M dans l'anallagmatic de pôle I, et appartiennent à la sphère bitangente à (Σ) en M et M'.

Les seules autres coniques tracées sur (Σ) sont des hyperboles situées dans les plans sécants perpendiculaires à Ox et coupant cette droite entre J et K.

Biquadratiques de (Σ). — Toute quadrique passant par un cercle ou une conique de la surface la coupe en outre suivant une biquadratique de première espèce. De même toute quadrique qui contient deux des cinq droites de (Σ) situées dans un même plan.

Toute quadrique passant par deux droites, non en

même plan, prises parmi les quatre droites à distance finie, détermine sur (Σ) une courbe gauche du quatrième ordre de seconde espèce, par laquelle on ne peut faire passer que cette seule quadrique.

Une quadrique contenant une conique non circulaire de (Σ) coupe en outre cette surface suivant une biquadratique qui a quatre points communs avec le cercle de l'infini, donc suivant une *biquadratique sphérique*, et réciproquement.

Anallagmaties. — On sait qu'une cyclide cubique quelconque est anallagmatique de cinq manières, les déférentes étant des quadriques homofocales. Ici, nous avons affaire à une cyclide particulière qui possède une seule anallagmatie générale, avec I pour pôle et le paraboloidé comme surface déférente, et à laquelle correspondent les cercles (Γ_1) et (Γ_2) dont les axes sont les génératrices du paraboloidé. Les quatre autres anallagmaties se réduisent en quelque sorte à deux anallagmaties doubles, dans lesquelles les sphères enveloppées se raccordent avec (Σ) le long des cercles de courbure, les déférentes se réduisant aux paraboles (π) et (π') , focales du paraboloidé.

Les normales à (Σ) s'appuient sur ces deux paraboles.

Intersection de (Σ) et du paraboloidé. — Un calcul aisé permet de mettre l'équation de (Σ) sous la forme

$$4(2X + p - q) \left[\left(X - \frac{p - q}{2} \right)^2 + Y^2 + Z^2 + pq \right] \\ + 8(qY^2 - pZ^2 - 2pqX) = 0;$$

l'intersection de cette surface et du paraboloidé se compose donc de la section plane contenue dans le plan polaire de I

$$2X + p - q = 0$$

et d'une biquadratique appartenant à la sphère imaginaire de centre I

$$\left(X - \frac{p-q}{2} \right)^2 + Y^2 + Z^2 + pq = 0.$$

(Σ) *considérée comme transformée du parabolöide.* — Étant donnée une génératrice Δ du parabolöide, il existe un système et un seul de génératrices de même espèce qu'elle, Δ_1 et Δ'_1 , orthogonales, et équidistantes de Δ ; on peut s'en rendre compte en considérant le contour apparent de la quadrique par rapport au plan directeur parallèle à ces génératrices, qui est une parabole de foyer I et de même sommet que le parabolöide; à ces génératrices Δ_1 et Δ'_1 correspond un cercle (Γ_1) dont Δ est l'axe; inversement à un cercle (Γ_1) correspond une génératrice Δ .

Par tout point M du parabolöide passent deux génératrices auxquelles correspondent un cercle (Γ_1) et un cercle (Γ_2); ces cercles ont deux points communs m et m' , inverses l'un de l'autre sur (Σ) dans l'anallagmatie de pôle I; ces deux points sont, comme on voit, symétriques par rapport au plan tangent en M au parabolöide.

Addition à la quatrième partie. — M. Labrousse, professeur au lycée Saint-Louis, a bien voulu me signaler les propriétés suivantes, sur lesquelles je reviendrai prochainement :

1° Si θ décrit sur (H) une biquadratique sphérique (h) de centre O, le point orthoptique ω décrit sur la surface (S_H) une biquadratique sphérique (h'); si (h) est sur la sphère de Monge, (h) et (h') coïncident;

2° Si l'on considère les cônes du second degré de

sommet O qui ont pour directrices les biquadratiques (h'), les coniques sphériques déterminées par ces cônes sur la sphère de Monge sont identiques aux traces, sur la même sphère, des quadriques homofocales à (H);

3° Dans le cas particulier où (H) est de révolution, pour que les points orthoptiques ω, ω' relatifs à deux génératrices Δ et Δ' soient réels, il faut et il suffit que le point commun aux projections de ces droites sur le plan xOy soit extérieur au cercle

$$x^2 + y^2 - (2a^2 + c^2) = 0.$$

QUESTIONS.

2464. ABC étant un triangle et X une droite orientée, appartenant au plan de ce triangle, on construit les droites X_a, X_b, X_c , symétriques respectives de X par rapport à BC, CA, AB .

Démontrer que le centre du cercle orienté qui touche X_a, X_b, X_c est sur le cercle circonscrit à ABC .

CLODION.

2465. Soit Γ la courbe lieu des projections du centre d'un hyperboloïde à une nappe H sur les génératrices d'un même système. La projection de Γ sur tout plan principal de H est rencontrée, par une tangente arbitraire à la conique principale correspondante, en quatre points dont l'un est le centre des moyennes distances des trois autres.

A. LABROUSSE.



[M'2e]

SUR QUELQUES APPLICATIONS
DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE GÉNÉRALISÉ ;

PAR LE COMMANDANT BARRÉ.

1. *Position de la question.* — Nous nous proposons, dans ce travail, d'indiquer deux applications du principe de correspondance généralisé qui ne nous paraissent pas avoir été remarquées et semblent cependant de nature à constituer un moyen commode de recherches géométriques. Les propositions que nous avons en vue constituent deux théorèmes généraux dont le premier est un cas particulier de la proposition donnée par Zeuthen au n° 102 de son Ouvrage *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie*. Le second de ces théorèmes est le corrélatif du premier.

Nous les énoncerons ci-après, en les faisant suivre immédiatement, chacun, de quelques-unes de ses applications.

II. — Premier théorème général et ses applications.

2. THÉORÈME I. — Soit Γ_m une courbe plane de classe m et, dans son plan, une autre courbe Γ_p de classe p . On suppose qu'il existe entre les tangentes de Γ_m et celles de Γ_p une liaison algébrique indécomposable ainsi définie : à chaque tangente de Γ_m correspondent μ tangentes de Γ_p et à chaque tangente de Γ_p ω tangentes de Γ_m . Le lieu des intersections des tangentes correspondantes de Γ_m et de Γ_p est une courbe d'ordre $m\mu + p\omega$.

La démonstration est entièrement calquée sur celle, bien connue, de la génération des coniques par intersection de faisceaux homographiques de droites.

Soient, sur une droite Δ , un point M, d'abscisse x comptée à partir d'une origine arbitraire, point considéré comme défini par l'intersection de Δ avec une tangente à Γ_m , P un point d'abscisse x' défini par les tangentes à Γ_p .

A un point M quelconque de Δ correspondent m tangentes à Γ_m et, par suite, $m\mu$ tangentes à Γ_p et $m\mu$ points P sur Δ . Inversement à chaque point P correspondent $p\varpi$ points M. La relation entre les abscisses x et x' de ces points est donc de la forme

$$(1) \quad ax'^{m\mu}x^{p\varpi} + bx'^{m\mu-1}x^{p\varpi} + \dots + l = 0,$$

équation de degré $m\mu$ en x' et $p\varpi$ en x et dont le degré ne peut s'abaisser que pour des droites particulières (1).

Cela posé, un point quelconque de Δ sera sur la courbe lieu des intersections des tangentes correspondantes de Γ_m et de Γ_p s'il est à la fois point M et point P, autrement dit si c'est un point double de la correspondance (1). Son abscisse sera donnée par la relation

$$(2) \quad ax^{m\mu+p\varpi} + a_1x^{m\mu+p\varpi-1} + \dots + l = 0,$$

(1) On pourrait craindre que la relation entre x et x' , tout en étant de degré $m\mu$ en x' et $p\varpi$ en x ne soit pas de degré global $m\mu + p\varpi$. Cela peut, en effet, arriver pour certaines droites. Mais, si l'on projette la figure sur un plan, non parallèle à l'une de ces droites, la relation entre les points correspondants sur la projection sera du type général (1). Par suite la démonstration relative au degré de la courbe sera applicable à la courbe projetée et la courbe étudiée sera bien du degré annoncé. On en conclut, par surcroît, que le caractère exceptionnel visé ci-dessus, pour la relation (1), ne saurait se présenter pour toutes les droites du plan.

Mais il existe, par contre, une difficulté, qu'il est bon de signaler. Si le lieu trouvé ne peut se décomposer en deux courbes distinctes sans qu'il en soit de même pour la relation qui lie les tangentes

qui, pour la droite générale du plan, est bien de degré $m\mu + p\varpi$, ce qui démontre la proposition.

3. *Remarques.* — 1° Il peut arriver qu'à une tangente commune à Γ_m et à Γ_p corresponde cette tangente elle-même : dans ce cas elle forme une branche du lieu, sans intérêt en général, et qui devra, par suite, ordinairement être considérée comme parasite. Il conviendra donc toujours, dans l'application du théorème, de voir si le fait se produit et d'en déduire les réductions correspondantes.

2° Rien n'empêche, dans ce qui précède, de supposer que Γ_p coïncide avec Γ_m . Mais alors toutes les tangentes sont communes ; il existera donc normalement un certain nombre σ de tangentes à cette courbe qui se correspondent à elles-mêmes. Le vrai lieu sera alors seulement de degré

$$r = m(\mu + \varpi) - \sigma.$$

Ces tangentes sont les analogues des « points unis » des correspondances ponctuelles transformant une courbe en elle-même. Nous les appellerons *tangentes unies*.

associées (ainsi qu'on le voit très simplement en remarquant qu'à la description de chacun des lieux partiels dont l'ensemble constitue le lieu total correspond évidemment, pour chaque couple de tangentes, une relation algébrique distincte), il est très important de remarquer que rien ne s'oppose à ce que le lieu trouvé soit multiple. C'est la même courbe comptée plusieurs fois. Mais pratiquement il sera presque toujours assez facile de s'assurer si une telle réduction a lieu ou non. Tout d'abord le degré véritable du lieu ne saurait être qu'un sous-multiple de celui du lieu trouvé par la méthode. Si ce dernier est de degré premier, la particularité ne peut se produire que si le lieu se réduit à une droite, comptée un nombre de fois égal à celui du degré du lieu trouvé. Nous en verrons ci-après un exemple (n° 7. Cas où le point O est un point d'inflexion).

Cas d'une correspondance involutive. — Si, à une tangente T de Γ_m , considérée comme appartenant au premier système, correspond un groupe (T') de tangentes T' de la courbe Γ_m , du second système, tel qu'à chaque tangente T' , considérée ensuite comme appartenant au premier système, correspond un même groupe du second système comprenant la tangente T et tel, en outre, que, pour toute autre tangente de ce groupe, considéré comme formant un groupe (T) du premier système on retrouve le même groupe (T') , nous dirons que la correspondance est involutive.

Dans le cas d'une correspondance involutive, le lieu véritable est décrit deux fois et comme, dans ce cas, on a nécessairement $\mu = \varpi$, son degré sera :

$$r = \frac{1}{2}(2m\mu - \sigma).$$

Ceci montre, en passant, que, dans ce cas, σ est nécessairement pair ou nul. On déduit de ce qui précède le théorème suivant.

4. THÉORÈME II. — *Supposons, sur une courbe Γ_m de classe m , réalisée entre les tangentes une correspondance telle qu'à une tangente considérée comme appartenant à une première famille correspondent μ tangentes à la courbe considérées comme formant une deuxième famille et, à chacune de celles-ci, ϖ tangentes de la première famille. Soit σ le nombre des tangentes unies de la correspondance.*

Le lieu des intersections des tangentes correspondantes sera en général de degré

$$r = m(\mu + \varpi) - \sigma,$$

Il se réduira au degré

$$r = \frac{1}{2}(2m\mu - \sigma)$$

en cas de correspondance involutive.

5. *Application.* — Une foule de théorèmes élémentaires bien connus peuvent être démontrés en appliquant ces propositions. Citons, par exemple :

1° La définition de la polaire d'un point par rapport à une conique comme intersection des tangentes aux points d'intersection avec une droite passant par un point fixe.

(Ici : $m = 2$, $p = 2$, $\mu = \varpi = 1$, $\sigma = 2$.)

2° Le cercle orthoptique. Γ_m coïncide avec Γ_p ; $m = 2$, $\mu = \varpi = 2$ et $\sigma = 4$ (les quatre tangentes isotropes à la conique).

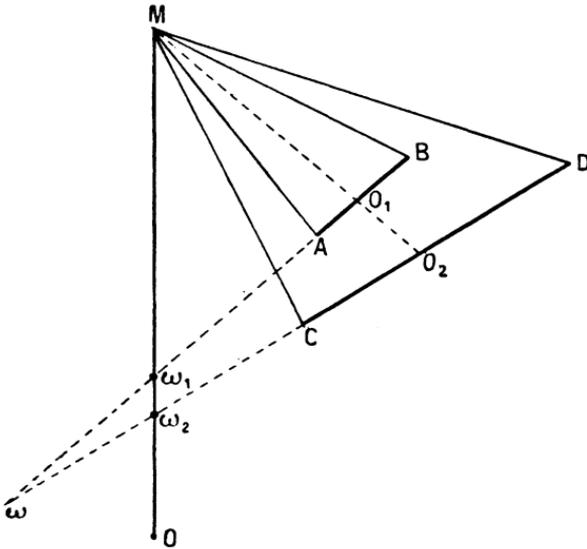
Nous allons en donner quelques applications moins banales.

6. Soient O un point dans un plan, AB et CD deux segments portés par des droites distinctes de ce plan. On demande le lieu des points M de ce plan tels que OM ait même conjuguée harmonique par rapport aux angles AMB et CMD .

Soient O_1 et O_2 les conjugués harmoniques de ω_1 et de ω_2 , respectivement par rapport à AB et à CD . Les divisions ω_1 et O_1 sont homographiques; de même ω_2 et O_2 et par suite O_1 et O_2 . L'enveloppe de O_1O_2 est donc, sauf les cas exceptionnels énumérés dans la note ci-dessous ⁽¹⁾, une conique (C). Le point M peut être

(¹) 1° Le point O est situé, soit sur la droite qui porte le seg-

considéré comme l'intersection de la droite OM du faisceau O avec la tangente $O_1 O_2$ à la conique C .



La correspondance est biunivoque, et l'on a :

$$\mu = \varpi = 1,$$

$$m = 1 \quad (\Gamma_m \text{ réduite au point } O),$$

$$p = 2 \quad (\Gamma_p \text{ est la conique } C).$$

Il reste à déterminer la valeur de σ . Or, si aucune des tangentes issues de O à la conique (C) ne se correspond à elle-même, $\sigma = 0$. Pour que cette correspondance

ment AB , soit sur celle qui porte CD . Dans ces cas l'enveloppe de $O_1 O_2$ se réduit au conjugué harmonique de O par rapport au segment collinéaire de ce point et le lieu de M est une conique.

2° La droite $O\omega$ a même conjuguée harmonique par rapport aux angles AOB et COD . L'enveloppe de $O_1 O_2$ se réduit encore à un point et le lieu de M a une conique qui peut d'ailleurs dégénérer dans certains cas exceptionnels.

ait lieu, il faut et il suffit que O_1 et O_2 soient alignés sur O et par suite que O_1 et O_2 coïncident respectivement avec ω_1 et ω_2 , ce qui ne peut arriver que si ω_1 coïncide avec l'une des extrémités de AB et ω_2 avec l'une des extrémités de CD . Ceci exige que le point O se trouve sur l'une des quatre droites AC , AD , BC ou BD . Dans ce cas il est à peu près évident que la droite en question est bien une droite O, O_2 , c'est-à-dire une tangente à (C) passant par O et l'on a ⁽¹⁾ $\sigma = 1$. Dans tous les autres cas $\sigma = 0$ et le lieu est une cubique.

Dans le cas exceptionnel

$$r = 1 + 2 - 1 = 2$$

et le lieu est une conique. En résumé :

Dans le cas général le lieu est une cubique

$$(r = 1 + 2 - 0).$$

Les tangentes issues de O à la conique (C) donnent le point O ; donc :

Le point O est un point double de cette cubique qui passe en outre par les quatre points A, B, C et D . Dans le cas particulier où le point O est sur l'une des droites AC, AD, BC ou BD , le lieu véritable se réduit à une conique passant en O et par ceux des quatre points A, B, C, D non alignés avec C .

Remarque. — Lorsque C et D sont confondus avec

⁽¹⁾ A moins que O ne se trouve à l'intersection de deux de ces quatre droites. Mais alors la droite $O\omega$ a évidemment même polaire par rapport à AOB et à COD , les deux côtés de ces angles coïncidant deux à deux et l'on se trouve dans le deuxième cas d'exception réservé ci-dessus. Le lieu dégénère en deux droites AC et BD et est d'ailleurs de caractère exceptionnel.

les points cycliques, on retrouve une propriété intéressante connue des *strophoïdes générales*, à savoir qu'elles peuvent être considérées comme le lieu des points M du plan tels que l'on voit sous des angles égaux (ou supplémentaires) deux segments OA et OB définis par trois points non en ligne droite ⁽¹⁾.

[Le point O est le point double de la courbe à laquelle appartiennent d'ailleurs A et B ⁽²⁾.]

7. Soit Γ_3 une cubique générale; par un point fixe O de Γ_3 on mène une sécante OM_1M_2 coupant la courbe en deux points M_1 et M_2 variables. Lieu de l'intersection des tangentes en M_1 et M_2 à la courbe.

La classe est ici : $m = 6$. La correspondance est visiblement ⁽³⁾ $(1, 1)$ et involutive. Le nombre des tangentes unies σ est 4, correspondant aux points de contact des quatre tangentes à la courbe issues du point O , autres que la tangente en ce point. Ces tangentes unies se confondent d'ailleurs avec les quatre tangentes qui déterminent leur point de contact.

La tangente en O est la limite d'une sécante pour laquelle O_1 tend vers O tandis que O_2 tend vers le point d'intersection O' de la tangente en O avec la courbe; O' étant différent de O . La tangente en O' est alors

(1) Si les trois points sont en ligne droite la strophoïde dégénère en un cercle et cette droite. C'est le cas d'exception signalé dans la note de la page 205. La recherche directe du lieu est alors une question de géométrie très élémentaire.

(2) Voir, par exemple, NIEWENGLOWSKI : *Géométrie analytique*, t. II, ch. IX, Exercice 7, 1^{re} partie.

(3) On dit que deux points, M et M' , sur une courbe algébrique, sont en correspondance (pq) si ces points M et M' sont liés par une relation algébrique telle qu'à un point M' correspondent p points M et qu'à un point M correspondent q points M' .

associée à la tangente en O et leur intersection donne précisément O' . Ce point appartient au lieu. Il en est de même des quatre points de contact des tangentes unies.

Ceci suppose, comme d'ailleurs l'évaluation du nombre des tangentes issues de O , que ce point n'est pas un point d'inflexion. Nous examinerons ce cas ci-après : le supposant écarté, on a donc

$$r = \frac{1}{2}(2 \times 6 - 4) = 4.$$

Donc :

Si le point O est un point ordinaire non inflexionnel d'une cubique générale, le lieu est une quartique.

Lorsque le point O est d'inflexion, la tangente d'inflexion est une tangente unie, mais, de plus, elle est la limite des tangentes unies voisines lorsque le point O tend vers le point d'inflexion. De telle sorte qu'on doit la compter pour trois tangentes unies. Appliquant ce résultat on trouve que *le lieu est une cubique*. Mais on sait, par la théorie des courbes du troisième ordre (¹), que ce lieu est une droite, la polaire du point d'inflexion qui a, par rapport à la courbe, *la même définition que la polaire d'un point par rapport à une conique*. Cette droite est comptée trois fois (*cf.* note du n° 2). Cela tient à ce que, de chacun de ses points, sont issus trois couples de tangentes dont les cordes de contact vont passer au point d'inflexion.

(¹) Propositions IX et XI du Traité de MAC LAURIN sur les courbes du 3^e degré et corollaires 1 et 2 de la proposition XI. (*Cf.* E. DE JONQUIÈRES, *Mélanges de Géométrie pure*; voir aussi : SALMON, *Théorie des courbes planes*. Traduction O. CHEMIN.)

8. *Examen du problème précédent dans le cas d'une cubique cuspidale.* — Dans ce cas, la classe est égale à trois ; le lieu est une droite lorsque O est un point d'inflexion. Cette droite est d'ailleurs la tangente de rebroussement.

Dans le cas où O est un point quelconque, la droite qui le joint au point de rebroussement, bien que non tangente, joue le rôle de tangente unie ; d'autre part il existe une tangente à la courbe, issue de O , en dehors de la tangente en ce point ; on a donc $\sigma = 2$ et, par suite, $r = 2$.

Le lieu dans ce cas est une conique, passant par le point de rebroussement et par le point de contact de la tangente issue du point O .

9. On pourrait multiplier ces exemples. Nous nous bornerons, pour terminer l'examen des applications du premier théorème général, à voir ce qu'il donne dans le cas d'une courbe unicursale avec correspondance $(1, 1)$ entre les tangentes.

La correspondance peut alors être représentée par une relation homographique entre les valeurs du paramètre en fonction rationnelle duquel sont exprimées les coordonnées des points de la courbe, soit :

$$att' + bt + ct' + d = 0.$$

Il y a donc, dans ce cas, deux tangentes unies et, si m est la classe de la courbe, le degré r du lieu est ($\mu = \varpi = 1$) :

$$r = 2(m - 1)$$

dans le cas de non-involution, et

$$r = m - 1$$

dans le cas d'involution.

Ainsi, par exemple, pour un point O ordinaire, non inflexionnel, d'une cubique crunodale ⁽¹⁾, le lieu qui fait l'objet des paragraphes 7 et 8 est une cubique

$$(r = 4 - 1).$$

III. — Second théorème général et applications.

10. THÉORÈME III. — Soit C_m une courbe plane de degré m , et, dans son plan, une courbe C_p de degré p . On suppose qu'on ait établi entre les points de C_m et de C_p une liaison algébrique ainsi définie : à chaque point de C_m correspondent μ points de C_p et à chaque point de C_p correspondent ϖ points de C_m . L'enveloppe des droites joignant les points correspondants de C_m et de C_p est une courbe de classe $m\mu + p\varpi$.

Ce théorème est le corrélatif du théorème I. Il donne lieu aux mêmes remarques et l'on est, de même, conduit au théorème suivant :

11. THÉORÈME IV. — Supposons, sur une courbe C_m d'ordre m , réalisée une correspondance ponctuelle (μ, ϖ) comportant un nombre σ de points unis.

L'enveloppe des droites de jonction des points correspondants sera, en général, de classe

$$r = m(\mu + \varpi) - \sigma.$$

Ce nombre se réduira à

$$r = \frac{1}{2} [2m\mu - \sigma]$$

en cas de correspondance involutive (qui se définit absolument comme dans la question corrélatrice).

(1) C'est-à-dire possédant un point double à tangentes distinctes.

12. On pourrait, de ces théorèmes, donner tout une série d'applications, ainsi que cela a été fait plus haut, pour les propositions corrélatives.

Nous nous contenterons de signaler qu'ils permettent de retrouver les propositions bien connues des correspondances (1, 1) sur les coniques.

[P^{26e}]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

(Suite) (1);

PAR E. LAINÉ.

11. Par une T. C. convenablement choisie, on peut donc toujours ramener une équation différentielle du second ordre à la forme

$$R = 0.$$

Il en résulte comme plus haut qu'une équation différentielle du second ordre n'a pas d'invariants par rapport au groupe des T. C.

Il est facile de voir que cette propriété ne s'étend pas au delà du second ordre. Ainsi les seules équations du troisième ordre qu'on puisse ramener, par une T. C. prolongée, à la forme

$$\frac{d^3 Y}{dX^3} = 0,$$

sont nécessairement, comme le montre un calcul immé-

(1) Cf. *N. A.*, janvier 1924, p. 131; février 1924, p. 177.

diat, de la forme

$$\frac{d^3\gamma}{dx^3} + Ar^3 + Br^2 + Cr + D = 0,$$

où A, B, C et D sont certaines fonctions des seules variables x, y, p (1).

La méthode des T. C. ne permettra donc d'intégrer, à partir du troisième ordre, que des classes particulières d'équations différentielles. Mais on pourrait chercher à généraliser cette méthode de la façon suivante :

Prenons, pour simplifier, le cas du second ordre, et soit

$$(23) \quad Y(x, y, p, r) = 0 \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \neq 0 \right)$$

une équation différentielle. Proposons-nous de déterminer trois autres fonctions $X(x, y, p, r)$, $P(x, y, p, r)$ et $R(x, y, p, r)$ telles que les équations

$$(24) \quad \begin{cases} X = X(x, y, p, r), & Y = Y(x, y, p, r), \\ P = P(x, y, p, r), & R = R(x, y, p, r) \end{cases}$$

entraînent, pour un choix convenable des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, les deux relations différentielles

$$(25) \quad \begin{cases} dY - P dX = \lambda_1(dy - p dx) + \lambda_2(dp - r dx), \\ dP - R dX = \mu_1(dy - p dx) + \mu_2(dp - r dx), \end{cases}$$

les fonctions X, Y, P et R étant supposées essentiellement distinctes. On voit comment l'existence d'un tel système de fonctions permettrait d'établir une correspondance entre les intégrales de deux équations différentielles, l'une en (X, Y, P, R) , l'autre en (x, y, p, r) , déduite de la première par les formules (24). L'équation (23) serait ainsi ramenée immédiatement à la

(1) Cf. S. LIE, *loc. cit.*, p. 85.

forme

$$Y = 0,$$

comme dans le cas des équations du premier ordre.

Si les équations (25) pouvaient être vérifiées, les équations (24) définiraient une transformation qui, sans être une T. C. prolongée ($\frac{\partial Y}{\partial r} \neq 0$), c'est-à-dire sans conserver les contacts du premier ordre, conserverait les contacts du second ordre; on aurait bien ainsi généralisé la notion de transformation de contact. Nous allons voir que cette généralisation est impossible.

Nous voulons que les fonctions X, Y, P et R soient distinctes, d'après leur signification même. Mais il est bien facile de montrer, en particulier, que les fonctions X et Y doivent être distinctes en vertu des équations (25) si λ_1 et λ_2 ne sont pas tous deux nuls. En effet, si X et Y n'étaient pas distinctes, l'expression $dY - P dX$ ne contiendrait que deux variables indépendantes, et admettrait par suite un facteur intégrant; il existerait donc une fonction U de x, y, p, r , telle que, en désignant par α et β des coefficients respectivement proportionnels à λ_1 et λ_2 , on aurait

$$dU = \alpha(dy - p dx) + \beta(dp - r dx),$$

d'où, en identifiant les deux membres et éliminant α et β ,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + p \frac{\partial U}{\partial y} + r \frac{\partial U}{\partial p} = 0,$$

et par suite,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial p} = 0, \quad dU = 0.$$

Les fonctions X et Y sont donc nécessairement distinctes.

Ceci posé, les équations (25) montrent que l'on a au moins deux relations de la forme

$$Y = \varphi(X, x, y, p), \quad P = \psi(X, x, y, p);$$

donc si X ne dépendait pas de r , il en serait de même de Y : par suite $\frac{\partial X}{\partial r} \neq 0$.

Prenons alors comme nouvelles variables indépendantes x, y, p et X . On tire de la première équation (25)

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial X}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\lambda_1 p - \lambda_2 r, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \lambda_2,$$

d'où, en éliminant λ_1 et λ_2 ,

$$(26) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial y} + r \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p \frac{\partial \psi}{\partial y} + r \frac{\partial \psi}{\partial p} = 0,$$

ou, puisque

$$\psi = P = \frac{\partial \varphi}{\partial X},$$

$$(27) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial x} + p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial y} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X \partial p} = 0.$$

Dérivons par rapport à X l'équation (26), où r est une certaine fonction de X, x, y, p ; la comparaison avec (27) donne de suite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

et l'on déduit ensuite de (26)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

et enfin

$$Y = \varphi(X),$$

ce qui est impossible. Ainsi toute transformation plane qui conserve les contacts du second ordre est une T. C. prolongée.

Plus généralement, on montre, par un raisonnement identique, que toute transformation plane qui conserve les contacts d'ordre n conserve aussi les contacts d'ordre $n - 1$. On en déduit, par récurrence, que toute transformation plane qui conserve les contacts d'ordre n est une T. C. prolongée.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème que M. Goursat a établi en utilisant les propriétés des systèmes de Pfaff (1). Il en résulte qu'il est impossible de généraliser dans cette direction la théorie des transformations de contact; cette théorie ne fournit donc une méthode générale d'intégration que pour les équations différentielles des deux premiers ordres.

(*La fin prochainement.*)

[R9b]

CHOC DE DEUX SOLIDES AVEC FROTTEMENT;

PAR JOSEPH PÉRÈS.

1. Dans un article récent (2), j'ai utilisé quelques remarques géométriques simples pour la discussion du choc de deux plaques mobiles dans un plan *lorsqu'il y a frottement au point de contact (unique)*. Passons au

(1) GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, n° 74.

(2) *Nouvelles Annales*, décembre 1923, p. 98.

choc de deux solides quelconques : des considérations géométriques, à peine plus compliquées, permettent de présenter la discussion sous une forme très intuitive et de retrouver, de façon peut-être plus élémentaire, les résultats de l'élégante et très complète analyse de Darboux (1).

2. Soit donc un solide quelconque (S) qui vient en contact avec un obstacle fixe (Σ). Nous prendrons des axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, l'origine O étant le point de contact et l'axe Oz étant la normale commune en O à (S) et (Σ) [sens positif extérieur à l'obstacle]. Nous appellerons a, b, c les coordonnées du centre de gravité G de (S), ξ, η, ζ les composantes de la percussion qui s'exerce sur (S); α, β, γ seront les composantes de la vitesse du point G et p, q, r celles de la rotation instantanée du solide, avec les indices 0 et 1 au début et à la fin du choc. Enfin m sera la masse de (S) et

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1$$

sera l'équation de l'ellipsoïde central d'inertie de (S).

On a les équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_0 = \frac{\xi}{m}, \\ \beta_1 - \beta_0 = \frac{\eta}{m}, \\ \gamma_1 - \gamma_0 = \frac{\zeta}{m}; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(p_1 - p_0) - F(q_1 - q_0) - E(r_1 - r_0) = c\eta - b\zeta, \\ -F(p_1 - p_0) + B(q_1 - q_0) - D(r_1 - r_0) = a\zeta - c\xi, \\ -E(p_1 - p_0) - D(q_1 - q_0) + C(r_1 - r_0) = b\xi - a\eta, \end{array} \right.$$

(1) *Bull. Sc. math.*, t. 1, 1880, p. 146-160.

et les formules (2) peuvent être résolues sous la forme

$$(2') \quad \begin{cases} p_1 - p_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \lambda}, \\ q_1 - q_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \mu}, \\ r_1 - r_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial f(\lambda, \mu, \nu)}{\partial \nu}, \end{cases}$$

$f(\lambda, \mu, \nu)$ étant la forme quadratique adjointe de celle qui définit l'ellipsoïde d'inertie et λ, μ, ν étant les seconds membres des (2).

Introduisons la vitesse, par rapport à (Σ) , du point O de (S); elle a les composantes

$$U = x + rb - qc, \quad V = \beta + pc - ra, \quad W = \gamma + qa - pb,$$

avec, au début ou à la fin du choc, les indices 0 ou 1.

Les équations précédentes entraînent

$$\begin{aligned} U_1 - U_0 &= \frac{\xi}{m} + \frac{1}{2} b f'_\nu(\lambda, \mu, \nu) - \frac{1}{2} c f'_\mu(\lambda, \mu, \nu) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f(c\eta - b\zeta, a\zeta - c\xi, b\xi - a\eta) \right] \end{aligned}$$

et des formules analogues pour $V_1 - V_0, W_1 - W_0$. En désignant par $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ la forme quadratique (définie positive) qui est entre crochets, il vient donc enfin

$$(3) \quad \begin{cases} U_1 - U_0 = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}, \\ V_1 - V_0 = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}, \\ W_1 - W_0 = \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

Pendant l'intervalle de temps très court que dure le

choc, les composantes de la vitesse du point de contact passent des valeurs U_0, V_0, W_0 aux valeurs U_1, V_1, W_1 . Soient U, V, W (sans indice) les valeurs de ces composantes à un instant quelconque t du choc; on peut écrire, pour toute partie du choc, des formules analogues aux précédentes, de sorte qu'en envisageant l'intervalle $t, t + dt$, on aura

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = \frac{\partial\varphi(X, Y, Z)}{\partial X}, & \frac{dV}{dt} = \frac{\partial\varphi(X, Y, Z)}{\partial Y}, \\ \frac{dW}{dt} = \frac{\partial\varphi(X, Y, Z)}{\partial Z}, \end{cases}$$

X, Y, Z étant les composantes de la *réaction* au contact à l'instant t .

3. Les formules (4) s'interprètent immédiatement comme dans le cas du problème plan.

Soit M le point de coordonnées U, V, W par rapport aux axes choisis; il décrit, pendant le choc, une courbe (M) partant du point $M_0(U_0, V_0, W_0)$ pour aboutir en $M_1(U_1, V_1, W_1)$. Envisageons l'ellipsoïde d'équation

$$\varphi(x, y, z) = 1 \quad (1).$$

La demi-droite qui porte la réaction X, Y, Z à l'instant t le rencontre en P et le point O se projette orthogonalement en R sur le plan tangent en P à l'ellipsoïde. D'après les formules (4) :

La demi-droite OR est, à chaque instant, parallèle à la tangente à la courbe (M) et donne le sens dans lequel cette courbe est décrite par le point M.

(1) On vérifiera facilement que l'un des axes de cet ellipsoïde est porté par la droite OG.

Nous choisissons, une fois pour toutes, le sens de déplacement du point M pour sens *positif* sur la courbe (M) . Nous pouvons alors dire :

1. *La demi-droite OR définit, à chaque instant, en direction et sens, la demi-tangente positive à (M) .*

4. Le problème posé se présente alors de la façon suivante :

A l'instant t_0 où commence le choc on connaît les vitesses et, en particulier, U_0, V_0, W_0 (¹) : on connaît donc le point de départ M_0 de la courbe (M) . Nous vérifierons dans la suite que *cette courbe est alors bien déterminée* si l'on admet les lois classiques du frottement et suppose connu le coefficient de frottement.

Le choc sera terminé lorsque, sur cette courbe, on arrivera au point M_1 de cote

$$W_1 = -eW_0,$$

e étant le coefficient de restitution (connu).

Ce point M_1 , dont nous aurons à vérifier l'existence, étant déterminé, le problème est résolu. U_1, V_1, W_1 sont connus; les formules (3) déterminent alors la percussion et les formules (1) et (2) l'état final des vitesses.

5. Avant d'aller plus loin il faut préciser comment est définie la courbe (M) et en examiner sommairement l'allure.

(¹) W_0 étant négatif.

Pour cette étude, nous nous plaçons dans le cas où la vitesse de glissement n'est pas nulle pendant le choc (ou pendant une partie du choc que nous envisageons); $U^2 + V^2$ est donc différent de zéro ou, géométriquement, le point M n'appartient pas à l'axe Oz .

Dans ces conditions, la position du point M détermine celle du point P puisque, d'après les lois du frottement, P doit être dans le plan zOM , OP faisant avec Oz l'angle de frottement du côté opposé à M . Le point R en résulte et les paramètres directeurs de la droite OR s'exprimeront à l'aide des coordonnées de M .

Les diverses courbes (M) possibles (qui correspondront à diverses valeurs des vitesses initiales) sont donc déterminées par un système d'équations différentielles. Pour écrire ces équations, les coordonnées cylindriques sont très indiquées: ρ, ω, z étant les coordonnées cylindriques de M (z n'est autre que W), on a le système

$$(5) \quad \frac{d\rho}{R(\omega)} = \frac{\rho d\omega}{\Theta(\omega)} = \frac{dz}{z(\omega)},$$

les dénominateurs étant les composantes de OR suivant le rayon vecteur, la perpendiculaire à Oz et au rayon vecteur, l'axe Oz . Il serait aisé d'expliciter ces dénominateurs, mais nous n'en avons pas besoin pour la suite.

Les courbes (M) définies par (5) forment une *congruence* et par un point $M_0(\rho_0 \neq 0, \omega_0, z_0)$, non situé sur Oz , passe une seule de ces courbes (1). Si $\Theta(\omega_0)$ est nul, les relations (5) montrent que ω restera cons-

(1) Pour en être certain, il suffit de noter que la tangente à une courbe (M) est toujours bien déterminée par la position de son point de contact M et en dépend d'une façon continue.

tant et que le point M se déplacera sur une droite, le point P restant fixe; c'est d'ailleurs évident géométriquement parce que la condition

$$\mathcal{O}(\omega_0) = 0$$

exprime que la position initiale de OR, OR_0 est dans le plan zOM_0 , la courbe (M) étant alors nécessairement la parallèle à OR_0 menée par M_0 . Si, au contraire, $\mathcal{O}(\omega_0)$ n'est pas nul, on prendra dans les équations (5) ω pour paramètre et l'intégration sera ramenée aux quadratures

$$\rho = \rho_0 e^{\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{R(\omega)}{\mathcal{O}(\omega)} d\omega}, \quad z = z_0 + \int_{\omega_0}^{\omega} \rho \frac{Z(\omega)}{\mathcal{O}(\omega)} d\omega.$$

La courbe (M), ainsi déterminée, est décrite dans un sens (indiqué par OR) tel que

$$\frac{d\omega}{\mathcal{O}(\omega)}$$

soit positif. Elle reste régulière et ne rencontre pas Oz tant que ω n'atteint pas une valeur qui annule $\mathcal{O}(\omega)$.

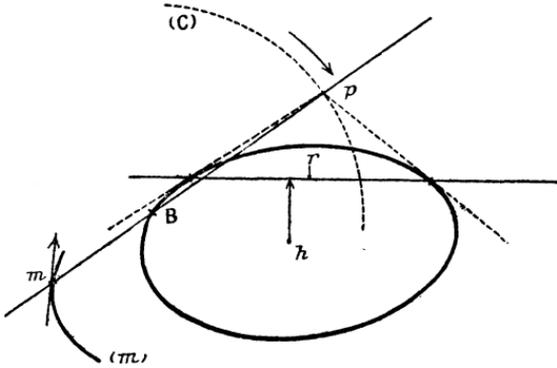
6. Ces valeurs remarquables de ω peuvent être définies géométriquement.

Pour y arriver nous envisagerons les projections (m) des courbes (M) sur un plan perpendiculaire à Oz; pour fixer les idées, ce sera le plan passant par le point B où la partie positive de l'axe Oz rencontre l'ellipsoïde. Ce plan (*plan de figure*) coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse (E) dont le centre h est à l'intersection du plan et de la droite qui joint l'origine au point le plus haut H de l'ellipsoïde (1).

(1) Point le plus haut, c'est-à-dire dont la cote z est maximum.

La demi-droite OP coupe le plan de figure en p ⁽¹⁾, le point M s'y projette orthogonalement en m .

Fig. 1.



D'après ce qui précède, on peut énoncer les résultats suivants :

II. Pendant le choc, le point p restera sur le cercle (C), de centre B , qui constitue l'intersection du plan de figure et du cône de frottement; les points m et p sont constamment en ligne droite avec B et sont de part et d'autre de ce point.

III. La demi-tangente positive en m à la courbe (m) correspondante a même direction et même sens que la perpendiculaire hr abaissée de h sur la polaire

Il nous arrivera ainsi plusieurs fois par la suite de parler comme si l'axe des z était vertical et dirigé vers le haut; peu importe évidemment, l'orientation de cet axe ne jouant aucun rôle dans la question.

(¹) Il n'est pas inutile de noter que, la réaction normale étant toujours positive, le point P est sur le demi-ellipsoïde situé, par rapport à xOy , du côté des z positifs. La position de p détermine entièrement P .

de p par rapport à (E) ⁽¹⁾. Par un point m , distinct de B, passe une seule (m) ⁽²⁾.

Une racine de $\mathcal{O}(\omega)$ correspond évidemment à un point p tel que hr soit parallèle à la droite mBp . Cette dernière droite étant alors perpendiculaire à la polaire de p , le point p appartient à l'hyperbole d'Apollonius relative à B et à (E). Cette hyperbole passe par B et h et l'on vérifie que :

IV. Lorsque p décrit l'hyperbole, la droite hr a le sens Bm ou le sens Bp suivant que p appartient ou non à l'arc d'hyperbole Bh ⁽³⁾.

Le cercle (C), dont le rayon est proportionnel au coefficient de frottement, coupe l'hyperbole en deux ou quatre points suivant la valeur de ce coefficient. Nous appellerons ces points *points limites*. Ils correspondent aux racines (deux ou quatre) de l'équation

$$\mathcal{O}(\omega) = 0.$$

Sur la figure nous avons représenté deux cercles (C) : l'un en trait pointillé donnant deux points limites p' et p'' , l'autre en trait mixte correspondant à une valeur

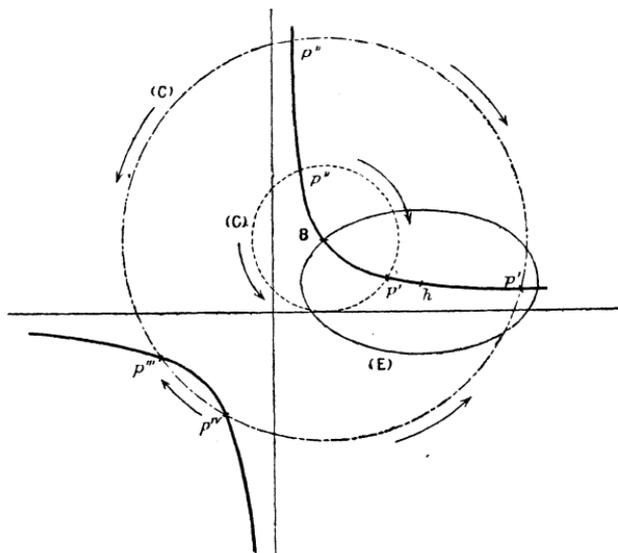
(1) Les deux premières relations (4) entraînent évidemment que la demi-tangente à (m) dans le sens de parcours soit donnée, en sens et direction, par la normale extérieure en p à l'ellipse, homothétique et concentrique à (E), passant par ce point. C'est un énoncé équivalent à celui du texte.

(2) Cf. note (1) de la page 221 et aussi paragraphe 9.

(3) L'arc d'hyperbole à envisager est bien Bh puisque le sens Bp change au passage par le point B, tandis que, au passage par le point h , c'est le sens hr qui se modifie. D'autre part, quand p décrit l'arc Bh, l'angle \widehat{Bph} reste obtus et la demi-droite hr , qui fait un angle aigu avec hp , a donc même sens que Bm; ce sera nécessairement l'inverse quand p n'appartient pas à l'arc Bh.

plus grande du coefficient de frottement et donnant quatre points limites p' , p'' , p''' , p^{iv} .

Fig. 2.



7. Admettons que le glissement initial soit tel que p_0 , position initiale de p , coïncide avec l'un des points limites : m se déplacera sur le prolongement de $p_0 B$ et, d'après IV :

m s'éloigne de B lorsque p_0 coïncide avec un point limite appartenant à l'arc d'hyperbole Bh , il s'en rapproche sinon.

Revenons au point M . Il décrit, comme nous l'avons déjà vu, une demi-droite à partir de sa position initiale M_0 . Ce que nous venons de dire du point m montre que le déplacement du point M finira par l'amener sur Oz (glissement nul) sauf si le point limite appartient à l'arc Bh (1). Dans ce dernier cas le point P_0 de

l'ellipsoïde (correspondant à p_0) est nécessairement au-dessus du plan de contour apparent horizontal de cet ellipsoïde (²). OR_0 qui donne le sens et la direction de la droite (M) est donc au-dessus de xOy .

Résumant les résultats précédents nous pouvons dire que :

V. Lorsque p_0 coïncide avec l'un des points limites, la trajectoire (M) (qui est une demi-droite) rencontre l'axe des z ou s'élève indéfiniment au-dessus du plan des xy .

8. Plaçons-nous maintenant dans le cas où p_0 n'est pas confondu avec l'un des points limites. Lorsque m décrit la courbe (m), la droite Bm tournera autour de B dans un sens défini par hr ; le point p correspondant décrira donc un arc du cercle (C) en se déplaçant toujours dans le même sens jusqu'à atteindre un point limite.

Le sens du déplacement du point p est facile à déterminer en construisant hr pour une position particulière de p . Il est marqué par des flèches sur la figure : dans le cas de deux points limites (cercle en trait pointillé) il est tel que p tende vers le point p' ; dans le cas de

(¹) Nous ne nous préoccupons pas ici du fait que, dans le problème réel de choc, la courbe (M) doit être limitée au point M_1 de cote connue $-eW_0$; nous étudions en somme, jusqu'au paragraphe 10, les courbes (M) et (m) comme définies, ainsi que leur sens de parcours, par les relations différentielles indiquées ou par les propriétés géométriques équivalentes. Nous revenons, au paragraphe 10, pour la discussion générale, au problème de choc.

(²) Contour apparent correspondant à la direction Oz . Les points B et H de l'ellipsoïde sont au-dessus de ce plan de contour apparent; d'autre part, le même plan a pour trace sur le plan de figure une droite parallèle à la normale en B à l'hyperbole, cette droite ne peut rencontrer l'arc Bh . L'énoncé du texte est ainsi justifié.

quatre points limites (cercle en trait mixte) p tend vers p' ou p''' suivant qu'il appartient à l'un des arcs $p^{iv} p' p''$ ou $p'' p''' p^{iv}$.

Reste à examiner l'allure de la courbe (M) lorsque p tend ainsi vers un point limite (p' ou p'''). Le résultat est intuitif : la demi-tangente positive à une courbe (M) dépend d'une façon continue de la position du point P qui correspond à son point de contact; la courbe (M) se rapprochera donc de celle que l'on obtiendrait pour p coïncidant avec p' ou p''' . On est ainsi conduit aux énoncés suivants :

VI. *Lorsque p tend vers un point limite p' ou p''' , le point M tend vers un point de l'axe Oz pourvu que ce point limite n'appartienne pas à l'arc Bh.*

VII. *Lorsque p tend vers un point limite p' appartenant à l'arc Bh, le point M s'éloigne indéfiniment, sa cote tendant vers $+\infty$.*

Justifions d'abord l'énoncé VI. Lorsque p tend vers le point limite, la demi-tangente à (m) tend à prendre, d'après IV, le sens *opposé* au rayon vecteur Bm . Ce rayon vecteur finira donc par aller en diminuant : il aura une limite qui ne peut être différente de zéro car le point m tendrait alors vers une position limite m' et il passerait par m' deux courbes (m) : celle que nous envisageons et la droite Bm' . C'est impossible d'après III. La courbe (m) aboutit donc au point B. Son arc s est fini puisque la tangente est continue.

Revenons à la courbe (M). $\frac{dz}{ds}$, pente de sa tangente par rapport au plan xOy , tend vers une limite finie, à savoir la pente de la droite OR construite à partir du point limite. z reste donc fini et le point M tend vers un point M' de l'axe Oz.

On démontrera, d'une façon analogue, le théorème VII : le rayon vecteur finit par augmenter et le point m s'éloigne indéfiniment ; $\frac{dz}{ds}$ ayant une limite positive, la cote z du point M tend vers $+\infty$.

9. Les raisonnements précédents laissent de côté le cas intermédiaire où le cercle (C) passe par h . Le point p' est alors en h et il faut examiner à part l'allure de (M) lorsque p tend vers h .

La remarque, fondamentale dans ce qui précède, que la tangente à la trajectoire de m est bien déterminée par la position de ce point (distinct de B) paraît en défaut lorsque, m étant sur le prolongement Bh' de hB , le point p est en h . Mais, en suivant par continuité le déplacement de p sur le cercle, on voit qu'à un point m ainsi situé correspondra, pour tangente, la perpendiculaire au diamètre conjugué [par rapport à (E)] de la tangente en h à (C). Les courbes (m) sont donc régulières au voisinage des points de Bh' ; c'est seulement le sens de parcours qui diffère des deux côtés de Bh' .

Si donc, dans le cas envisagé dans ce paragraphe, on suppose que p tende vers h , la trajectoire de m aboutit à un point m' (distinct de B) de la demi-droite Bh' . Mais la courbe (M) s'élève indéfiniment : en effet, la tangente à cette courbe tend à devenir parallèle (et de même sens) à la droite OR correspondant au point H ; cette droite a même sens et direction que la partie positive de Oz .

$$\frac{dz}{ds}$$

tend donc vers $+\infty$ et, comme s reste fini, z tend vers $+\infty$.

On voit que dans tous les cas, et ce sera fondamental pour la suite, on a le théorème suivant :

VIII. *Si l'on suit une trajectoire (M) correspondant à un glissement initial non nul, on arrive en un point de l'axe Oz (glissement nul), à moins que la trajectoire ne s'élève indéfiniment dans le sens des z positifs.*

10. La discussion générale sera maintenant très simple.

Admettons d'abord qu'à l'instant initial *il n'y ait pas de glissement* : M_0 est un point de l'axe Oz et l'on a le choix entre deux hypothèses :

a. Pas de glissement pendant le choc. — Le point M se déplace sur l'axe des z dans le sens positif et le point M_1 y est déterminé par sa cote. Le point P est fixe en H , point le plus haut de l'ellipsoïde. La solution obtenue ainsi convient donc si l'angle zOH est inférieur ou égal à l'angle de frottement.

b. Un glissement s'établit pendant le choc. — Le glissement initial devant être *opposé* à la composante tangentielle de la réaction initiale, il faut que le point p soit, au début du choc, en l'un des points limites et il faut que ce point limite p' appartienne à l'arc d'hyperbole Bh pour que (IV) le sens de déplacement correspondant soit opposé à Bp .

Le point p restera d'ailleurs en p' dans la suite du choc puisque, s'il se déplaçait sur le cercle (C), le sens de son déplacement (flèches de la figure) ne pourrait que le ramener au point p' . La courbe (M) sera donc une demi-droite s'écartant de Oz et s'élevant du côté des z positifs. Sur cette droite on fixera sans difficulté le point M_1 .

La solution ainsi obtenue convient si le point H est extérieur au cône de frottement ⁽¹⁾ de sorte que les hypothèses a et b s'excluent.

11. Supposons maintenant qu'il y ait glissement à l'instant initial. Si sur la courbe (M) , déterminée comme nous l'avons vu au paragraphe 5, on peut trouver le point M_1 de cote $-eW_0$, il n'y a nulle difficulté. Sinon, d'après le résultat VIII, en suivant cette courbe on arrivera nécessairement à l'axe Oz . Il faut donc diviser le choc en deux périodes : la première amène à une position M' du point M pour laquelle le glissement s'annule; on se trouve alors dans les conditions du paragraphe précédent et l'on aura *glissement* ou *non-glissement* suivant la valeur du coefficient de frottement.

12. Dans tous les cas, comme on vient de le voir, la solution de la question de choc posée sera unique et bien déterminée.

Le cas particulier où l'ellipsoïde φ a un plan de symétrie passant par Oz se présentera souvent en pratique : le point B est alors un des sommets de l'ellipse (E) et l'hyperbole d'Apollonius se réduit à l'axe correspondant et à une droite perpendiculaire. Il n'y a rien d'essentiel à changer, par ailleurs, à l'analyse précédente.

Il y aurait, au contraire, quelques modifications à faire aux raisonnements précédents pour les appliquer aux cas où Oz est un des axes de l'ellipsoïde φ (B coïncidant avec H). Mais ces modifications sont très évidentes et il n'y a pas lieu d'y insister.

(1) Puisque le point limite p' doit être sur l'arc d'hyperbole Bh .

Nous n'insisterons pas non plus sur l'étude du choc (avec un seul point de contact) de deux solides (S) et (S') tous deux libres. On procédera comme au paragraphe 8 de notre précédent article, pour le cas de deux plaques libres et il n'y aura rien à changer à la théorie précédente que la définition de l'ellipsoïde φ .

CORRESPONDANCE.

M. Philbert du Plessis. — La courbe envisagée au paragraphe IV de l'intéressante étude de M. Estève [*Sur la formule d'Holditch* (*N. A.*, mai 1923, p. 290)] avait fait l'objet d'une étude spéciale de M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales* (1891, p. 87). On trouve précisément dans cette étude la propriété qui termine le paragraphe IV de l'article de M. Estève.

BIBLIOGRAPHIE.

NOTIONS SOMMAIRES DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par *M. d'Ocagne*. 1 vol. 25 × 16 de 25 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1924. Prix : 3^{fr}.

L'Auteur réunit dans cet opuscule, que tous les étudiants méditeront avec fruit, les notions fondamentales de géométrie projective utilisées dans son Cours de Géométrie de l'École Polytechnique : propriétés du rapport anharmonique; divisions et faisceaux homographiques; génération des coniques et quadriques; théorème de Desargues; pôles et polaires.

Signalons, entre autres détails intéressants, la méthode si intuitive employée pour rattacher au théorème de Desargues la notion de polaire.

Les théories esquissées dans ce petit Livre sont souvent, dans les Cours de Spéciales, dispersées en divers Chapitres. Cet exposé d'ensemble, fait d'un point de vue purement géométrique et où M. M. d'Ocagne n'a pas manqué d'exercer les précieuses qualités d'élégance qui caractérisent tous ses ouvrages, présente aux élèves les notions essentielles sous la forme la plus frappante, la plus aisée à retenir. Il rendra grand service et le lecteur en retirera, non seulement un profit direct, mais, ce qui est peut-être mieux encore, un grand plaisir et un exemple de la plus fine qualité.

H. V.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2388.

(1919, p. 39.)

Dans un quadrilatère complet, les orthopôles de chacun des côtés, pris par rapport au triangle formé par les trois autres côtés, sont quatre points collinéaires avec les orthocentres des quatre triangles obtenus en prenant les côtés trois à trois.

En déduire que, dans un triangle, l'orthopôle d'une droite appartient à la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre sur la transversale réciproque de cette droite.

R. GOORMAGHTIGH.

SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Considérons le quadrilatère complet formé par un triangle ABC et une transversale A'B'C'. D'après des théorèmes connus, les orthocentres des quatre triangles obtenus en prenant BC, CA, AB, A'B'C' trois à trois appartiennent à la directrice Δ de la parabole π tangente à ces droites, et Δ est

l'axe radical des cercles de diamètres AA' , BB' , CC' . Or ces cercles ne sont autres que les cercles podaires de A' , B' , C' par rapport au triangle ABC , et, d'après le théorème de T. Lemoyne (*N. A.*, 1904, p. 400), ces cercles ont même puissance par rapport à l'orthopôle de $A'B'C'$ par rapport au triangle ABC ; cet orthopôle appartient donc à Δ , ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

La deuxième partie résulte ensuite de cette proposition connue que la transversale réciproque de $A'B'C'$ par rapport au triangle ABC est parallèle à l'axe de π .

Autres solutions par MM. BOUVAIST, THÉBAULT, SERBAN, A. GHEORGHIN.

2422.

(1919, p. 360.)

On considère les ellipses U qui ont un même foyer F et un même sommet B du petit axe. Trouver :

1° L'enveloppe de ces courbes; 2° le lieu des sommets A et A' du grand axe; 3° le lieu du centre de courbure en B; 4° le lieu du centre de courbure au second sommet B' du petit axe.

J. NEUBERG.

SOLUTION

Par René MARCHAY.

1° Le grand axe des ellipses est constant et le foyer mobile F' décrit un cercle. Soit donc, en généralisant un peu la question, à trouver l'enveloppe des coniques qui ont un foyer fixe F , dont l'autre foyer F' décrit une circonférence (F') et dont l'axe focal est constant.

M étant commun à deux de ces coniques qui correspondent à deux positions infiniment voisines F' et F'_1 du foyer mobile, on aura

$$MF \pm MF' = 2a = MF \pm MF'_1,$$

d'où

$$MF' = MF'_1;$$

MF' est donc normale à (F'). L'enveloppe cherchée est donc une conique ayant pour foyers F et le centre de (F'). Dans le cas présent cette enveloppe est l'ellipse de foyers B et F et de grand axe $3a$.

2° Soit C le centre d'une ellipse U . Son lieu est le cercle (C)

de diamètre FB ; on en conclut que les extrémités du grand axe décrivent un limaçon de Pascal (cardioïde ayant en F le rebroussement).

3° et 4° Le centre de courbure D en B est à l'intersection de BC et du cercle circonscrit à BFF' ; l'angle \widehat{BFD} est donc droit et le lieu de D est la perpendiculaire élevée en F à la droite BF .

Soit enfin D' le centre de courbure en B' ; on a

$$B'D' = BD.$$

Or B' décrit le cercle de centre F et de rayon BF , le lieu de D' est donc une strophoïde droite.

Autres solutions par l'Auteur et MM. BOUVAIST, CONVERS, EDMONDSON, ROY.

2423.

(1919, p. 260.)

On considère les coniques U qui ont même axe focal et même foyer F , et le second foyer F' en un point quelconque d'une droite donnée. Trouver :

1° Le lieu des sommets A et A' de l'axe focal; 2° l'enveloppe des directrices d, d' ; 3° l'enveloppe des coniques U .

J. NEUBERG.

SOLUTION

Par G. ROY.

1° Le centre O des coniques U décrit une droite Δ_1 homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$ de la droite Δ lieu de F' , le centre d'homothétie étant F . Les sommets A et A' étant tels que

$$OA = OA' = a,$$

ces deux points se déplacent sur une conchoïde de Nicomède.

2° Soient D et D' les points de rencontre de d et d' avec l'axe, on a

$$\overline{OF} \cdot \overline{OD} = - \overline{OF} \cdot \overline{OD'} = a^2,$$

le lieu des points D et D' est donc formé de deux conchoïdes

de Sluze jumelles, mais ce lieu est la podaire des enveloppes de d et d' par rapport à F qui sont, par suite, des paraboles. Déterminons leurs foyers. Si I désigne l'intersection de d avec la parallèle à Δ_1 menée par K tel que, O_1 étant la projection de F sur Δ_1 ,

$$\overline{O_1F} \cdot \overline{O_1K} = a^2,$$

et si F_1 est le point de rencontre de O_1F avec la perpendiculaire en I à d , on a

$$\overline{O_1F} \cdot \overline{O_1K} = \overline{OF} \cdot \overline{OD}$$

et les deux points O et O_1 ont même puissance par rapport au cercle ω de diamètre IF . On a donc

$$O\omega = O_1\omega$$

et la perpendiculaire au milieu de OO_1 passe par ω , elle passe aussi par le milieu de KI et

$$\overline{O_1O} = \overline{KI}.$$

Les triangles rectangles FOO_1 et F_1IK sont donc égaux et

$$\overline{O_1F} = \overline{KF_1}.$$

La parabole cherchée, enveloppe de d , a donc pour foyer F_1 et pour tangente au sommet la parallèle à Δ menée par K .

Si E et E' sont les points de rencontre de d et d' avec FO_1 , on a

$$\overline{EE'} \cdot \overline{FO_1} = 2a^2$$

et par suite $\overline{EE'}$ est constant et l'enveloppe de d' se déduit de celle de d par translation.

3° Si M est le point caractéristique d'une conique U , on voit facilement que MF' est perpendiculaire sur Δ tel que

$$MF' + MF = 2a \quad \text{ou} \quad |MF' - MF| = 2a.$$

Et l'enveloppe est constituée par le lieu des points tels que la somme de leurs distances ou la différence de leurs distances à un point et à une droite est constante : on sait que ces lieux sont des arcs de parabole dont les limites sont faciles à déterminer.

Autres solutions par l'Auteur et MM. BOUVAIST, CONVERS, EDMONDSON, MARCHAY.

2434.

(1920, p. 29.)

Étant donné une sphère S , l'un de ses diamètres Δ , deux de ses tangentes Δ_1 et Δ_2 parallèles à Δ , dont les points de contact soient diamétralement opposés, enfin les grands cercles C_1 et C_2 de cette sphère, dont les plans, menés par le diamètre perpendiculaire au plan de Δ_1 et Δ_2 , sont inclinés à 45° sur Δ , on considère le conoïde droit Γ , de directrice Δ , qui passe par les cercles C_1 et C_2 , puis les conoïdes droits Γ_1 et Γ_2 , circonscrits à S , qui ont respectivement pour directrices Δ_1 et Δ_2 . On demande de calculer les volumes des solides constitués par :

- 1° La partie du conoïde Γ limitée aux cercles C_1 et C_2 ;
- 2° La partie du même conoïde intérieure au cylindre circonscrit à la sphère S et d'axe Δ ;
- 3° L'ensemble de la sphère et des conoïdes Γ_1 et Γ_2 limités respectivement à leurs directrices Δ_1 et Δ_2 .

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Prenant pour direction de la verticale celle de l'axe Δ , pour plan de front celui qui contient cet axe et les tangentes Δ_1 et Δ_2 , considérons les projections horizontale et verticale de la figure définie dans l'énoncé.

Dans un plan horizontal quelconque, on a les génératrices m_1m_2 et n_1n_2 du conoïde Γ , d_1r_1 et d_1s_1 du conoïde Γ_1 , d_2r_2 et d_2s_2 du conoïde Γ_2 , et l'on voit que, si σ est l'aire du triangle om_1n_1 , σ' celle du secteur circulaire $op_1d_1q_1$, σ'' celle du triangle mixtiligne $d_1r_1c_1s_1$, et si R est le rayon de la sphère, on a, pour les trois volumes demandés,

$$V = \int_0^R \int_0^{\sqrt{z}} \sigma dz,$$

$$V' = \int_0^R \int_0^{\frac{R}{\sqrt{z}}} \sigma' dz,$$

$$V'' = \frac{4}{3} \pi R^3 + \int_0^R \int_0^R \sigma'' dz.$$

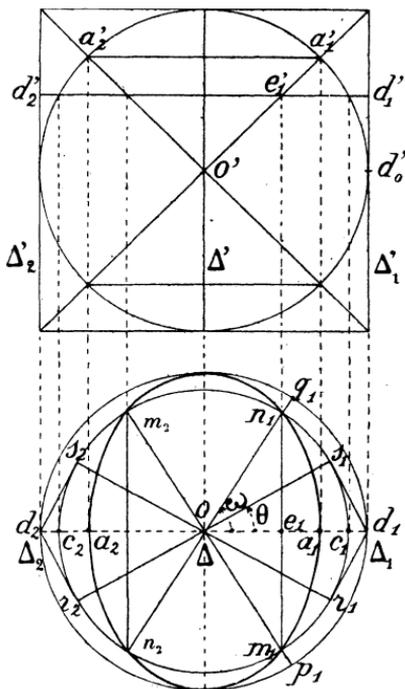
Les aires σ , σ' et σ'' sont faciles à déterminer. En effet, on a immédiatement

$$oe_1 = z, \quad e_1 n_1 = \sqrt{R^2 - 2z^2}, \quad \text{tang } \omega = \frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z},$$

d'où

$$\sigma = z \sqrt{R^2 - 2z^2},$$

$$\sigma' = R^2 \text{ arc tang } \frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z}.$$



D'autre part, puisque

$$d_1 s_1 = R \sin \theta \quad \text{et} \quad os_1 = R \cos \theta,$$

$$\sigma'' = R^2 (\sin \theta \cos \theta - \omega \cos^2 \theta).$$

D'ailleurs, comme tangentes issues d'un même point à une même sphère, on a

$$z = d'_0 d'_1 = d_1 s_1 = R \sin \theta,$$

d'où

$$dz = R \cos \theta d\theta,$$

θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ quand z varie de 0 à R .

Finalement, on obtient

$$V = 4 \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} z \sqrt{R^2 - 2z^2} dz,$$

$$V' = 4 R^2 \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \text{arc tang} \frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z} dz,$$

$$V'' = \frac{4\pi}{3} R^3 + 4 R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta \cos^2 \theta - \theta \cos^3 \theta) d\theta.$$

Nous allons calculer successivement ces trois intégrales que nous représenterons par I , I' et I'' .

1° Pour le calcul de I , il suffit d'effectuer le changement de variable défini par

$$R^2 - 2z^2 = u^2,$$

pour lequel

$$-2z dz = u du.$$

Il transforme l'intégrale en

$$I = \frac{1}{2} \int_0^R u^2 du = \frac{R^3}{6}.$$

Par suite,

$$V = \frac{2}{3} R^3.$$

2° Passons au calcul de I' . Si l'on pose

$$\frac{\sqrt{R^2 - 2z^2}}{z} = t,$$

d'où

$$z = \frac{R}{(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}},$$

on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int \text{arc tang } t \cdot dz &= z \cdot \text{arc tang } t - \int z \frac{dt}{1+t^2} \\ &= z \cdot \text{arc tang } t - R \int \frac{dt}{(1+t^2)(t^2+2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

(239)

Or, pour $z = 0$ et $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$, on a respectivement $t = \infty$ et $t = 0$. Il s'ensuit que

$$I' = R \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Effectuons dès lors le changement de variable défini par

$$\sqrt{t^2 + 2} = t + \sqrt{2u}$$

ou

$$t = \frac{1-u}{\sqrt{2u}},$$

pour lequel on a

$$t^2 + 1 = \frac{1+u^2}{2u}, \quad t^2 + 2 = \frac{(1+u)^2}{2u}, \quad dt = \frac{-(u+1)}{2\sqrt{2u}\sqrt{u}} du.$$

Comme, d'autre part, pour $t = 0$ et $t = \infty$, on a $u = 1$ et $u = 0$, il vient, par ces substitutions,

$$I' = R \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi R}{4}.$$

Dès lors,

$$V' = \pi R^3.$$

3° Les formules classiques de la multiplication des arcs permettent bien aisément de mettre l'intégrale I'' sous la forme

$$I'' = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin \theta + \sin 3\theta - \theta(3 \cos \theta + \cos 3\theta)] d\theta,$$

ou, si l'on applique une intégration par parties au terme contenant θ en facteur,

$$\begin{aligned} I'' &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3}(3 \cos \theta + \sin 3\theta) - \frac{\theta}{3}(9 \sin \theta + \sin 3\theta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9}(27 \cos \theta + \cos 3\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[-\frac{1}{9}(9 \cos \theta + \cos 3\theta) - \frac{\theta}{12}(9 \sin \theta + \sin 3\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{10}{9} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Portant cette valeur dans l'expression de V'' , on a

$$V'' = \frac{40}{9} R^3.$$

Il est assez curieux que les volumes V et V'' , bien que s'appliquant à des solides dans la délimitation desquels interviennent des corps ronds, soient indépendants du nombre π ; quant à V' , l'intérêt qui s'y attache tient à l'extrême simplicité de l'expression où figure ce nombre π .

2457.

(1922-1923, p. 190.)

*On donne une conique, deux points A et A' sur la courbe, un point P dans son plan. Si AM et A'M' sont deux cordes variables de la conique telles que la droite MM' passe au point P, les droites AM et A'M' rencontrent une droite fixe menée par ce point en des points I et I' qui sont en involu-
tion sur cette droite.*

G. F.

SOLUTION

Par J. RODRIGUEZ BACHILLER.

La correspondance entre I et I' est évidemment algébrique et $(1, 1)$, donc *homographique*. Pour vérifier qu'elle est *involution*, joignons IA' qui coupe la conique donnée en N' , puis PN' qui détermine sur la conique donnée le point N ; il reste à montrer que la droite AN passe par I' . C'est ce qui est évident parce que le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $AMM'A'N'NA$ prouve que les points de rencontre des côtés $(AM, A'N') \equiv I, (MM', NN') = P, (M'A', NA) \equiv I'$, sont en ligne droite.

Autres solutions par MM. BOUVAIST, HARMEGNIES, PIEDVACHE.



[K'9a]

SUR LES DROITES MOYENNES D'UN TRIANGLE ;

PAR RAOUL BRICARD.

1. Le principe de la *géométrie de direction* de Laguerre consiste (dans le plan) à considérer une droite comme *support* de deux *semi-droites*, distinguées par leurs sens. En regardant avec Riemann le plan comme formé de plusieurs *feuillet*s superposés, entre lesquels on établit certaines connexions, on peut aller plus loin, et une droite apparaît comme support de $n^{\text{ièmes-de-droite}}$, le nombre n pouvant être arbitraire.

Pour simplifier l'exposition, je supposerai dans ce qui suit n égal à trois. Le théorème de Morley, sur les trisectrices d'un triangle (¹), se présentera comme application immédiate. Je dirai ensuite quelques mots du cas général.

2. Soient P_0, P_1, P_2 trois feuillets plans superposés à un même plan P . Désignons par D_0, D_1, D_2 trois droites orientées, appartenant respectivement à P_0, P_1 , et P_2 et superposées à une même droite D orientée du plan P (*semi-droite* de Laguerre). On dira que les D_i sont des *tiers-de-droite orientés*, ayant D pour *support* commun. Une droite non orientée de P peut aussi être

(¹) *N. A.*, 1922-1923, p. 254.

considérée comme support de six tiers-de-droite orientés (¹).

Il est commode de pouvoir donner aux indices qui distinguent les feuillets P_i des valeurs entières quelconques, étant bien entendu que les feuillets P_i et P_j coïncident, si l'on a

$$i \equiv j \pmod{3}.$$

De même pour les D_i .

3. Dans le plan P , traçons un axe Ox , par exemple horizontal et dirigé de gauche à droite, et fendons les P_i suivant Ox . Soudons le bord supérieur du feuillet P_i avec le bord inférieur du feuillet P_{i+1} . De la sorte, un point M , partant d'une position initiale contenue par exemple dans P_0 et tournant autour de O dans le sens positif, passe successivement dans P_1 et P_2 et revient dans P_0 après avoir fait trois tours.

4. *Angle de deux tiers-de-droite.* — Soient D_i et Δ_j deux tiers-de-droite, supposés d'abord passer par le point O . On désignera par la notation $\angle(D_i, \Delta_j)$ le plus petit angle dont il faut faire tourner D_i dans le sens positif pour l'amener en coïncidence avec Δ_j . Cet angle est toujours compris entre 0 et 6π . Il est clair que l'on a

$$(1) \quad \angle(D_i, \Delta_j) + \angle(\Delta_j, D_i) = 6\pi.$$

En particulier, Ox étant considéré comme apparte-

(¹) Les droites dont il sera question dans cet article étant presque toujours orientées, ainsi que les tiers-de-droite, j'omettrai le plus souvent de le spécifier.

nant à P_0 , l'angle $\sphericalangle (Ox, D_i)$ sera dit *orientation* de D_i .

Si D_i et Δ_j occupent des positions quelconques, l'angle $\sphericalangle (D_i, \Delta_j)$ est par définition l'angle des tiers-de-droites parallèles à D_i, Δ_j et de mêmes sens, menés par le point Θ .

5. *Trisectrices d'un angle.* — Soient encore les tiers-de-droite D_i et Δ_j passant par l'origine. Il existe un tiers-de-droite unique L_k , passant par l'origine et tel que l'on ait

$$(2) \quad \sphericalangle (D_i, L_k) = \frac{1}{3} \sphericalangle (D_i, \Delta_j),$$

L_k est la *trisectrice* de l'angle $\sphericalangle (D_i, \Delta_j)$.

Si, laissant fixes les supports D et Δ , on fait varier les indices i et j , on reconnaît aisément que les diverses trisectrices L_k ont pour supports les six rayons d'un hexagone régulier.

L'angle $\sphericalangle (\Delta_j, D_i)$ a également une trisectrice M_l , définie par

$$(3) \quad \sphericalangle (\Delta_j, M_l) = \frac{1}{3} \sphericalangle (\Delta_j, D)$$

Ajoutant (2) et (3) en tenant compte de (1), on obtient

$$\sphericalangle (D_i, L_k) + \sphericalangle (\Delta_j, M_l) = \frac{1}{3} 6\pi = 2\pi.$$

On peut aussi écrire, en introduisant les supports des divers tiers-de-droite qui figurent dans la notation précédente,

$$\sphericalangle (D, L) + \sphericalangle (\Delta, M) = 2\pi,$$

ce qui s'interprète ainsi : l'angle $\sphericalangle (D, \Delta)$ et l'angle $\sphericalangle (L, M)$ ont la même bissectrice. Cette remarque

facilite le tracé de l'une des trisectrices L, M , quand on connaît l'autre.

Les définitions données permettent de considérer les trisectrices comme tiers-de-droite. Mais, pratiquement, on peut ne faire intervenir que les *supports* des trisectrices, c'est-à-dire considérer celles-ci comme des droites orientées, dans le plan ordinaire. Cela résulte du fait que Δ_j est bien déterminé par la connaissance de D_i et de L . On a en effet d'après (2)

$$\angle (D_i, \Delta_j) = 3 \angle (D_i, L_k).$$

Si l'on fait varier l'indice k , L restant fixe, le second membre et par conséquent le premier ne varient que par multiples de 6π , ce qui ne modifie pas Δ_j .

On a supposé D_i et Δ_j passant par l'origine. Le cas général se ramène à ce cas particulier par une translation.

6. *Expressions analytiques.* — Pour le traitement analytique de la théorie qui nous occupe, il est indiqué d'employer les *coordonnées isotropes*. On sait que, (X, Y) étant les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point, les *coordonnées isotropes* de celui-ci sont les nombres

$$x = X + Yi, \quad y = X - Yi,$$

d'où l'on tire

$$X = \frac{1}{2}(x + y), \quad Y = \frac{1}{2i}(x - y).$$

Soit D une droite orientée du plan P , passant par l'origine. Désignons par φ l'angle $\angle (Ox, D)$, compris entre 0 et 2π . La droite support de D a pour équation en coordonnées cartésiennes

$$-\sin \varphi X + \cos \varphi Y = 0,$$

et en coordonnées isotropes

$$-\sin \varphi (x + y) + \cos \varphi \frac{x - y}{i} = 0,$$

ou

$$(\cos \varphi - i \sin \varphi) x - (\cos \varphi + i \sin \varphi) y = 0,$$

ou encore

$$e^{-i\varphi} x - e^{i\varphi} y = 0.$$

Posons

$$e^{i\varphi} = u.$$

L'équation obtenue s'écrit

$$x - u^2 y = 0.$$

On dira que u est le *paramètre* de la droite orientée D . La droite orientée opposée, qui a le même support, a pour paramètre $-u$.

Considérons maintenant un tiers-de-droite D_i , passant encore par l'origine. Soit L la trisectrice (orientée) de l'angle $\sphericalangle (Ox, D_i)$. Comme on l'a vu, la connaissance de L détermine parfaitement D_i . Si l'on pose

$$\sphericalangle (Ox, L) = \theta, \quad e^{i\theta} = t,$$

le support de D_i a pour paramètre $e^{3i\theta} = t^3$ et a pour équation

$$x - t^6 y = 0.$$

La droite non orientée représentée par l'équation précédente est le support de six tiers-de-droite.

Précisons. Donnons-nous $t^6 = k$. Si l'on désigne par t l'une des racines de cette équation *binôme*, les cinq autres sont

$$-t, \quad \pm \omega t, \quad \pm \omega^2 t,$$

en posant

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Les tiers-de-droite correspondant à $t, \omega t, \omega^2 t$ sont

dans des feuillets différents. Les trois tiers-de-droite correspondant à $-t$, $-\omega t$, $-\omega^2 t$ sont opposés aux premiers.

Un tiers-de-droite quelconque, ne passant pas par l'origine en général, a pour support la droite d'équation

$$x - t^6 y - a = 0,$$

où a est une constante (satisfaisant à une condition facile à former, si l'on veut que la droite soit réelle).

Le tiers-de-droite correspondant à une valeur donnée de t sera désigné par la notation $D(t, a)$. On dira que t est le *paramètre* de ce tiers-de-droite (le paramètre de la *droite orientée* du plan P, support de D_i , est t^3).

7. *Droite moyenne de trois tiers-de droite.* — Soient trois tiers-de-droite $D(t_1, a_1)$, $D(t_2, a_2)$, $D(t_3, a_3)$, d'orientations toutes différentes, $D(t_i, a_i)$ ayant pour support la droite

$$x - t_i^6 y - a_i = 0.$$

Considérons la droite ayant pour équation

$$(4) \quad \| x - t_i^6 y - a_i \quad t_i^2 \quad t_i^4 \| = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Pour développer cette équation sous une forme qui ne soit pas trop prolix, posons

$$t_i^2 - t_j^2 = (ij).$$

On a les identités

$$\| 1 \quad t_1^2 \quad t_1^4 \| = (21)(31)(32),$$

$$\| t_1^6 \quad t_1^2 \quad t_1^4 \| = t_1^2 t_2^2 t_3^2 (21)(31)(32),$$

$$\| a_i \quad t_i^2 \quad t_i^4 \| = a_1 t_2^2 t_3^2 (32) + a_2 t_3^2 t_1^2 (13) + a_3 t_1^2 t_2^2 (21),$$

et (4) s'écrit

$$(5) \quad (21)(31)(32)(x - t_1^2 t_2^2 t_3^2 y) \\ = a_1 t_2^2 t_3^2 (32) + a_2 t_3^2 t_1^2 (13) + a_3 t_1^2 t_2^2 (21).$$

Cette droite est le support de deux droites orientées, au sens ordinaire. L'une de celles-ci a pour paramètre $t_1 t_2 t_3$.

Je l'appellerai *la droite moyenne* des trois tiers-de-droite $D(t_i, a_i)$ et je la désignerai par la notation $\Delta(t_1, a_1; t_2, a_2; t_3, a_3)$. Il suffit dans bien des cas d'écrire $\Delta(t_1, t_2, t_3)$.

Cette droite moyenne, définie par (4) ou (5), dépend en apparence du choix des coordonnées. On peut reconnaître par un calcul simple qu'il n'en est pas ainsi, et qu'elle ne dépend que des tiers-de-droite $D(t_i, a_i)$. Mais cette vérification est inutile, car la propriété d'invariance dont il s'agit résulte de la construction géométrique de $\Delta(t_1, t_2, t_3)$, qui sera exposée plus loin.

8. *Propriétés de la droite moyenne.* — 1° Si les $D(t_i, a_i)$ concourent, $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ passe par leur point commun. En effet l'équation du support de Δ est une combinaison linéaire des équations des supports des $D(t_i, a_i)$.

2° Si $D(t_1, a_1)$ et $D(t_2, a_2)$ ont un même support (à l'orientation près) non parallèle au support de $D(t_3, a_3)$, $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ est la trisectrice d'un angle dont les côtés ont mêmes supports que $D(t_1, a_1)$ et $D(t_3, a_3)$.

Il résulte d'abord du 1° que Δ concourt avec les deux supports considérés. En second lieu, $D(t_1, a_1)$ et

$D(t_2, a_2)$ ayant le même support, on a

$$t_2 = \alpha t_1,$$

α étant une racine sixième de l'unité (autre que 1). Le paramètre de Δ est

$$t_1 t_2 t_3 = \sigma t_1^2 t_3 = (\alpha t_1)^2 (\alpha^{-1} t_3).$$

Δ est donc la trisectrice de l'angle

$$\angle [D(\alpha t_1, a_1), D(\alpha^{-1} t_3, a_3)],$$

ce qui établit la proposition, α^{-1} étant comme α une racine sixième de l'unité.

3° *Étant donnés quatre tiers-de-droite* $D(t_i, a_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), *les quatre droites moyennes que l'on obtient en les combinant trois à trois sont concourantes.*

C'est là la propriété fondamentale. Il suffit de l'établir pour les trois droites

$$\Delta(t_2, t_3, t_4), \quad \Delta(t_3, t_1, t_4), \quad \Delta(t_1, t_2, t_4).$$

Or les équations de leurs supports sont respectivement

$$(32) (42) (43) (x - t_2^2 t_3^2 t_4^2 y) = a_2 t_2^2 t_3^2 t_4^2 (43) \\ + a_3 t_3^2 t_2^2 t_4^2 (24) + a_4 t_4^2 t_2^2 t_3^2 (32),$$

$$(13) (43) (41) (x - t_3^2 t_1^2 t_4^2 y) = a_3 t_3^2 t_1^2 t_4^2 (41) \\ + a_1 t_1^2 t_3^2 t_4^2 (34) + a_4 t_4^2 t_3^2 t_1^2 (13),$$

$$(21) (41) (42) (x - t_1^2 t_2^2 t_4^2 y) = a_1 t_1^2 t_2^2 t_4^2 (42) \\ + a_2 t_2^2 t_1^2 t_4^2 (14) + a_4 t_4^2 t_1^2 t_2^2 (21).$$

Multiplions les équations respectivement par

$$t_1^2 (41), \quad t_2^2 (42), \quad t_3^2 (43),$$

et ajoutons. On trouve, par un calcul simple, que le

résultat se réduit à $0 = 0$, ce qui établit la proposition.

9. *Droites moyennes d'un triangle.* — Soient D_1, D_2, D_3 les droites supports (non orientées) de $\Delta(t_i, a_i)$. Chacune d'elles supportant six tiers-droite, il semblerait *a priori* que le triangle $D_1 D_2 D_3$ donnât lieu à la construction de 6^3 droites moyennes. Mais le nombre des droites moyennes distinctes est bien moindre. En premier lieu, comme les t_i ne figurent dans les équations que par leurs carrés, il suffit de donner à chacun d'eux les valeurs $t_i, \omega t_i, \omega^2 t_i$ ($\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$). En second lieu, on reconnaît que $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ ne change pas, si l'on multiplie tous les t_i par ω ou par ω^2 , ce qui permet, dans la recherche de toutes les combinaisons, de donner à t_1 par exemple une valeur fixe. De la sorte, le nombre cherché se réduit à $3^2 = 9$. Ainsi *un triangle a neuf droites moyennes* (non orientées).

On peut écrire comme il suit les symboles de ces neuf droites

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} \Delta(t_1, t_2, t_3), \quad \Delta(t_1, \omega t_2, t_3), \quad \Delta(t_1, \omega^2 t_2, t_3), \\ \Delta(t_1, \omega t_2, \omega^2 t_3), \quad \Delta(t_1, t_2, \omega t_3), \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3), \\ \Delta(t_1, \omega^2 t_2, \omega t_3), \quad \Delta(t_1, \omega^2 t_2, \omega^2 t_3), \quad \Delta(t_1, \omega t_2, \omega t_3). \end{array} \right.$$

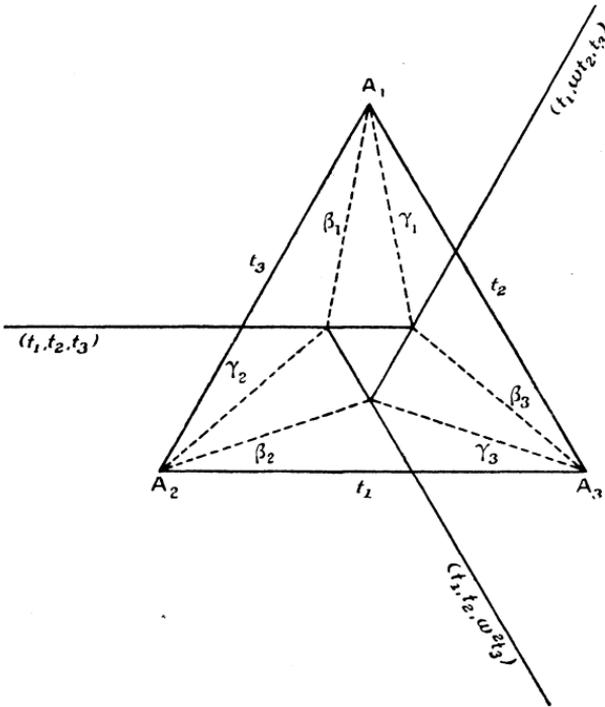
On reconnaît immédiatement, en considérant les paramètres de ces droites, que les trois droites figurant dans une même colonne sont parallèles et que trois droites figurant dans trois colonnes différentes sont parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral.

Il est clair qu'un symbole $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ ne change pas de signification si l'on y permute d'une manière quelconque t_1, t_2 et t_3 .

10. *Construction d'une droite moyenne.* — Soit à construire la droite moyenne $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ des trois tiers-de-droite $D(t_i, a_i)$ ($i = 1, 2, 3$) (voir *fig.*). Adjoignons à ceux-ci le tiers-de-droite $D(\omega t_1, a_1)$. D'après le n° 8, 3°, $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ concourt avec les deux droites

$$\Delta(t_1, \omega t_1, t_2) \text{ et } \Delta(t_1, \omega t_1, t_3).$$

Désignons par A_1, A_2, A_3 les sommets du triangle formé par les $D(t_i, a_i)$. La première des droites



indiquées ci-dessus est une certaine trisectrice de l'angle $A_2A_3A_1$ (n° 8, 2°), et l'on sait la construire avec précision.

De même la seconde droite est une trisectrice de l'angle $A_3A_2A_1$. $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ concourt aussi avec

$$\Delta(t_1, \omega^2 t_1, t_2) \text{ et } \Delta(t_1, \omega t_1, t_3).$$

La droite moyenne cherchée passant par deux points connus peut ainsi être construite.

On a bien vérifié qu'elle ne dépend pas du choix des coordonnées.

En regardant de plus près la construction précédente, on voit que $\Delta(t_1, t_2, t_3)$ concourt avec

$$\begin{aligned} &\Delta(t_1, \omega t_1, t_2) \text{ et } \Delta(t_1, \omega t_1, t_3), \\ &\Delta(t_1, \omega^2 t_1, t_2) \text{ et } \Delta(t_1, \omega^2 t_1, t_3), \\ &\Delta(t_2, \omega t_2, t_1) \text{ et } \Delta(t_2, \omega t_2, t_3), \\ &\Delta(t_2, \omega^2 t_2, t_1) \text{ et } \Delta(t_2, \omega^2 t_2, t_3), \\ &\Delta(t_3, \omega t_3, t_1) \text{ et } \Delta(t_3, \omega t_3, t_2), \\ &\Delta(t_3, \omega^2 t_3, t_1) \text{ et } \Delta(t_3, \omega^2 t_3, t_2). \end{aligned}$$

Ainsi une droite moyenne passe par six points de rencontre de trisectrices.

11. *Triangles de Morley.* — Prenons dans le tableau (T) (n° 9) deux droites moyennes dont les symboles appartiennent respectivement à la première et à la deuxième colonne, par exemple

$$\Delta(t_1, t_2, t_3) \text{ et } \Delta(t_1, \omega t_2, t_3).$$

Quel que soit le choix, il existe dans ces symboles deux des paramètres t_1, t_2, t_3 dont les coefficients sont proportionnels. Ici ce sont t_1 et t_3 . Dans la troisième colonne, on trouve le symbole $\Delta(t_1, \omega^2 t_2, t_3)$ présentant la même particularité. Associons aux deux symboles choisis en premier lieu l'un des deux autres symboles de cette colonne, par exemple

$$\Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3).$$

On a choisi, en définitive, les trois droites

$$\Delta(t_1, t_2, t_3), \quad \Delta(t_1, \omega t_2, t_3), \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3).$$

On vérifie que, dans deux quelconques de leurs symboles, les couples (t_1, t_2) ou (t_1, t_3) ou (t_2, t_3) ont leurs coefficients proportionnels. Je dirai que le triangle équilatéral formé par ces trois droites est un *triangle de Morley* du triangle $A_1 A_2 A_3$.

Comme on l'a vu, on peut choisir arbitrairement deux des côtés d'un tel triangle dans les deux premières colonnes de (T), et il y a encore deux choix possibles pour le troisième côté. Le nombre des triangles de Morley est donc égal à $3^2 \times 2 = 18$.

Cela posé, en raisonnant comme au n^o 9, on voit que

$$\Delta(t_1, t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, \omega t_2, t_3)$$

concourent avec les trisectrices

$$\beta_3 = \Delta(t_1, t_2, \omega t_2) \quad \text{et} \quad \gamma_1 = \Delta(t_2, \omega t_2, t_3);$$

$$\Delta(t_1, t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3)$$

concourent avec les trisectrices

$$\gamma_2 = \Delta(t_1, t_3, \omega^2 t_3) \quad \text{et} \quad \beta_1 = \Delta(t_2, t_3, \omega^2 t_3);$$

$$\Delta(t_1, \omega t_2, t_3) \quad \text{et} \quad \Delta(t_1, t_2, \omega^2 t_3) = \Delta(\omega t_1, \omega t_2, \omega t_3)$$

concourent avec les trisectrices

$$\gamma_3 = \Delta(t_1, \omega t_1, \omega t_2) \quad \text{et} \quad \beta_2 = \Delta(t_1, \omega t_1, t_3).$$

β_1 et γ_1 sont deux trisectrices, respectivement de l'angle $A_2 A_1 A_3$ et de l'angle $A_3 A_1 A_2$. Le produit de leurs paramètres est égal à $t_2^2 t_3^2$. Ce sont donc deux trisectrices *conjuguées*, en entendant par là que ces deux trisectrices sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $A_2 A_1 A_3$. On le reconnaît immédiatement en se reportant à la signification des para-

mètres. De même β_2 et γ_2 , β_3 et γ_3 sont des trisectrices conjuguées des angles A_2 et A_3 du triangle $A_1A_2A_3$. Ainsi :

Un triangle de Morley a chacun de ses sommets aux points de rencontre de deux trisectrices du triangle $A_1A_2A_3$, chaque angle intervenant par deux trisectrices conjuguées.

En particulier, si les trisectrices β_i et γ_i sont les six trisectrices intérieures (cas de la figure), elles se rencontrent deux à deux aux sommets d'un triangle de Morley. Le théorème est évident si $A_1A_2A_3$ est équilatéral, et il s'étend par continuité à un triangle quelconque.

C'est là le théorème de Morley dans le cas le plus simple.

Il est intéressant de tracer la configuration complète. On ne pourrait malheureusement le faire ici qu'à une échelle trop réduite pour la clarté.

12. Extension de la théorie au cas général. — Si l'on écrit l'équation d'une droite sous la forme

$$x - t^{2n}y - a = 0,$$

on peut considérer cette droite comme support de $2n$ *n*^{èmes}-de-droite orientés, correspondant aux $2n$ paramètres

$$\pm t, \pm \omega t, \dots, \pm \omega^{n-1}t,$$

où ω est une racine primitive de l'équation binôme

$$\omega^n - 1 = 0.$$

On a supposé le plan P recouvert de n feuillets P_0, \dots, P_{n-1} , fendus suivant Ox , le bord supérieur du feuillet P_h étant soudé au bord inférieur du feuillet

P_{h+1} ($P_n = P_0$). Les $n^{\text{ièmes-de-droite}}$ opposés de paramètres $\pm \omega^h t$ sont dans le feuillet P_h .

Étant donnés n $n^{\text{ièmes-de-droite}}$

$$D(t_i, a_i) = x - t_i^{2n} y - a_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on appelle *droite moyenne* des $D(t_i, a_i)$ la droite orientée du plan P dont le support a pour équation

$$\|x - t_i^{2n} y - a_i \quad t_i^2 \dots t_i^{2(n-1)}\| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et qui a pour paramètre $t_1 t_2 \dots t_n$.

Si l'on se donne seulement les supports des $D(t_i, a_i)$, le nombre des supports de droites moyennes est égal à n^{n-1} .

Le théorème fondamental du n° 8 s'étend au cas général : *étant donnés $n + 1$ $n^{\text{ièmes-de-droite}}$, les $n + 1$ droites moyennes obtenues en les combinant n à n sont concourantes*. Cela résulte d'un calcul de déterminants.

Cette propriété permet de construire les droites moyennes de n $n^{\text{ièmes-de-droite}}$ donnés, en opérant d'une manière analogue à celle qui a été exposée pour $n = 3$.

[O¹2e]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES THÉORÈMES DE JAMET ;

PAR R. GOORMAGHTIGH.

Un Mémoire publié en 1887 par M. V. Jamet dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (1) con-

(1) Série 3, t. IV, supplément.

tient trois théorèmes remarquables qu'on peut énoncer ainsi :

Si deux courbes triangulaires symétriques d'indices n_1 et n_2 , ayant même triangle de symétrie (ou deux courbes de Lamé d'indice n_1 et n_2 ayant mêmes axes) se touchent en un point, leurs courbures en ce point sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$.

Si deux surfaces tétraédrales symétriques d'indices n_1 et n_2 , ayant même tétraèdre de symétrie (ou deux surfaces de Lamé d'indices n_1 et n_2 ayant même axes) se touchent en un point, leurs indicatrices en ce point sont homothétiques, le rapport d'homothétie étant $(n_2 - 1)^{\frac{1}{2}} : (n_1 - 1)^{\frac{1}{2}}$.

Si deux courbes tétraédrales symétriques d'indices n_1 et n_2 , ayant même tétraèdre de symétrie, se touchent en un point, leurs plans osculateurs en ce point coïncident et leurs courbures sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$.

1. Considérons maintenant ⁽¹⁾ les courbes ayant pour équation, en coordonnées cartésiennes,

$$(1) \quad \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^n = 0,$$

f_1, f_2, f_3 désignant trois fonctions quelconques des deux variables x, y . A chaque valeur de l'indice n , il correspond une courbe (1) ayant en un point donné une tangente donnée. Dérivant (1) par rapport à x , on a l'équa-

(1) Une note présentée à l'Académie des Sciences (18 novembre 1918) résume les résultats qui suivent ainsi que quelques autres généralisations des théorèmes de Jamet.

tion

$$(2) \quad \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^{n-1} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} y' \right) = 0,$$

qui, combinée avec (1), donne lieu aux relations

$$(3) \quad \frac{\alpha_1 [f_1(x, y)]^{n-1}}{\Phi_1(x, y, y')} = \frac{\alpha_2 [f_2(x, y)]^{n-1}}{\Phi_2(x, y, y')} = \frac{\alpha_3 [f_3(x, y)]^{n-1}}{\Phi_3(x, y, y')},$$

dans lesquelles les fonctions Φ ne dépendent que de x, y, y' . D'autre part, dérivons encore (1) par rapport à x , nous aurons l'équation

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^{n-2} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} y' \right)^2 \\ + \sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]^{n-1} \\ \times \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f_i}{\partial y} y'' \right) = 0, \end{aligned}$$

qui, par des calculs faciles et eu égard à (3), peut se mettre sous la forme

$$nK + L + \frac{J}{\rho} = 0,$$

où ρ désigne le rayon de courbure de (1) au point (x, y) et où K, L, J sont des fonctions de x, y, y' seuls. La dernière relation donne lieu aux théorèmes suivants :

Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions données de deux variables; si trois courbes

$$\sum_1^3 \alpha_i [f_i(x, y)]' = 0,$$

d'indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un point, leurs

rayons de courbure ρ_1, ρ_2, ρ_3 correspondant à ce point sont liés par la relation

$$(4) \quad \frac{n_2 - n_3}{\rho_1} + \frac{n_3 - n_1}{\rho_2} + \frac{n_1 - n_2}{\rho_3} = 0.$$

Si quatre des courbes considérées sont tangentes en un même point, le rapport anharmonique de leurs courbures en ce point est égal à celui de leurs indices.

2. APPLICATIONS. — a. *Coordonnées barycentriques.* — On déduit des développements précédents des propriétés identiques pour les courbes dont l'équation en coordonnées barycentriques s'écrit

$$\sum_1^3 \alpha_i [f_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3)]^n = 0.$$

Quand les fonctions f sont linéaires et quand on prend $n_3 = 1$, α_3 est nul, et la relation (4) donne le théorème de Jamet.

b. *Courbes $ax^l + by^m + c = 0$.* — Soient A et B les points où la tangente en un point M de la courbe

$$(5) \quad ax^l + by^m + c = 0$$

coupe les axes Ox, Oy, D et E ceux où la normale coupe ces axes, A', B' les points où cette normale rencontre les perpendiculaires élevées en A sur Ox et en B sur Oy; posons A'D = q , B'E = p . Pour étudier la courbure de (5) au point M, prenons

$$f_1(x, y) = x^{\frac{l}{m}}, \quad f_2(x, y) = y, \quad f_3(x, y) = 1.$$

Lorsque $n_1 = m$, (1) donne la courbe (5); pour $n_2 = 1$

et $n_3 = \frac{m}{l}$, on a des paraboles dont les équations ont les formes

$$ax^{\frac{l}{m}} + by + c = 0, \quad ax + by^{\frac{m}{l}} + c = 0;$$

d'après une propriété connue, on aura donc

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{l}{m} \right), \quad \frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{q} \left(1 - \frac{m}{l} \right)$$

et, par suite (1),

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1-l}{p} + \frac{1-m}{q}.$$

c. Courbes $\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n = a$. — Soient (a_1, b_1) , (a_2, b_2) les coordonnées de deux points F_1, F_2 du plan et posons

$$f_1(x, y) = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2},$$

$$f_2(x, y) = \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}, \quad f_3(x, y) = 1;$$

on obtient alors les courbes dont l'équation en coordonnées bipolaires a la forme

$$(6) \quad \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n = a.$$

Pour $n = 1$ et $n = 2$ cette équation représente respectivement une ovale de Descartes et un cercle. Soient M un point de la courbe (6), F'_1 et F'_2 les points où les perpendiculaires élevées sur MF_1 et MF_2 en F_1 et F_2 rencontrent la normale en M à la courbe, F''_1 et F''_2 ceux où les perpendiculaires élevées en F'_1 et F'_2 sur la normale coupent les droites MF_1 et MF_2 , N et T les intersections de la normale avec F_1, F_2 et F''_1, F''_2 . Les points N et T sont les centres de courbure du cercle et de l'ovale de Descartes, qui correspondent aux cas de $n = 2$ et

(1) R. GODEFROY, *Journal de l'École Polytechnique*, 1892, p. 37.

$n = 1$ et qui touchent la courbe considérée en M ; on aura donc, C désignant le centre de courbure de la courbe (6) en M ,

$$\frac{1}{MC} = \frac{n-1}{MN} + \frac{2-n}{MT}.$$

Pour $n = \frac{3}{2}$, la division $MNTC$ est harmonique.

3. Les développements du paragraphe 1 s'étendent sans difficulté au cas des surfaces; on obtient alors ce théorème :

Si trois surfaces

$$\begin{aligned} & \alpha_1[f_1(x, y, z)]^n + \alpha_2[f_2(x, y, z)]^n \\ & + \alpha_3[f_3(x, y, z)]^n + \alpha_4[f_4(x, y, z)]^n = 0, \end{aligned}$$

correspondant aux indices n_1, n_2, n_3 se touchent en un point, leurs directions asymptotiques en ce point sont en involution et leurs courbures moyennes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont liées par la relation.

$$(n_2 - n_3)\sigma_1 + (n_3 - n_1)\sigma_2 + (n_1 - n_2)\sigma_3 = 0.$$

Si l'on suppose les fonctions f linéaires et si l'on pose $n_3 = 1$, on retrouve encore le théorème de Jamet.

4. Considérons enfin les courbes gauches ayant pour équations cartésiennes

$$\begin{aligned} \alpha_1[f_1(x, y, z)]^n + \alpha_2[f_2(x, y, z)]^n + \alpha_3[f_3(x, y, z)]^n &= 0, \\ \beta_2[\varphi_2(x, y, z)]^n + \beta_3[\varphi_3(x, y, z)]^n + \beta_4[\varphi_4(x, y, z)]^n &= 0, \end{aligned}$$

où f et φ désignent des fonctions données.

Si par un point M , où se touchent trois de ces courbes, on mène une parallèle δ à l'un des axes de coordonnées et que, sur les binormales des trois

courbes, on prend, à partir de M , les segments MB_1 , MB_2 , MB_3 égaux à leurs rayons de courbure, les plans menés par B_1 , B_2 , B_3 perpendiculairement à MB_1 , MB_2 , MB_3 déterminent sur δ les segments MD_1 , MD_2 , MD_3 liés par la relation

$$\frac{n_2 - n_3}{MD_1} + \frac{n_3 - n_1}{MD_2} + \frac{n_1 - n_2}{MD_3} = 0.$$

Considérons en particulier deux triangles de l'espace, ainsi que les courbes Γ_n intersections des cônes projetant de deux points fixes quelconques deux courbes triangulaires symétriques d'indices n , ayant les triangles donnés pour triangles de symétrie; deux courbes Γ_{n_1} et Γ_{n_2} tangentes en un point ont même plan osculateur en ce point. Si, dans le théorème qui précède, on suppose f et φ linéaires et qu'on pose $n_3 = 1$, on voit que les courbures de Γ_{n_1} et Γ_{n_2} sont dans le rapport de $(n_1 - 1)$ à $(n_2 - 1)$. Le théorème de Jamet s'obtient quand les triangles et points donnés sont des faces et les sommets opposés d'un tétraèdre.

[O'4f]

**SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES
DE CERTAINES SURFACES GAUCHES;**

PAR CH. BIOCHE.

La détermination du degré d'une ligne ou d'une surface, définie par certaines conditions géométriques, est ordinairement assez délicate. Les énoncés généraux ne peuvent pas toujours s'appliquer, parce qu'il se présente, très fréquemment, des particularités; de

sorte qu'on peut être conduit (et cela est arrivé à des mathématiciens éminents) à des résultats erronés. C'est pourquoi je pense que les remarques suivantes peuvent présenter de l'intérêt.

1. M. Émile Picard a montré que, sur une surface gauche dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, il existe une courbe (que j'appellerai *courbe de M. Picard*), dont les tangentes appartiennent à ce complexe, cette courbe est le lieu des points doubles de l'homographie existant entre le pôle d'un plan passant par une génératrice et le point de contact de ce plan avec la surface; c'est une asymptotique dont le degré et la classe sont égaux à la classe d'une section plane de la surface.

2. Considérons d'abord le cas où les génératrices n'appartiennent qu'à un seul complexe linéaire et où ce complexe est *spécial*, c'est-à-dire où les droites du complexe sont celles qui rencontrent une droite Δ .

Le pôle d'un plan passant par une génératrice est le point d'intersection de celle-ci avec Δ . Il n'existe plus, sur la surface, d'asymptotique dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire (sans quoi les génératrices appartiendraient à une infinité de complexes linéaires) et il n'y a pas de relation entre le degré d'une asymptotique et la classe d'une section plane.

Par exemple, sur la surface qui a pour équation

$$z = 6x^2y - 5x^4,$$

les section planes sont de sixième classe et les asymptotiques sont données par

$$y = x^2 + \frac{A}{\sqrt{x}}, \quad z = x^4 + 6Ax\sqrt{x}.$$

A étant une constante arbitraire. Il peut même arriver que les asymptotiques ne soient pas algébriques; le cas se présente, par exemple, pour la surface du quatrième degré qui a pour équation

$$z = x^3 y - 6x^2$$

et dont les asymptotiques sont données par

$$y = \frac{1}{x} LA x^2, \quad z = x^2 LA x^2 - x^2.$$

3. Si les génératrices appartiennent à une congruence linéaire, il y a une infinité de courbes de M. Picard, dont chacune correspond à un des complexes contenant cette congruence. Ces courbes sont les asymptotiques.

Si les directrices de la congruence sont distinctes, chacune de ces courbes a pour degré et pour classe la classe d'une section plane de la surface, Mais elle peut se décomposer en deux courbes de degré moitié. C'est ce qui arrive, par exemple, pour la surface d'équation

$$z = \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

dont les asymptotiques sont des cubiques gauches, les sections planes de surface étant de la sixième classe.

4. Si les directrices de la congruence sont confondues, les courbes de M. Picard se décomposent, chacune d'elles comprenant la directrice de la congruence et une courbe qui ne rencontre plus chaque génératrice qu'en un point. Par exemple, pour la surface ayant pour équations

$$z = 2xy - x^4,$$

les sections sont de sixième classe, la droite de l'infini du plan $x = 0$ est directrice d'une congruence singulière, et les asymptotiques sont les courbes de quatrième ordre et de quatrième classe données par

$$y = x^3 + A, \quad z = x^2 + 2Ax.$$

5. On peut déterminer une surface gauche par la condition d'admettre pour asymptotique une courbe C et d'avoir des génératrices rencontrant une droite D.

Si les tangentes à la courbe C appartiennent à un complexe linéaire, les génératrices de la surface rencontrent la droite D', conjuguée de D par rapport au complexe. Elles appartiennent donc à une congruence linéaire — à directrices distinctes si D n'appartient pas au complexe, à directrices confondues si D appartient au complexe — et les asymptotiques, pouvant se déduire les unes des autres par une transformation homographique, sont des courbes de même degré et de même classe que C.

Si les tangentes à C n'appartiennent pas à un complexe linéaire, il n'y a pas de lignes asymptotiques appartenant à un pareil complexe, cela résulte de ce que je viens de dire; et alors il n'y a pas d'égalité entre le degré ou la classe des asymptotiques et le degré ou la classe, soit de C, soit des sections planes. On le voit sur le premier exemple que j'ai cité (§ 2); la surface considérée a été obtenue en prenant pour C une biquadratique de quatrième classe.

6. Si la courbe C est de degré m , de classe K, la droite D ne rencontrant pas C, cette droite est directrice multiple d'ordre K de la surface, et celle-ci est de degré $m + K$. Si D rencontre C en p points, et est

située dans q plans osculateurs, la surface n'est plus que du degré $m + K - p - q$.

Il peut arriver que le degré obtenu, comme je viens de le dire, soit double du degré effectif; par exemple, si l'on prend pour C la courbe

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^3, \quad Z = \lambda$$

et pour D la droite de l'infini du plan $X = 0$, on obtient une surface du troisième degré

$$X = \frac{Y^2}{Z^2}$$

au lieu d'une surface du sixième degré, parce que les points de la courbe se correspondent deux à deux de façon que le plan osculateur en l'un d'eux passe par l'autre.

7. Or ce fait se présente pour les courbes C de degré pair, tracées sur une surface du second degré et ayant pour tangentes des droites appartenant à un complexe linéaire.

En effet, une courbe possédant ces propriétés est, comme l'a montré Halphen, transformée homographique d'une courbe donnée par

$$X = \lambda^{\alpha+\beta}, \quad Y = \lambda^\alpha, \quad Z = \lambda^\beta,$$

α, β , étant des entiers, premiers entre eux, et impairs si la courbe est de degré pair. Le plan osculateur en un point a pour équation

$$(\alpha - \beta)X - (\alpha + \beta)\lambda^\beta Y + (\alpha + \beta)\lambda^\alpha Z - (\alpha - \beta)\lambda^{\alpha-\beta} = 0,$$

Soit λ' la valeur du paramètre correspondant en un point où le plan osculateur recoupe la courbe, posons $\lambda' = \lambda u$,

l'équation qui donne u est

$$(\alpha - \beta) U^{\alpha+\beta} - (\alpha + \beta) U^\alpha + (\alpha + \beta) U^\beta - (\alpha - \beta) = 0.$$

Elle a trois variations; elle admet 1 comme racine triple, et si α et β sont tous deux impairs (pour que $\alpha + \beta$ soit pair), on voit que l'équation obtenue en changeant u en $-u$ n'a plus qu'une variation. L'équation proposée n'a donc qu'une racine négative, et il est facile de voir que celle-ci est -1 .

La droite qui joint des points pour lesquels les valeurs de λ sont opposées, engendre la surface qui a pour équation

$$X^{\frac{\alpha-\beta}{2}} = \left(\frac{Y}{Z}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Elle peut être considérée comme obtenue en prenant C comme asymptotique, D étant la droite de l'infini du plan $X = 0$.

Si α et β avaient été l'un pair, l'autre impair, la surface obtenue aurait eu pour équation

$$X^{\alpha-\beta} = \left(\frac{Y}{Z}\right)^{\alpha+\beta}.$$

[R1 d]

**SUR LA DÉRIVÉE RELATIVE D'UN VECTEUR ;
APPLICATION AU THÉORÈME DE CORIOLIS ;**

PAR J. SUDRIA.

Dans un grand nombre de questions où interviennent des vecteurs fonctions de paramètres, il est commode de distinguer l'une de l'autre la dérivée

absolue d'un tel vecteur (c'est-à-dire la dérivée prise dans un système de référence fixe) et la dérivée relative (prise dans un système de référence mobile).

Cette notion de dérivée relative présente un intérêt didactique; si elle est voisine de celle de vitesse relative, elle diffère de celle-ci, non seulement par les paramètres intervenant dans la question, mais aussi par ce fait que la dérivée d'un vecteur est la différence des vitesses de l'extrémité et de l'origine de ce vecteur. Parmi les très nombreuses applications qui peuvent être faites de cette notion, nous citons la démonstration du théorème de Coriolis que l'on verra plus loin.

Généralités. — Rappelons que la dérivée d'un vecteur \vec{U} fixe dans le système de référence entraîné est le produit externe $[\vec{\Omega}, \vec{U}]$, $\vec{\Omega}$ étant la rotation instantanée de ce système, et le paramètre variable jouant le rôle de temps. Il suffit de faire la figure montrant les positions d'un vecteur à l'époque t et à l'époque $t + \Delta t$ ainsi que la position, à ce dernier instant, du vecteur du système entraîné coïncidant à l'époque t avec le vecteur considéré, pour démontrer les principes suivants :

1. La dérivée absolue $\frac{D\vec{U}}{D\rho}$ d'un vecteur \vec{U} , fonction du paramètre ρ est égale à la dérivée $\frac{d\vec{U}}{d\rho}$ relative à un système de référence mobile, augmentée de la dérivée du vecteur coïncidant, d'où :

$$\frac{D\vec{U}}{D\rho} = \frac{d\vec{U}}{d\rho} + [\vec{\Omega}, \vec{U}].$$

2. Si pour une valeur du paramètre variable un vec-

teur s'annule, pour cette même valeur la dérivée absolue et la dérivée relative de ce vecteur sont équivalentes.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CORIOLIS.

Soient M_0 et N les positions d'un point mobile aux époques t_0 et t , M la position à l'époque t du point du système de référence entraîné, qui coïncidait avec le mobile à l'époque t_0 . Rappelons que les dérivées absolues (première et seconde) de $\overrightarrow{M_0N}$ sont respectivement la vitesse et l'accélération absolue \vec{V}_a et \vec{J}_a , celles de $\overrightarrow{M_0M}$, la vitesse et l'accélération d'entraînement \vec{V}_e et \vec{J}_e , tandis que les dérivées relatives de \overrightarrow{MN} sont la vitesse et l'accélération relatives \vec{V}_r et \vec{J}_r .

On a

$$\overrightarrow{M_0N} = \overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{MN}.$$

Prenons les dérivées absolues des deux membres en utilisant pour le vecteur \overrightarrow{MN} le principe 1; il vient :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r + [\vec{\Omega}, \overrightarrow{MN}].$$

Prenons encore les dérivées absolues et, faisant $t = t_0$, utilisons pour le dernier terme le principe 2 :

$$\vec{J}_a = \vec{J}_e + \vec{J}_r + [\vec{\Omega}, \vec{V}_r] + [\vec{\Omega}, \vec{V}_r].$$

Finalement :

$$\vec{J}_a = \vec{J}_e + \vec{J}_r + 2[\vec{\Omega}, \vec{V}_r]. \quad \text{C. Q. F. D}$$

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Lignes asymptotiques, définition, équation différentielle, propriété caractéristique. Cas des surfaces réglées.*

II. *On donne un plan (P) et, dans ce plan, une droite $x'x$. Soit une surface (S), un point quelconque M pris sur (S) la normale en M, MI, limitée au point de rencontre I avec (P) et la perpendiculaire IH sur $x'x$.*

On demande de trouver les surfaces (S) pour lesquelles $MI = HI$.

On est conduit à une équation aux dérivées partielles de premier ordre.

Des considérations géométriques simples permettent d'avoir une intégrale complète. Pour l'obtenir par le calcul il sera commode de prendre une nouvelle fonction z' définie par

$$(1) \quad z' = x^2 + y^2 + z^2.$$

Caractéristiques et développables caractéristiques.

Intégrale générale. Y a-t-il une intégrale singulière?

Surface intégrale passant par la parabole

$$(2) \quad y = k, \quad z^2 - 2ux - v = 0$$

(k, u et v sont des constantes).

Surface intégrale inscrite dans la surface

$$(3) \quad 4y(x^2 + z^2) - 4z^2 - y = 0;$$

courbe de contact.

Nota : On prendra des axes rectangulaires, l'axe des y dans le plan (P).

SOLUTION DU PROBLÈME (par M. A. Sade). — L'équation aux

dérivées partielles des surfaces (S) est

$$(y + qz)^2 = (1 + p^2 + q^2)z^2,$$

et, en introduisant les dérivées partielles p' et q' de la nouvelle fonction z' , il vient

$$4z^2 + (p' - 2x)^2 + (q' - 2y)^2 = q'^2,$$

ou, enfin,

$$z' = p'x + q'y - \frac{p'^2}{4},$$

équation du type de Clairaut. Une intégrale complète est donc donnée par

$$z' = 2ax + 2by - a^2,$$

c'est-à-dire par les sphères (tangentes à $x'x$ et ayant leurs centres dans P)

$$(4) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = b^2,$$

ce qui était évident géométriquement.

L'intégrale générale est l'enveloppe des sphères (4) quand a et b sont liés par une relation arbitraire

$$(5) \quad b = \varphi(a),$$

on la définit donc en joignant aux équations précédentes

$$(6) \quad x + y \frac{d\varphi}{da} = a.$$

Les caractéristiques sont déterminées par (4) et (6). Ce sont les cercles de contact des cônes circonscrits aux sphères (4) et ayant leurs sommets sur $x'x$.

La parabole (2) appartient évidemment à l'un des cônes précédents qui constitue la surface intégrale demandée passant par la parabole. Un calcul aisé conduit à l'équation

$$(k^2 - u^2)y^2 + k^2z^2 - 2ukyx + k(y(u^2 - k^2 - v)) = 0.$$

Une sphère (4) touche la surface (3) au point xyz si

$$\frac{x - a}{2xy} = \frac{y - b}{\frac{z^2}{y}} = \frac{1}{2(y - 1)},$$

et l'élimination de α et b entre ces équations et l'équation (4) donne une relation qui, avec (3), définit la courbe de contact de (3) et de la surface intégrale inscrite. On trouve pour cette courbe, en plus de l'axe $x'x$ (1),

$$y = \frac{1}{2}, \quad x^2 - z^2 = \frac{1}{4},$$

ou bien

$$y = \frac{3}{2}, \quad 3x^2 + z^2 = \frac{3}{4},$$

les surfaces intégrales correspondantes étant respectivement

$$x^2y + (y^2 + z^2)(y - 1) = 0,$$

$$x^2y + (y^2 + z^2 - 2y)(y - 1) = 0.$$

(Nancy, octobre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Calculer la valeur de l'intégrale de variable complexe

$$\int_0^1 \frac{dz}{z - e^z},$$

pour un chemin d'intégration déterminé que l'on pourra choisir à volonté ne passant par aucun des pôles de la fonction placée sous le signe \int . Donner ensuite l'expression générale des diverses valeurs de cette intégrale qui correspondent à tous les chemins d'intégration.

II. Soit S la surface définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques

$$x = u \cos v + \sin^2 v,$$

$$y = u \sin v - \frac{1}{2} \sin 2v - v,$$

$$z = \varphi(u, v).$$

(1) A côté des surfaces dont les équations suivent, noter aussi $4x^2y + (4y^2 + 4z^2 + y)(y - 1) = 0$ qui est osculatrice à (3) suivant $x'x$.

On demande de trouver l'expression la plus générale de la fonction $\varphi(u, v)$ pour chacun des trois cas suivants :

1° Pour que les deux familles de courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ soient orthogonales sur la surface S.

2° Pour que ces deux familles de courbes soient conjuguées sur la surface S.

3° Pour que ces deux familles de courbes soient les lignes de courbure de S.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. La question est une application immédiate du théorème classique des résidus. Pour le calcul de la première détermination il est commode de prendre le chemin rectiligne en évitant le passage par le pôle réel L_2 au moyen d'une demi-circonférence ayant ce point pour centre et limitée à l'axe réel; on trouve ainsi facilement le résultat en faisant tendre vers zéro le rayon de cette demi-circonférence.

II. La première condition conduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

La seconde conduit à

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial v} + (u - 2 \cos v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0,$$

qui s'intègre facilement en prenant $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ comme inconnue intermédiaire.

Quant à la troisième condition, elle est formée par la réunion des deux premières; l'hypothèse $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ entraîne $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, ce qui donne le plan, solution n'ayant pas de sens et il reste les seules fonctions φ indépendantes de v qui, vérifiant les deux conditions, donnent la vraie solution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit, en coordonnées rectangulaires, S la sphère ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque M de cette sphère s'expriment paramétriquement par les formules

$$\begin{aligned} x &= R \sin 2\nu \cos u, & 0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}, \\ y &= R \sin 2\nu \sin u, \\ z &= R(1 + \cos 2\nu), & -\pi \leq u < \pi \end{aligned}$$

(où ν est l'angle de OM avec Oz et u l'angle du plan zOM avec le plan zOx). Montrer que l'angle ω que fait OM avec Ox est donné par la formule

$$\cos \omega = \sin \nu \cos u.$$

Soit C la nappe du cône de révolution de sommet O (origine des coordonnées) dont les génératrices font avec la direction positive Ox un angle aigu donné α .

- 1° Calculer l'aire de la portion de S intérieure à C.
- 2° Calculer le volume intérieur à S et à C.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Soit m la projection de M sur le plan des xy . On obtient la formule par l'application de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique au trièdre OM m x dans lequel on connaît deux faces u et $\frac{\pi}{2} - \nu$ ainsi que le dièdre compris $\frac{\pi}{2}$.

Les coordonnées u, ν sur la sphère étant orthogonales on a de suite l'élément de surface de la sphère

$$d\sigma = 2R^2 \sin 2\nu \, du \, d\nu,$$

et l'élément de volume, cône de sommet O et de base $d\sigma$,

$$dV = \frac{2R^3}{3} (1 + \cos 2\nu) \sin 2\nu \, du \, d\nu.$$

On a alors à calculer deux intégrales doubles étendues au domaine en u, ν défini par les inégalités de l'énoncé et l'inégalité

$$\sin \nu \cos u \geq \cos \alpha.$$

Si l'on pose

$$1 + \cos 2\nu = \omega,$$

on est ramené aux intégrales doubles très simples

$$-R^2 \int \int du d\omega, \quad -\frac{R^3}{3} \int \int \omega du d\omega,$$

ω variant de $2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 u} \right)$ à 0, puis u variant de $-\alpha$ à α .

On arrive ainsi aux deux intégrales simples

$$2R^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 u} \right) du, \quad \frac{2R^3}{3} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 u} \right)^2 du,$$

c'est-à-dire à un calcul classique d'intégrales de la forme $\int \cos^{-2p} u du$. (Bordeaux, novembre 1923.)

EPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. *Théorèmes généraux relatifs aux fonctions de variables complexes ;*

a.
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(z)}{z-a} dz;$$

b. *expression des dérivées successives :*

c. *Série de Taylor ; développement autour d'un zéro ou d'un pôle ; développement de Laurent.*

II. Problème : 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$p - q = e^z \sin(x - y).$$

2° *Déterminer la surface qui passe par la courbe*

$$(C) \quad \begin{cases} x = y, \\ e^z \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

3° *Pour cette dernière surface déterminer les rayons de courbure principaux en un point. Exprimer $R_1 + R_2$ et $R_1 - R_2$ en fonction des angles α, β, γ de la normale avec les axes.*

4° *Lignes de courbure de la surface.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° On trouve

$$\cos(x - y) - 2e^{-z} = f(x + y).$$

Ann. de Mathémat., 5° série, t. II. (Avril 1924.)

2° On trouve

$$z + L(\cos x \cos y) = 0.$$

3° et 4°

$$R_1 + R_2 = \frac{2}{\cos \gamma}, \quad R_1 - R_2 = \frac{2 \sin x \sin y}{\cos \gamma},$$

$$L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right) = \pm L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + Lk.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer

$$\int \int \int [(\sqrt{2}x + z)^2 - 45] dx dy dz,$$

à l'intérieur du volume

$$x^2 + y^2 - 10z < 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 75 < 0.$$

II. 1° Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure R égale $4y^{\frac{5}{4}}$. Prendre celle des courbes pour laquelle le point de contact de la tangente parallèle à Oy est rejeté à l'infini.

2° Relation entre R et la portion de normale limitée à Ox .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. On trouve

$$I = -\frac{7\pi}{6} \times 5^{\frac{1}{2}}.$$

II. 1° On a

$$\frac{ds}{dx} = \frac{dy}{\sin \alpha dx} = 4y^{\frac{5}{4}},$$

d'où

$$y = \frac{1}{\cos^{\frac{1}{2}} x} \quad x = 4 \operatorname{tang} \alpha + \frac{4}{3} \operatorname{tang}^3 \alpha.$$

2° On trouve

$$R = 4MN.$$

(Alger, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad px + qy = f(v, z) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v = p^2 + q^2 \right).$$

1° Montrer que, sur chaque surface intégrale de (E), les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont situées dans des plans parallèles.

2° Déterminer la fonction $f(v, z)$ de manière que les courbes caractéristiques de (E) soient des lignes asymptotiques des surfaces intégrales. On trouvera pour (E) deux formes possibles : la première, (E₁) renfermera z sous une forme simple ; pour la seconde, (E₂), on trouvera

$$f(v, z) = V(v) \varphi(z),$$

où $V(v)$ est une fonction bien déterminée de v , et $\varphi(z)$, une fonction arbitraire de z .

3° Indiquer une intégrale complète de (E₁); faire connaître une propriété géométrique des cônes circonscrits aux surfaces intégrales de (E₁) et ayant leurs sommets sur Oz.

4° Choisir $\varphi(z)$ de manière que l'équation (E₂) correspondante possède une infinité de surfaces intégrales (S) dépendant d'un paramètre arbitraire et qui soient, toutes, hélicoïdes, d'axe Oz et de même pas.

5° Calculer la courbure totale de (S) en un point M situé à une distance r de Oz.

II. Quelle relation faut-il établir entre les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation différentielle linéaire

$$(A) \quad y'' + py' + qy = 0,$$

pour que (A) possède deux intégrales y_1 et y_2 satisfaisant à la relation $y_2^2 = xy_1$?

Application. — On donne $p(x) = \frac{1}{x} - 2$; déterminer $q(x)$ de manière que (A) possède la propriété précédente et intégrer ensuite l'équation

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)y' + q(x)y = \sqrt{x}$$

[où $q(x)$ aura la valeur particulière qu'on aura obtenue.]

INDICATIONS SUR LA SOLUTION — I. 1° Les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont définies par $p \delta x + q \delta y$: elles sont dans les plans $z = \text{const.}$

2° On trouve pour déterminer $f(v, z)$ la condition

$$(1 - f'_z)(f - 2vf'_v) = 0,$$

On obtient (E_1) en prenant

$$f \equiv z + \psi(p^2 + q^2),$$

et (E_2) en prenant

$$f \equiv \sqrt{v} \varphi(z).$$

3° $z = ax + by + \psi(a^2 + b^2)$ (résultat classique). Les cônes sont de révolution autour de Oz (dans l'hypothèse où ψ ne se réduit pas à une constante).

4° On exprime que les équations différentielles des caractéristiques de (E_2) admettent l'intégrale première

$$(1) \quad -py + qx = h.$$

On trouve $h\varphi'_z = 0$ ou $\varphi(z) \equiv k$, en écartant le cas des surfaces de révolution : $k = 0$, $\varphi(z)$ quelconque. [Le cas est banal; quelle que soit la fonction φ , (E_2) possède les intégrales $z = \text{const.}$ et $\sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(z)$, de révolution autour de Oz .] Pour $\varphi(z) = k$, les équations finies des multiplicités caractéristiques de (E_2) sont

$$(2) \quad \begin{cases} x = k \cos \alpha + \beta t \sin \alpha, & p = t^{-1} \cos \alpha, \\ y = k \sin \alpha + \beta t \cos \alpha, & q = t^{-1} \sin \alpha, \\ z = \gamma \end{cases}$$

(α, β, γ , constantes arbitraires; t , paramètre variable). Pour les grouper de manière qu'elles appartiennent à une même surface S , il faut prendre $d\gamma = \beta d\alpha$; et, si l'on veut que S soit une intégrale de (1), on doit faire $\beta = h$, d'où $\gamma = h\alpha + \text{const.}$, équation qui jointe à (2) représente la famille de surfaces demandées, chacune d'elles étant rapportée aux deux paramètres t et α .

$$\begin{aligned} 5^\circ \quad \frac{1}{R_1 R_2} &= \frac{D(p, q)}{D(x, y)} \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2} \frac{D(p, q)}{D(t, \alpha)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(t, \alpha)} \\ &= \frac{-h^2}{(r^2 + h^2 - k^2)^2}. \end{aligned}$$

N. B. — L'équation (E₂) est de la forme $\frac{q}{p} = \Phi(x, y, z)$; les courbes caractéristiques sont des droites, parallèles au plan des xy et dépendant de deux paramètres arbitraires.

II. On trouve

$$2p' + p^2 - 4q = 0 \quad \text{avec} \quad y_1 = e^{-\int \frac{p}{z} dx}$$

Application :

$$q = -\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} + 1; \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} [x + 2 + (\Lambda x + B) e^x].$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_1^{-1} \frac{\text{Log } z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz,$$

prise successivement le long des quatre chemins indiqués ci-contre. (La figure montre ces chemins C₁, C₂, C₃, C₄ traversant respectivement l'axe imaginaire au-dessus du point i , entre i et 0 , entre 0 et i , au-dessous de $-i$).

La détermination initiale de $\text{Log } z$ est 0 , celle de $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ est $2\sqrt{2}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'intégrale indéfinie est

$$\frac{z \text{Log } z}{\sqrt{1+z^2}} - L(z + \sqrt{1+z^2}).$$

En étudiant la variation de cette fonction le long de chacun des quatre chemins on trouvera les valeurs correspondantes de l'intégrale

$$\begin{aligned} \pi i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right); & \quad 2 \log(\sqrt{2} - 1) - \frac{\pi i}{\sqrt{2}}; \\ 2 \log(\sqrt{2} - 1) + \frac{\pi i}{\sqrt{2}}; & \quad -\pi i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

(Poitiers, juin 1923.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une surface S est représentée par les équations paramétriques

$$x = u \left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} \right),$$

$$y = v \left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} \right),$$

$$z = 2uv.$$

1° Montrer que les courbes $u = c$ et $v = c'$ sont orthogonales et que ce sont les lignes asymptotiques de la surface.

2° Déterminer les lignes de courbure. Montrer qu'elles sont planes et trouver l'enveloppe de leurs plans.

3° Déterminer les rayons de courbure principaux et les centres de courbure principaux en un point de la surface.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les lignes de courbure sont

$$u + v = \lambda, \quad u - v = \mu;$$

les rayons de courbures principaux étant

$$-R_1 = +R_2 = \frac{\left[3(u^2 + v^2) + \frac{1}{3} \right]^2}{2}.$$

On trouve pour plans des lignes de courbure

$$x + y - 3\lambda z + \lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda = 0,$$

$$x - y + 3\mu z + \mu^3 + \frac{1}{3}\mu = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation différentielle

$$2yy' - x(1 + y'^2) = y' - y'^2 + \frac{y'^2}{3}.$$

Déterminer une courbe intégrale qui passe par le point

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}.$$

INDICATIONS.— On trouve

$$x = t(t + C), \quad y = (t + C) \frac{1+t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6},$$

et l'on vérifiera la condition imposée pour C égal à 0 ou $\pm\sqrt{3}$.
(Marseille, juin 1922).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2448.

(1920, p. 280; 1922-1923, p. 188.)

Étant données deux courbes planes quelconques, une courbe de grandeur invariable se meut dans leur plan commun de façon à avoir avec chacune d'elles une corde commune de longueur constante. Trouver, pour une position de la courbe mobile, le centre instantané de rotation du plan qu'elle entraîne.

SOLUTION

Par M. FAUCHEUX.

Soit AB la corde commune à la courbe fixe (C) et à la courbe mobile (c).

Dans le mouvement du segment AB par rapport à (C) le centre instantané de rotation est le point de rencontre P des normales en A et B à C. Dans le mouvement de (c) par rapport à AB le centre instantané est le point de rencontre p des normales en A et B à (c). Le centre instantané du mouvement de (c) par rapport à (C) est donc un point de la droite pP.

C'est, de même, un point de la droite p_1P_1 en nommant p_1 et P_1 les points, analogues à p et P, définis par la seconde courbe fixe (C_1). Le centre instantané cherché est donc à l'intersection de pP et p_1P_1 .

Autres solutions de MM. BOUVAIST, PIEDVACHE.

2408.

(1919, p. 160.)

Sur la normale en un point M d'un paraboléide on prend un point P : on peut mener de ce point quatre

autres normales à la surface; le point P se déplaçant sur la normale en M_0 , l'enveloppe des sphères qui passent par les pieds des quatre normales est un ellipsoïde de révolution dont le centre est sur l'axe du paraboloidé avec l'abscisse

$$\frac{x_0 + (p \pm q)}{2}$$

et dont l'axe est parallèle à la projection de la normale en M_0 sur le plan tangent au sommet de la surface.

G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

L'équation de la sphère cherchée est

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 + p + q)x - y \frac{(2\lambda + p + q)}{2p} y_0 \\ - z \frac{(2\lambda + p + q)}{2q} z_0 - (\lambda + p)(\lambda + q) = 0. \end{aligned}$$

Quand λ varie elle enveloppe la surface de révolution

$$\begin{aligned} 4 \left[x^2 + y^2 + z^2 - x(x_0 + p + q) \right. \\ \left. - (p + q) \left(\frac{yy_0}{2p} + \frac{zz_0}{2q} \right) - pq \right] \\ + \left(\frac{yy_0}{p} + \frac{zz_0}{q} + p + q \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

qui a pour centre

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0 + p + q}{2}, \\ y &= z = 0, \end{aligned}$$

et pour axe

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0 + p + q}{2}, \\ \frac{py}{y_0} - \frac{qz}{z_0} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.



[D2b]

SUR UNE EXTENSION DES SÉRIES DE BERTRAND;

PAR LÉON POMEY.

1. On sait former (voir E. BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, et C. JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2^e édition, t. I, p. 288 à 300) des séries numériques de moins en moins rapidement convergentes. Les plus connues sont celles de J. Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \sum \frac{1}{n \cdot (\text{Log } n)^{1+\rho}}, \quad \dots, \quad \sum \frac{1}{n \cdot \Lambda_m n (\text{Log}_m n)^\rho},$$

en prenant pour ρ une constante > 0 et en posant

$$\begin{aligned} \text{Log} \cdot \text{Log } n &= \text{Log}_2 n, & \text{Log} \text{Log}_2 n &= \text{Log}_3 n, & \dots; \\ \Lambda_m n &= \text{Log } n \cdot \text{Log}_2 n \dots \text{Log}_m n. \end{aligned}$$

Rappelons qu'on les utilise notamment pour reconnaître si une série donnée Σu_n est convergente; en effet soit Σv_n l'une de ces séries convergentes; d'après un théorème classique, si à partir d'une certaine valeur de n on a constamment $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, la série Σu_n sera aussi convergente; on développe donc les deux rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et l'on compare leurs valeurs respectives en négligeant les termes d'ordre supérieur (ce qui conduit en particulier à la règle de Gauss). D'ailleurs pour effectuer ces développements, on peut se servir

des formules connues (voir JORDAN, *loc. cit.*) que voici

$$\begin{aligned} \text{Log}_m^\rho(n+1) &= \text{Log}_m^\rho n \left(1 + \frac{\rho}{n \Lambda_m n} \right), \\ \frac{(n+1)^\rho}{n^\rho} &= 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho(\rho-1)}{2n^2} + \dots, \\ \frac{(n+1) \cdot \Lambda_m(n+1) \cdot \text{Log}_m^\rho(n+1)}{n \Lambda_m n \cdot \text{Log}_m^\rho n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \text{Log} n} + \dots + \frac{1+\rho}{n \Lambda_m n} + \frac{\varepsilon}{n^2}. \end{aligned}$$

2. Cela posé, employons cette méthode pour démontrer l'existence d'une série peu différente par sa forme de la série $\sum \frac{1}{n^{1+\rho}}$ mais moins rapidement convergente, avec cette particularité que l'exposant $1+\rho$ soit variable ET TENDE VERS L'UNITÉ.

Telle est, par exemple, la série $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{r}{\log \log n}}}$, où r

est une constante positive arbitraire.

En effet, pour établir sa convergence, appelons u_n son terme général $\frac{1}{n^{1+\frac{r}{\log_2 n}}}$ et formons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

On trouve par quelques calculs que le lecteur restituera, sans grande peine, la relation

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 - \frac{1}{n} + \frac{r}{\log_2 n \cdot \log_2(n+1)} \\ &\quad \times [\log n \cdot \log_2(n+1) - \log_2 n \cdot \log(n+1)] + \dots, \end{aligned}$$

et pour le crochet, le développement

$$\frac{1}{n} - \frac{\log_2 n}{n} + \dots;$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n \log_2(n+1)} + \dots$$

Comparons ce rapport au rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ relatif à la série de Bertrand Σv_n convergente, où $v_n = \frac{1}{n \log^\alpha n}$ avec $\alpha = 1 + \rho > 1$. Il vient

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n \log_2(n+1)} - \frac{\alpha}{n \log n} + \dots,$$

quantité qui, à partir d'une valeur suffisamment grande de n , devient et reste positive quelles que soient les constantes r et ρ .

Donc la série Σu_n est bien convergente.

3. On pourrait opérer d'une manière analogue avec les autres séries de Bertrand, en remplaçant de même dans chacune la quantité *fixe* ρ par une quantité *qui tende vers zéro* (comme nous venons de le faire en remplaçant ρ par $\frac{r}{\log_2 n}$ dans la première de ces séries).

Les nouvelles séries ainsi formées permettront à leur tour, comme les séries de Bertrand, de former par la même méthode de nouveaux critères de convergence analogues à celui de Gauss.

[E 1 f]

QUELQUES DÉMONSTRATIONS DE LA RELATION DES COMPLÉMENTS

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha};$$

PAR ANDRÉ BLOCH.

La relation des compléments, découverte par Euler, joue un rôle essentiel dans la théorie de la fonction

gamma (1). Elle est un peu plus cachée que les autres propriétés élémentaires de la fonction gamma, parce qu'elle équivaut au développement en produit de $\sin x$, qui est lui-même un peu plus caché que les autres propriétés de la fonction sinus x . Notre objet est d'en donner quelques démonstrations probablement nouvelles (2).

Rappelons que

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n)} = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du.$$

Nous n'utiliserons d'ailleurs que la définition comme intégrale définie. Rappelons aussi que

$$\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Dans la première des deux intégrales qui viennent d'être écrites, la partie réelle de α est supposée positive; dans la seconde, elle est supposée comprise entre 0 et 1. Ces suppositions et les suppositions analogues seront quelquefois sous-entendues dans ce qui suit. D'ailleurs, en vertu de la relation de récurrence

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha),$$

il suffit d'établir la relation des compléments lorsque la partie réelle de α est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, pour qu'elle soit par là même générale.

Les démonstrations les plus habituelles de la relation des compléments sont au nombre de trois. La première consiste naturellement à utiliser le développement en

(1) On trouve des notions sur la fonction gamma dans tous les cours d'Analyse. Il a été publié plusieurs monographies sur ce sujet. Citons seulement : *La Fonction Gamma (Théorie, histoire, bibliographie)*, par M. Godefroy, Gauthier-Villars, 1901.

(2) La plus grande partie des résultats démontrés en passant au cours du présent article sont dus à Euler.

produit de $\sin \pi a$; ou bien, si l'on part de la définition comme intégrale définie et que l'on ait égard à la seconde des égalités écrites ci-dessus, le développement en série de fractions de son inverse. La seconde donnée dans tous les cours, consiste à déterminer par le calcul des résidus la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{1+x}$. La troisième enfin, consiste à montrer que cette dernière intégrale est bien égale à $\frac{\pi}{\sin \pi a}$ lorsque a est rationnel, ce qui se fait aisément puisque l'on est ramené à la quadrature d'une fraction rationnelle; la différence des deux fonctions est alors une fonction qui admet une infinité de zéros dans une aire où elle est holomorphe : elle est identiquement nulle (si l'on se borne aux valeurs réelles, la continuité suffit pour établir ce point) (1).

PREMIÈRE DÉMONSTRATION. — POSONS

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = f(a).$$

On a évidemment par le changement de x en $\frac{1}{x}$: $f(a) = f(1-a)$. Il suffit donc de considérer les valeurs de a dont la partie réelle est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.

On a :

$$f(a) = \lambda^a \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+\lambda x} dx;$$

d'où, en multipliant par $\frac{\lambda^{-a} d\lambda}{1+\lambda}$ et intégrant de 0 à ∞ :

$$f^2(a) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+\lambda)(1+\lambda x)} d\lambda dx.$$

(1) Voir pour ces démonstrations : MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*, tome II.

De même

$$f(a)f\left(\frac{1}{2}-a\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}} x^{a-1}}{(1+\lambda)(1+\lambda x)} d\lambda dx.$$

Soit

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\lambda x)} = \frac{1}{1+\lambda} - \frac{x}{1+\lambda x}.$$

On a

$$\int_0^\infty \psi(\lambda) d\lambda = \frac{\log x}{x-1}, \quad \int_0^\infty \lambda^{-\frac{1}{2}} \psi(\lambda) d\lambda = \frac{\pi}{1+x^{\frac{1}{2}}}.$$

On a donc en premier lieu

$$f^2(a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} \log x}{x-1} dx,$$

$$f^2\left(\frac{1}{2}-a\right) = \int_0^\infty \frac{x^{a-\frac{1}{2}} \log x}{x-1} dx,$$

d'où

$$f^2(a) + f^2\left(\frac{1}{2}-a\right) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1} \log x}{x^2-1} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{4t^{2a-1} \log t}{t-1} dt = 4f^2(2a).$$

On a en second lieu

$$f(a)f\left(\frac{1}{2}-a\right) = \pi \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2} dx = 2\pi f(2a).$$

Il suit de là :

$$f^2(a) + 4\pi^2 \frac{f^2(2a)}{f^2(a)} = 4f^2(2a).$$

Posons

$$f(a) = \frac{\pi}{\varphi(a)};$$

il vient

$$\varphi^2(2a) = 4\varphi^2(a) [1 - \varphi^2(a)],$$

d'où en dérivant :

$$4 \varphi(2a) \varphi'(2a) = 8 \varphi(a) \varphi'(a) [1 - 2 \varphi^2(a)]$$

et

$$\frac{\varphi'^2(2a)}{1 - \varphi^2(2a)} = \frac{\varphi'^2(a)}{1 - \varphi^2(a)}.$$

Or cherchons ce que devient le second membre lorsque a tend vers zéro; $f(a)$ dans le voisinage de l'origine est la somme de $\frac{1}{a}$ et d'une série entière en a ; $f(a)$ est donc équivalent à $\frac{1}{a}$ et $\frac{f'(a)}{f(a)}$ à $-\frac{1}{a}$. Par suite, $\varphi(a)$ tend vers zéro, et $\varphi'(a)$ égal à $-\frac{\pi f'(a)}{f^2(a)}$, vers π . Le second membre tend donc vers π^2 .

On aura donc dans une région suffisamment voisine de l'origine (pour qu'aucun rapport ne prenne une forme indéterminée) :

$$\frac{\varphi'^2(a)}{1 - \varphi^2(a)} = \frac{\varphi'^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \varphi^2\left(\frac{a}{2}\right)} = \dots = \frac{\varphi'^2\left(\frac{a}{2^m}\right)}{1 - \varphi^2\left(\frac{a}{2^m}\right)} = \dots = \pi^2.$$

On a par suite, dans la même région :

$$\varphi'' = -\pi^2 \varphi;$$

d'où

$$\varphi(a) = A \cos \pi a + B \sin \pi a;$$

faisant $a = 0$, on trouve

$$A = 0, \quad B = 1;$$

donc

$$\varphi(a) = \sin \pi a.$$

Cette dernière égalité, établie dans une région suffisamment proche de l'origine, s'étend partout à l'aide de $\varphi^2(2a) = 4 \varphi^2(a) (1 - \varphi^2(a))$; ce qui termine la démonstration.

Faisons une remarque supplémentaire. On a

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} \log x}{x-1} dx = f^2(a) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi a};$$

on en conclut en intégrant :

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} - x^{-a}}{1-x} dx = \pi \cot \pi a.$$

DEUXIÈME DÉMONSTRATION. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^a \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx,$$

où la partie réelle de a est comprise entre -1 et $+1$ et θ entre $-\pi$ et $+\pi$.

Posons

$$g(x, \theta) = \frac{\sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1}.$$

On vérifie, par un calcul facile, l'identité

$$-\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = g + 3x \frac{\partial g}{\partial x} + x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$

d'où l'on conclut

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial \theta^2} = \int_0^{\infty} x^a g dx + 3 \int_0^{\infty} x^{a+1} \frac{\partial g}{\partial x} dx + \int_0^{\infty} x^{a+2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx.$$

La première intégrale est I ; les autres s'obtiennent en intégrant par parties :

$$\int_0^{\infty} x^{a+1} \frac{\partial g}{\partial x} dx = -(a+1) \int_0^{\infty} x^a g dx = -(a+1)I,$$

$$\int_0^{\infty} x^{a+2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} dx :$$

$$= -(a+2) \int_0^{\infty} x^{a+1} \frac{\partial g}{\partial x} dx = (a+1)(a+2)I.$$

Donc

$$-\frac{\partial^2 I}{\partial \theta^2} = [1 - 3(a+1) + (a+1)(a+2)]I = a^2 I.$$

Par conséquent

$$I = A \sin a \theta,$$

car I est fonction impaire de θ .

Il s'agit maintenant de calculer A. Nous montrerons à cet effet que $\int_0^\infty \frac{(x^a - 1) \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx$ tend vers zéro, quand θ tend vers π .

Ce dernier point résulte de ce que

$$\int_0^\infty \frac{(x^a - 1) \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx = \int_0^1 \frac{(x^a - 2 + x^{-a}) \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx,$$

ce qui est inférieur en valeur absolue à

$$|\sin \theta| \int_0^1 \frac{|x^a - 2 + x^{-a}|}{(1-x)^2} dx$$

(la dernière intégrale a bien un sens, car pour $x = 1$, l'élément différentiel est fini).

Pour calculer $\int_0^\infty \frac{\sin \theta dx}{x^2 + 2x \cos \theta + 1}$ on pose

$$x = -\cos \theta + \sin \theta \cot \varphi;$$

on trouve ainsi que cette intégrale est égale à θ .

Donc $A \sin a \theta - \theta$ tend vers zéro quand θ tend vers π :

$$A = \frac{\pi}{\sin a \pi}.$$

Finalement :

$$\int_0^\infty \frac{x^a \sin \theta}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} dx = \frac{\pi}{\sin a \pi} \sin a \theta.$$

Faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ et posant $x = t^{\frac{1}{2}}$, il vient :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{a+1}{2}-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \frac{a+1}{2}};$$

c'est bien la formule qu'il fallait démontrer.

TROISIÈME DÉMONSTRATION. — Nous serons plus concis au sujet de la troisième démonstration.

Posons :

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-u \cos \theta} \cos(u \sin \theta) u^{a-1} du = \int_0^{\infty} \varphi(u, \theta) u^{a-1} du,$$

$$g(\theta) = \int_0^{\infty} e^{-u \cos \theta} \sin(u \sin \theta) u^{a-1} du = \int_0^{\infty} \gamma(u, \theta) u^{a-1} du.$$

La partie réelle de a est supposée positive, θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = u \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -u \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

Grâce à ces égalités, on trouve, en intégrant par parties :

$$f'(\theta) = -a g(\theta), \quad g'(\theta) = a f(\theta).$$

D'où, eu égard à ce qui passe pour $\theta = 0$:

$$f(\theta) = \Gamma(a) \cos a \theta, \quad g(\theta) = \Gamma(a) \sin a \theta.$$

Telles sont les valeurs de nos deux intégrales. Remarquons que la définition de $g(\theta)$ conserve un sens

lorsque la partie réelle de a est comprise entre -1 et 0 , et il est aisé de voir qu'on a encore dans ce cas la deuxième formule ci-dessus.

Faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\Delta(a) = \int_0^{\infty} u^{a-1} \cos u \, du = \Gamma(a) \cos \frac{\pi a}{2};$$

$$E(a) = \int_0^{\infty} u^{a-1} \sin u \, du = \Gamma(a) \sin \frac{\pi a}{2}.$$

La partie réelle de a est comprise entre 0 et 1 dans $\Delta(a)$; entre -1 et 1 dans $E(a)$.

Considérons sous forme d'intégrales : $\Gamma(a)$; $\Delta(a)$; $E(a)$ d'une part; $\Gamma(1-a)$; $\Delta(1-a)$; $E(1-a)$ de l'autre. Formons le produit d'une intégrale du premier groupe par une intégrale de l'autre; nous employons à cet effet le procédé utilisé dans notre première démonstration, et d'ailleurs classique. Nous obtenons de la sorte :

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} \, dx.$$

$$\Delta(a) \Delta(1-a) = \frac{\pi}{2},$$

$$E(a) E(1-a) = \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta(a) E(1-a) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{\frac{a-1}{2}} - x^{-\frac{a}{2}}}{1-x} \, dx,$$

$$E(a) \Gamma(1-a) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{a-1}{2}}}{1+x} \, dx,$$

$$\Gamma(a) \Delta(1-a) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{a-1}{2}}}{1+x} \, dx.$$

Considérons par exemple l'une ou l'autre des deux dernières formules : elle s'écrit en tenant compte de la première et des valeurs trouvées pour $\Delta(a)$ et $E(a)$:

$$\Gamma(a) \Gamma(1-a) \cos \frac{\pi a}{2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Gamma(a) \Gamma(1-a) \sin \pi a &= \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{a}{2}\right) \sin \frac{\pi a}{2} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \Gamma\left(\frac{a}{2^m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{a}{2^m}\right) \sin \frac{\pi a}{2^m} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \pi. \end{aligned}$$

La relation des compléments est donc démontrée.

On peut remarquer aussi qu'elle résulte directement, étant données les expressions de $\Delta(a)$ et $E(a)$, de la deuxième ou de la troisième des six formules. Mais nous avons attendu jusqu'ici pour faire remarque : c'est que les deuxième, troisième et quatrième formules sont moins immédiates à obtenir que les trois autres. En effet, l'application brutale du procédé indiqué plus haut conduit alors à des intégrales dénuées de sens ; il convient donc, pour obtenir ces trois formules, de le modifier. On peut par exemple introduire dans l'une des intégrales une exponentielle e^{-zu} où l'on fait ensuite tendre z vers zéro. On peut aussi, au lieu de considérer les intégrales prises de zéro à ∞ , les supposer prises de 0 à une certaine limite finie (que l'on fera croître ensuite indéfiniment), et employer le mode de raisonnement utilisé ailleurs pour le cas particulier des intégrales de Fresnel (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XLVI, p. 34).

[P'6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

(Fin) (1);

PAR E. LAINÉ.

II. — Équations aux dérivées partielles et transformations de contact de l'espace à trois dimensions.

12. La théorie que nous venons d'exposer en détail dans le cas du plan s'étend d'elle-même à l'espace à trois dimensions.

On appelle élément linéaire (x, y, z, p, q) l'ensemble d'un point (x, y, z) et d'un plan

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

passant par ce point.

Lorsque x, y, z, p et q sont des fonctions d'un paramètre variable telles que l'on ait

$$(28) \quad dz - p dx - q dy = 0,$$

les ∞^1 éléments correspondant aux différentes valeurs du paramètre forment une multiplicité m_1 ; l'ensemble des points appartenant à cette multiplicité en est le support ponctuel.

Lorsque x, y, z, p et q sont des fonctions de deux paramètres indépendants vérifiant la même équation (28), les ∞^2 éléments correspondant aux diffé-

(1) Cf. N. A., janvier, février et mars 1924.

rentes valeurs des paramètres forment une multiplicité m_2 ; l'ensemble des points appartenant à cette multiplicité en est le support ponctuel.

Suivant que le support ponctuel est un point, une courbe, ou une surface, on affecte la lettre m d'un indice supérieur égal à 0, 1 ou 2. Par exemple :

Une m_1^0 est l'ensemble d'un point et des plans tangents à un cône ayant son sommet en ce point ;

Une m_2^1 est l'ensemble des points d'une courbe, à chacun desquels sont associés tous les plans passant par la tangente à la courbe en ce point ;

Enfin une m_2^2 est l'ensemble des points et des plans tangents d'une surface, chaque plan tangent étant associé à son point de contact.

L'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

définit ∞^3 éléments. On peut la considérer aussi comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre ; intégrer cette équation revient alors à associer de toutes les manières possibles les ∞^3 éléments qu'elle définit de façon à obtenir des m_2 . Les m_2^2 donneront les intégrales considérées habituellement : les m_2^1 et m_2^0 , les intégrales au sens de Lie (n° 3).

Soient

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = X(x, y, z, p, q), \\ Y = Y(x, y, z, p, q), \\ Z = Z(x, y, z, p, q), \\ P = P(x, y, z, p, q), \\ Q = Q(x, y, z, p, q) \end{array} \right.$$

des équations qui établissent une correspondance entre les éléments des espaces (x, y, z) et (X, Y, Z) . On dit que ces équations définissent une transformation de

contact (T. C.) quand il existe une fonction non nulle $\rho(x, y, z, p, q)$ telle que l'on ait identiquement

$$(30) \quad dZ - P dX - Q dY = \rho(dz - p dx - q dy).$$

Alors à toute m_1 ou m_2 les équations (29) font correspondre une M_1 ou une M_2 , et inversement. A deux m ayant un élément commun, elles font correspondre deux M ayant aussi un élément commun.

De cette définition on déduit, comme dans le cas du plan, les propriétés des T. C. de l'espace, et des fonctions X, Y, Z, P, Q et ρ qui les caractérisent. Nous ne reviendrons pas sur ce point.

La méthode déduite de la théorie des T. C. pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre est aussi une extension directe de la méthode exposée aux nos 6 et 7; nous nous contenterons de l'indiquer rapidement.

13. A toute équation du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0;$$

les équations (29) font correspondre une autre équation

$$F(X, Y, Z, P, Q) = 0,$$

la T. C. (29) conduit d'une intégrale de l'une à une intégrale de l'autre; en particulier, si les équations considérées ont une intégrale singulière, ces deux intégrales se correspondront.

Proposons-nous d'intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(31) \quad Z(x, y, z, p, q) = 0.$$

Il résulte de la théorie des T. C. que Z étant donné arbitrairement, on peut, d'une infinité de façons, lui

adjoindre quatre autres fonctions $X(x, y, z, p, q)$, Y , P et Q telles que les équations (29) définissent une T. C. Cette T. C. ramène alors l'équation (31) à la forme

$$Z = 0.$$

Or, on a immédiatement les M_2 satisfaisant à cette dernière équation; ce sont :

1° Les M_2^0 obtenues en posant

$$Z = 0, \quad X = a, \quad Y = b.$$

a et b désignant des constantes arbitraires; il leur correspond, pour l'équation (31), l'intégrale complète obtenue en éliminant p et q entre les équations

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, p, q) = 0, \quad X(x, y, z, p, q) = a, \\ Y(x, y, z, p, q) = b. \end{aligned}$$

2° Les M_2^1 obtenues en posant

$$Z = 0, \quad \varphi(X, Y) = 0, \quad P \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0,$$

φ désignant une fonction arbitraire; en éliminant p et q entre les trois équations

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, p, q) = 0, \\ \varphi[X(x, y, z, p, q), Y(x, y, z, p, q)] = 0, \\ P \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0, \end{aligned}$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation (31).

3° Enfin la M_2^2 obtenue en posant

$$Z = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0;$$

il lui correspond, si elle existe, l'intégrale singulière de (31).

14. Nous n'insisterons pas davantage sur ce pro-

blème, renvoyant, pour plus de détails, aux « Leçons » de M. Goursat. Nous signalerons pourtant une différence essentielle entre les deux domaines, plan et espace à trois dimensions, relativement à la théorie des T. C.

Comme nous l'avons vu plus haut (nos 8 et 9), ce n'est qu'à partir du troisième ordre qu'il existe des équations différentielles telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre par une T. C. prolongée. Dans l'espace à trois dimensions, cette circonstance se présente dès le second ordre, et ce sont seulement les équations aux dérivées partielles du premier ordre qui n'ont pas d'invariant pour le groupe des transformations de contact.

Il est facile d'en donner un exemple simple. Prolongeons jusqu'au second ordre la T. C. définie par les équations (29). En désignant par r, s, t, R, S, T , les dérivées partielles du second ordre, on trouve pour R une expression de la forme

$$R = \frac{Ar + 2Bs + Ct + D + E(rt - s^2)}{A_1r + 2B_1s + C_1t + D_1 + E_1(rt - s^2)}.$$

Il en résulte que les seules équations que l'on puisse ramener, par une T. C., à la forme

$$R = 0,$$

sont du type de Monge-Ampère; encore ne forment-elles, parmi les équations de Monge-Ampère, qu'une classe très particulière.

15. Nous étendrons, en terminant, à l'espace à trois dimensions, la proposition démontrée au n° 11. Supposons qu'il existe, dans cet espace, une transformation

qui conserve les contacts du second ordre et change une multiplicité d'éléments (x, y, z, p, q, r, s, t) satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} dz - p dx - q dy = 0, & \quad dp - r dx - s dy = 0, \\ dq - s dx - t dy = 0, & \end{aligned}$$

en une multiplicité d'éléments (X, Y, Z, P, Q, R, S, T) vérifiant les équations analogues

$$\begin{aligned} dZ - P dX - Q dY = 0, & \quad dP - R dX - S dY = 0, \\ dQ - S dX - T dY = 0; & \end{aligned}$$

il y a là une généralisation de la notion de multiplicité identique à celle que nous avons faite dans le plan (n° 10), et l'on voit, comme au n° 11, le parti que l'on pourrait tirer d'une transformation de ce genre pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Cette transformation sera définie par un système de huit fonctions distinctes X, Y, Z, \dots, T , des variables indépendantes x, y, z, \dots, t , telles que l'on ait identiquement

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} dZ - P dX - Q dY &= \lambda_1(dz - p dx - q dy) \\ &+ \lambda_2(dp - r dx - s dy) \\ &+ \lambda_3(dq - s dx - t dy), \\ dP - R dX - S dY &= \mu_1(dz - p dx - q dy) \\ &+ \mu_2(dp - r dx - s dy) \\ &+ \mu_3(dq - s dx - t dy), \\ dQ - S dX - T dY &= \nu_1(dz - p dx - q dy) \\ &+ \nu_2(dp - r dx - s dy) \\ &+ \nu_3(dq - s dx - t dy), \end{aligned} \right.$$

les trois coefficients λ n'étant pas tous nuls, non plus que les trois coefficients μ , ni les trois coefficients ν .

Nous allons montrer que les équations

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z, p, q, r, s, t), & Y &= Y(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ &\dots & T &= T(x, y, z, p, q, r, s, t) \end{aligned}$$

définissent nécessairement une T. C. prolongée, c'est-à-dire que les fonctions X, Y, Z, P et Q sont nécessairement indépendantes de r, s, t .

Les équations (32) montrent qu'il existe trois relations de la forme

$$\begin{aligned} Z &= F_1(X, Y, x, y, z, p, q), & P &= F_2(X, Y, x, y, z, p, q), \\ Q &= F_3(X, Y, x, y, z, p, q). \end{aligned}$$

Si les déterminants du second ordre déduits du tableau

$$\begin{vmatrix} X_r & X_s & X_t \\ Y_r & Y_s & Y_t \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls, il n'existe pas entre X et Y de relation indépendante de r, s, t . On peut alors prendre X et Y comme variables indépendantes à la place de l'un des couples (r, s) ou (s, t) . Supposons par exemple

$$\frac{D(X, Y)}{D(r, s)} \neq 0;$$

nous prendrons comme variables indépendantes x, y, z, p, q, X, Y, t . On tire alors de la première équation (32)

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + p \frac{\partial F_1}{\partial z} + r \frac{\partial F_1}{\partial p} + s \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} + q \frac{\partial F_1}{\partial z} + s \frac{\partial F_1}{\partial p} + t \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0, \\ F_2 = \frac{\partial F_1}{\partial X}, & F_3 = \frac{\partial F_1}{\partial Y}, \end{cases}$$

et de la seconde,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + p \frac{\partial F_2}{\partial z} + r \frac{\partial F_2}{\partial p} + s \frac{\partial F_2}{\partial q} = 0,$$

ou, en vertu de la troisième équation (33),

$$(34) \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial x} + p \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial z} + r \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial p} + s \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial q} = 0.$$

En dérivant par rapport à X la première équation (33), où r et s sont certaines fonctions des variables indépendantes, on a, après comparaison avec (34),

$$\frac{\partial r}{\partial X} \frac{\partial F_1}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial X} \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0.$$

En utilisant la seconde équation (33), on aurait de même

$$\frac{\partial r}{\partial Y} \frac{\partial F_1}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial Y} \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0.$$

Puisque l'on a, par hypothèse,

$$\frac{D(X, Y)}{D(r, s)} \neq 0,$$

on en déduit

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0,$$

et les équations (33) donnent alors

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0.$$

Les fonctions X, Y et Z ne seraient donc pas distinctes.

Il nous reste à examiner le cas où il existe entre X et Y une seule relation indépendante de r, s, t. Il est inutile en effet de s'arrêter à l'hypothèse où il existerait deux telles relations, car on voit immédiatement que la transformation considérée est alors une T. C. prolongée.

Nous démontrerons d'abord un lemme.

16. LEMME. — Si, entre six fonctions X, Y, Z, P, Q et ρ des variables indépendantes x, y, z, p, q, r, s, t il existe une relation de la forme

$$(35) \quad dZ - P dX - Q dY = \rho(dz - p dx - q dy),$$

ces six fonctions sont nécessairement indépendantes de r, s, t , pourvu que ρ ne soit pas nul identiquement (1).

En effet, l'équation (35) montre qu'il y a, entre les variables x, y, z, X, Y et Z , au moins une relation indépendante de p, q, r, s, t ; il ne peut d'ailleurs en exister plus de trois.

Supposons d'abord qu'il en existe trois; X, Y et Z seront alors des fonctions des seules variables x, y et z , et en identifiant les deux membres de (35), on aura, pour déterminer P, Q et ρ , les trois équations

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} - Q \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho p = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} - Q \frac{\partial Y}{\partial y} + \rho q = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P \frac{\partial X}{\partial z} - Q \frac{\partial Y}{\partial z} - \rho = 0.$$

Or, p et q sont des variables indépendantes; il en résulte que, si $\rho \neq 0$, ces trois équations sont distinctes; elles déterminent donc P, Q et ρ en fonction de x, y, z, p , et q .

Supposons en second lieu qu'il n'existe qu'une relation de la forme

$$Z = \varphi(X, Y, x, y, z);$$

(1) GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 305.

l'équation (35) doit être identique à

$$dZ - d\varphi = 0,$$

ce qui exige

$$P = \frac{\partial\varphi}{\partial X}, \quad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial Y}, \quad \rho = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0, \quad -\rho p = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$-\rho q = \frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

et par suite

$$\frac{\partial z}{\partial x} + p \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

Ces deux dernières équations peuvent être résolues par rapport à X et Y ; sinon, comme elles sont distinctes, puisque $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$, on en tirerait une relation entre les variables indépendantes. On aura donc bien X , Y , et par suite Z , P , Q et ρ en fonction de x , y , z , p et q .

Supposons enfin qu'il existe, entre x , y , z , X , Y et Z , deux relations; on peut toujours les mettre sous la forme

$$Z = \varphi_1(X, x, y, z), \quad Y = \varphi_2(X, x, y, z).$$

Si X n'est fonction d'aucune des variables r , s , t , on a, par exemple, $\frac{\partial X}{\partial p} \neq 0$. Prenons comme nouvelles variables indépendantes x , y , z , X , q , r , s , t . L'équation (35) donne alors, par identification,

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial X} - P - Q \frac{\partial Y}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial z} - Q \frac{\partial Y}{\partial z} = \rho, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - Q \frac{\partial Y}{\partial x} = -\rho p, \\ \frac{\partial Z}{\partial y} - Q \frac{\partial Y}{\partial y} = -\rho q; \end{array} \right.$$

on en tire

$$Q \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + q \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial z};$$

comme on ne peut avoir à la fois

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,$$

puisque ρ n'est pas nul, on voit que Q , et par suite P et ρ , s'expriment en fonction de X , x , y , z et q , de sorte qu'en définitive X , Y , Z , P , Q et ρ sont indépendantes de r , s , t .

Si X était fonction de l'une des variables r , s , t , on prendrait comme variables indépendantes x , y , z , p , q , X et deux des variables r , s , t . On aurait encore les équations (36), d'où l'on tirerait

$$Q \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\partial Z}{\partial x} + p \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$Q \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + q \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial z};$$

ces équations ne pourraient être compatibles que si l'on avait

$$Q = \frac{Z_y}{Y_y} = \frac{Z_z}{Y_z} = \frac{Z_x}{Y_x},$$

et par suite

$$\rho = 0.$$

17. Le lemme démontré, revenons à l'hypothèse signalée à la fin du n° 15, d'après laquelle il existerait, entre X et Y , une seule relation indépendante de r , s , t ; nous la supposerons, pour fixer les idées, résolue par rapport à Y , de sorte qu'on aura

$$Y = \varphi(X, x, y, z, p, q),$$

$$Z = \theta_1(X, x, y, z, p, q),$$

$$P = \theta_2(X, x, y, z, p, q),$$

$$Q = \theta_3(X, x, y, z, p, q).$$

Si X ne dépend d'aucune des variables r ou t , il en est de même de Y, Z, P, Q . La première équation (32) montre alors que λ_2 et λ_3 sont nécessairement nuls et, d'après le lemme, X, Y, Z, P et Q sont indépendants de r, s, t .

Supposons que X dépende, par exemple, de r . Prenons pour variables indépendantes x, y, z, p, q, X, s, t . La première équation (32) donne, par identification

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial X} - \theta_2 - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\lambda_1 p - \lambda_2 r - \lambda_3 s,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda_1 q - \lambda_2 s - \lambda_3 t,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda_1,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial p} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial q} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \lambda_3.$$

Les trois dernières équations montrent que λ_1, λ_2 et λ_3 ne dépendent ni de s , ni de t , et la troisième équation montre alors que $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Le lemme s'applique encore, et l'on est conduit à une contradiction.

En résumé, dans l'espace à trois dimensions comme dans le plan, toute transformation qui conserve les contacts du second ordre est une T. C. prolongée. Il est donc impossible de généraliser, dans cette direction, la théorie des T. C. en vue de son application à l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

[R 9a]

SUR CERTAINS PROBLÈMES DE FROTTEMENT ;

PAR H. BEGHIN.

Les *Nouvelles Annales* ont publié récemment un article de M. Thiry (*Étude d'un problème particulier où intervient le frottement de glissement*, mars 1923). Cet article est relatif aux difficultés que présente l'application de la Mécanique classique aux problèmes de frottement.

Les cas d'indétermination et d'incompatibilité, rencontrés dans les problèmes de frottement, ont été signalés par M. Painlevé (*Leçons sur le frottement*, 1895; *C. R. Acad. Sc.*, t. 121, 1895, p. 112; t. 140, 1905, p. 702; t. 141, 1905, p. 401, 546); ils ont été discutés également par M. Lecornu (*C. R.*, t. 140, 1905, p. 635, 847), par M. de Sparre (*C. R.*, t. 141, p. 310; *Bull. de la Soc. math.*, t. 34, 1906, p. 41, 108; t. 35, 1907, p. 141); voir aussi plusieurs articles de F. Klein, R. v. Mises, F. Pfeiffer, L. Prandtl, G. Hamel, J. Wellstein dans le *Zeitschr. Math. u. Phys.*, t. 58, 1910, et t. 61, 1913.

Quoique ces questions aient été ainsi longuement discutées, il semble qu'il y ait place encore pour quelques réflexions.

Tous les auteurs sont d'accord pour estimer que la loi de Coulomb n'est qu'une grossière approximation, approximation précieuse cependant puisque, avec des moyens simples, elle permet l'étude de phénomènes fort complexes, et l'on ne peut nier que cette étude —

même approchée — présente un intérêt pratique certain.

Je ne dirai que peu de chose de l'*incompatibilité* qui fait l'objet principal des articles cités.

Le fait que ces cas singuliers entraînent des discontinuités dans les vitesses, donc de véritables percussions sans vitesse relative normale des solides en contact, avait paru difficilement admissible. La loi de Coulomb sembla mise en défaut, mais on put lever l'objection en tenant compte de l'élasticité des solides naturels.

Je me bornerai à citer un exemple concret qui, à mon avis, présente l'avantage de mettre le plus possible la loi de Coulomb hors de cause.

Je suppose un individu marchant à la vitesse v sur un sol soigneusement cimenté. Il tient à la main l'extrémité B de sa canne, l'autre extrémité A touchant le sol à quelque distance en avant.

Si l'inclinaison de la canne est inférieure à une certaine valeur, l'observateur poursuit sa marche sans incident. Mais, si la nature du sol vient à varier, si, par exemple, une partie du sol est humide, l'autre sèche, l'observateur, arrivant à la vitesse v sur une région moins glissante, est instantanément arrêté par sa canne.

L'expérience est facile à faire sous cette forme grossière, et à répéter, sous une forme plus précise, au moyen d'une tige AB articulée en B à un corps qu'on déplace à la vitesse v sur le sol.

Lorsque la canne arrive en glissant à la limite des deux régions, la composante tangentielle T et la composante normale N de la réaction ont les valeurs T_0 et N_0 ; je pose

$$f_0 = \frac{T_0}{N_0}.$$

L'incompatibilité se manifeste aussitôt, si l'inclinaison de la canne est suffisante, sous la seule condition que, pour toute valeur de N supérieure ou égale à N_0 , sur la seconde région du sol, le rapport $\frac{T}{N}$, dans l'hypothèse du glissement à la vitesse v , soit supérieur à f_0 . Cette condition se réalise facilement, puisque l'expérience montre que ce rapport croît avec N .

Le mécanisme de l'arc-boutement qui se produit ainsi est simple à imaginer : les éléments matériels du sol et de la canne s'entraînent mutuellement ; la canne tourne infiniment peu autour de son extrémité B , se comprimant de plus en plus, jusqu'à ce que la réaction qu'elle exerce en B sur le corps auquel elle est articulée, soit suffisante pour produire l'arrêt.

Dans les cas d'*indétermination* qu'ils examinent, les auteurs s'efforcent généralement de faire un choix parmi les différentes solutions fournies par la Mécanique classique. Je ne crois pas qu'il y ait lieu de choisir entre ces solutions, qui toutes me semblent acceptables au même titre et réalisables, plus ou moins facilement d'ailleurs, certaines d'entre elles pouvant naturellement être instables.

Soient, par exemple, deux murs presque verticaux surplombant légèrement, l'un en face de l'autre. Entre ces deux murs, je place une barre horizontale AB : cette barre reste-t-elle en équilibre ? La Mécanique classique indique comme possibles : 1° une chute verticale avec l'accélération de la pesanteur ; 2° l'équilibre avec, comme réactions en A et B , les composantes changées de sens du poids P suivant les droites IA et IB , I désignant un point arbitraire situé entre le point O , milieu de AB , et le point C commun aux génératrices supérieures des deux cônes de frottement.

Qu'indique l'observation? Si l'on se borne à appuyer légèrement la barre sur les murs avant de l'abandonner, elle tombe. Si on la coince fortement, elle reste en équilibre, et les réactions, qui sont dans un rapport étroit avec l'état de compression de la barre, dépendent évidemment de l'effort plus ou moins grand avec lequel on l'a coincée. Si même le coefficient de frottement est assez grand, et si la barre est facilement déformable (il s'agit, bien entendu, de déformations infiniment petites), on conçoit que la barre puisse, pour ainsi dire, rouler sans glisser sur les murs en se déformant, pendant qu'on essaie de la coincer, revenant par suite en arrière au moment où on l'abandonne, puis tombant, sans qu'on puisse jamais la maintenir en équilibre par cette méthode.

Je reprends aussi le problème de la canne, en le modifiant légèrement : Au lieu de l'articuler en son extrémité B, je la suppose articulée en son milieu O à un corps se déplaçant à la vitesse v sur le sol.

Si la canne fait avec la verticale un angle inférieur à l'angle de frottement, la mécanique classique indique ou bien qu'il y a incompatibilité, ou bien que le mouvement se poursuit avec une réaction nulle au contact du sol. L'observation confirme ces deux solutions : le mouvement peut se poursuivre sans difficulté, mais si la canne vient à exercer la moindre pression sur le sol, il y a arrêt brusque. C'est ce qui se produira, par exemple, si la barre est abandonnée dans un certain état de compression : en se détendant, elle amorcera fatalement l'arc-boutement.

Soit de même un problème de M. Chaumat indiqué par M. Painlevé (*C. R.*, t. 140, 1905, p. 401). Dans un plan vertical, un disque circulaire est en contact avec une droite inclinée parfaitement polie Ox et avec

une horizontale Oy dépolie qui lui est tangente en son point le plus haut. Il est abandonné sans vitesse, mais on lui applique un couple N .

Soient r le rayon du disque, P le poids, f le coefficient de frottement, α l'angle $x\hat{O}y$, je suppose

$$f > \tan \alpha.$$

Si le couple N est supérieur à

$$\frac{fPr}{f \cot \alpha - 1},$$

on vérifie facilement que la Mécanique classique fournit deux solutions : ou bien une descente du disque le long de Ox , ou bien l'arc-boutement. C'est la descente qui se produira, si l'on abandonne le disque en l'appuyant légèrement sur l'horizontale Oy ; mais, si on l'applique plus fortement, on amorcera ainsi l'arc-boutement.

On pourrait multiplier les exemples; je me bornerai à dire quelques mots du problème de M. Thiry. Pour donner plus de valeur à l'indétermination constatée, il me semble préférable de supposer les liaisons unilatérales, le corps que l'on étudie reposant sur le mur vertical et sur le sol à la manière d'une échelle. Peut-être, en effet, pourrait-on objecter, dans le cas de liaisons bilatérales, que, chaque contact se trouvant ainsi doublé, on rassemble dans un même énoncé quatre problèmes différents? On serait tenté d'y voir une cause d'indétermination.

Ainsi modifié, le problème reste indéterminé, lorsque le centre de gravité se trouve dans celle des deux régions hachurées qui est à gauche de la figure (p. 215). Il est intéressant de signaler aussi une infinité de solutions, lorsque le centre de gravité se trouve sur la branche non figurée de l'hyperbole H , : dans ces

solutions, le corps glisse en B et se soulève en A dans une direction variable.

Enfin, lorsqu'il y a équilibre, le calcul des réactions ne donne-t-il pas une infinité de solutions?

Ces cas d'indétermination n'ont rien qui doive nous surprendre : *la Mécanique classique n'analyse pas les déformations infiniment petites, mais elle n'en méconnaît pas l'existence* : lorsqu'on dit, en Mécanique classique, qu'on abandonne tel solide dans telles conditions de position et de vitesse, il n'est pas question de l'état initial de ses déformations infiniment petites, on ne se donne que sa position d'ensemble et l'état initial de ses vitesses dans un déplacement d'ensemble. Mais, si l'on veut que les problèmes que l'on résout aient une portée pratique, il est indispensable d'admettre un état initial arbitraire de déformations infiniment petites, sous réserve, bien entendu, que ces déformations soient assez petites pour ne pas mettre en jeu des forces infiniment grandes, telles que celles qu'on rencontre dans les chocs et percussions : En d'autres termes, on doit pouvoir négliger l'énergie propre de cette déformation.

Dans ces conditions, n'est-il pas remarquable que la Mécanique classique puisse si souvent nous donner une réponse unique indépendante des déformations initiales et de la manière dont les corps sont susceptibles de réagir? *S'il arrive, dans certains cas, que nous rencontrions plusieurs solutions, c'est que les données sont insuffisantes : elles auraient dû porter sur les déformations initiales des corps et sur leur nature élastique.*

Cet état initial ne peut, en effet, se maintenir sans modification, puisque les forces qui le maintenaient artificiellement disparaissent à l'instant initial et sont

remplacées par telles ou telles réactions. L'état des déformations évolue donc, plus ou moins gêné par les frottements, et l'on conçoit que, suivant le point de départ de cette évolution, il puisse tendre vers des états différents comportant soit l'un, soit l'autre des mouvements d'ensemble fournis par la Mécanique classique.

Les problèmes de *choc avec frottement* présentent des difficultés particulières : lorsque deux solides se heurtent, si la distribution des vitesses dans chacun d'eux avant le choc est conforme à la cinématique des solides invariables, il n'en est évidemment plus de même pendant le choc : il est vraisemblable, en effet, que, si, par exemple, un solide heurte un obstacle fixe rigoureusement indéformable, les éléments du solide qui se trouvent au contact de l'obstacle se trouvent immédiatement arrêtés, puis cette zone influencée par le choc s'étend de proche en proche, sa limite se propageant à l'intérieur du solide avec une certaine vitesse jusqu'à ce que les points les plus éloignés soient eux-mêmes avertis du choc.

La Mécanique classique, qui n'analyse pas ces déformations, est tenue de suppléer à cette analyse par des hypothèses : *invariabilité de l'orientation du plan tangent commun, rigidité des solides à l'instant où cesse la percussion de contact*. L'intégration des équations du mouvement, pendant la durée du choc, permet alors de résoudre un certain nombre de problèmes simples en faisant abstraction de ce qui se passe pendant le choc.

Si le frottement est pris en considération, le problème se complique. La Mécanique classique, comme on l'a vu dans plusieurs articles récents (1), suppose appli-

(1) H. V., juin 1923; J. PÈRES, décembre 1923 et mars 1924.

cables les lois habituelles du frottement; son coefficient est supposé constant. Pour orienter la force de frottement à chaque instant, il faut alors suivre la variation de la vitesse de glissement. Le système de quantités de mouvement et cette vitesse de glissement sont exprimés à chaque instant comme si chacun des corps conservait sa rigidité, quoique cette rigidité soit évidemment incompatible avec le choc lui-même.

Cette hypothèse revient à admettre que les régions, au voisinage immédiat du contact, sont seules déformées et que ces déformations sont toutes orientées à peu près normalement au plan tangent, malgré l'obliquité de la réaction. On peut dire aussi que la Mécanique classique raisonne sur des solides rigoureusement invariables recouverts d'une écorce infiniment mince, seule déformable normalement à son plan tangent. Les déformations de cette écorce aux points où elle est heurtée sont permanentes dans le cas de corps inélastiques; elles sont uniquement fonctions de la réaction, et s'annulent avec elle, dans le cas de corps parfaitement élastiques. Dans quelle mesure les corps de la nature se comportent-ils comme ces corps théoriques, c'est surtout à l'expérience qu'il appartient de se prononcer.

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION A LA MÉTHODOLOGIE MATHÉMATIQUE, par
M. Stuyvaert. 1 vol. 22 × 15 de 258 pages, Gand,
 Van Rysselberghe et Rombaut. Prix : 20^{fr}.

Dans un Chapitre préliminaire de son excellent Livre,
M. Stuyvaert expose le but et le programme de la Méthodo-

logie mathématique. Cet enseignement, qui doit assurer la formation des futurs professeurs, comprendra l'examen des principes de la science et l'étude, très approfondie et complète, de questions de mathématiques élémentaires; étude où l'on aura l'occasion de comparer les divers modes d'exposition, où l'on discutera les difficultés, où l'on s'attachera enfin à mettre en évidence les relations entre théories diverses. Et, parce qu'en un cours annuel on ne peut étudier à fond que quelques questions, l'auteur réunit dans cette *Introduction*, qui en donne une vue d'ensemble, « les premières notions relatives aux questions traditionnelles en Méthodologie ».

La plus grande partie du Livre se rapporte à l'Arithmétique, la Théorie des nombres et l'Algèbre. Quelques Chapitres sont naturellement consacrés aux principes de l'Arithmétique, aux diverses extensions de la notion de nombre, à l'introduction de l'exponentielle. Par ailleurs, l'auteur développe assez largement la théorie des congruences et donne les notions essentielles sur la théorie générale des corps et domaines de rationalité et d'intégrité: il consacre en particulier quelques pages à l'étude des entiers complexes.

Sous le titre de *Problèmes antiques*, un fort joli Chapitre comporte, d'abord l'étude des constructions possibles par la règle et le compas (avec application au problème de Delos, à la trisection de l'angle et à la construction des polygones réguliers), puis la démonstration de la transcendance de π et de e .

Les deux derniers Chapitres du Livre sont enfin consacrés à la Géométrie. On y trouvera l'examen du système de postulats de Hilbert, quelques pages très claires sur les géométries non euclidiennes et leur interprétation, une très fine discussion axiomatique de la géométrie projective générale et les notions essentielles sur la métrique cayleyenne.

L'Ouvrage réalise ce qu'on pouvait attendre de la compétence de l'auteur; jamais superficiel, éducatif et attachant par la variété des points de vue, utile aussi parce qu'il aborde bien des questions intéressantes qui sont un peu en marge des programmes classiques, ce Livre a sa place marquée dans toute bibliothèque.

J. P.

QUESTIONS.

2466. Soit, sur la sphère de rayon 1, la courbe de Viviani qui a pour équation

$$\omega = \theta,$$

ω et θ étant respectivement la longitude et la latitude d'un point M de cette courbe. Prouver que la *sous-normale sphérique* au point M (c'est-à-dire un arc d'équateur limité au méridien de M et au grand cercle normal en M à la courbe) est égale à ω .

J. DARD.

2467. Les diagonales d'un quadrilatère convexe inscriptible le partagent chacune en deux triangles.

1° Le rapport des produits des rayons des cercles inscrits à ces triangles, qui touchent une diagonale, à celui des rayons des cercles inscrits qui touchent l'autre diagonale égale le rapport des deux diagonales du quadrilatère. Réciproque.

2° Même propriété pour les cercles exinscrits qui touchent les diagonales elles-mêmes (et non leurs prolongements).

3° Même propriété pour les huit autres cercles exinscrits, convenablement partagés en quatre groupes de deux cercles (1).

V. THÉBAULT.

2468. Si les côtés a, b, c d'un triangle vérifient la relation

$$3a^2 = b^2 + c^2 :$$

$$1^\circ \quad a^2 = bc \cos A; \quad \cot A = \cot B + \cot C;$$

2° La distance du point de Lemoine au côté BC égale le quart de la hauteur AA';

3° La droite des pieds des symédianes issues de B et de C est perpendiculaire à la symédiane issue de A et contient le

(1) Cette question est à rapprocher de 2461 (*N. A.*, 1923-1924, p. 75).

centre du cercle circonscrit au triangle et celui du cercle d'Apollonius relatif à BC. V. THÉBAULT.

2469. Q étant une quadrique donnée, soit AB_1, CA_1, BC_1 un hexagone formé avec six génératrices de Q, appartenant alternativement à l'un et l'autre système. Soient α le point de rencontre de BC_1 et de B_1C , α' le conjugué harmonique de α par rapport au segment BC_1 . Soient $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$ les points analogues (β' est sur CA_1 , γ' sur AB_1).

Démontrer qu'il existe une cubique gauche, tracée sur Q et passant par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. R. B.

2470. Soit PQR un triangle équilatéral circonscrit à une parabole, QR touchant la courbe en son sommet S, PQ la touchant en M, PR en N. Soient F le foyer de la parabole et KL la corde focale perpendiculaire à l'axe, K et M étant du même côté de l'axe. Soient B le point commun à SK et FM, C le point commun à SL et FN. Soit enfin A le point commun à BN et CM.

Démontrer que :

- 1° FM passe par R, FN par Q;
- 2° Le triangle évidemment isocèle ABC est rectangle en A;
- 3° AQ et AR sont les deux trisectrices de l'angle BAC; BP et BR celles de l'angle ABC; CP et CQ celles de l'angle ACB.

J.-A. MOREN.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1. On considère la courbe gauche définie par les formules

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ch} z \\ y &= \operatorname{sh} z \end{aligned} \quad \left(\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right).$$

1° Former l'équation du plan osculateur au point de cote z et celle de la trace de ce plan sur le plan des xy .

2° Lorsque z varie, cette trace enveloppe une courbe plane; calculer les coordonnées du point de contact de la trace et de son enveloppe en fonction de z ; vérifier que ce point est sur la tangente à la courbe gauche au point x, y, z .

3° Construire la courbe enveloppe précédente.

II. Ellipsoïde d'inertie.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION DE I. — La première partie se traite immédiatement et l'on trouve la trace

$$-X \operatorname{sh} z + Y \operatorname{ch} z + z = 0,$$

d'où, pour le point de contact avec l'enveloppe,

$$X = \operatorname{ch} z - z \operatorname{sh} z, \quad Y = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} z;$$

on retrouve le même point en cherchant la trace sur xy de la tangente à la courbe gauche au point x, y, z .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

1° Déterminer la solution telle que, pour $x = 0$, on ait $y = 0$, $y' = 1$. Construire la courbe intégrale correspondante (γ).

2° Soient A_n le point de l'axe des x d'abscisse $n\pi$ et S_n l'aire comprise entre la corde $A_n A_{n+1}$ et l'arc $A_n A_{n+1}$ de (γ). Calculer S_n ; calculer, avec l'approximation des tables à cinq décimales, les limites pour n infini des sommes

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n, \quad |s_1| + |s_2| + \dots + |s_n|.$$

3° Sur l'arc $A_n A_{n-1}$ il y a un point d'inflexion B_n . Soient M un point de la courbe voisin de B_n et R le rayon de courbure de (γ) en M . Montrer que le produit $|R \times MB_n|$ tend vers une limite λ_n quand M tend vers B_n . Étudier comment varie λ_n avec l'entier n et calculer sa valeur minima.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'intégrale cherchée de l'équation différentielle proposée est $y = e^{-x} \sin x$.

On trouve

$$s_n = (-e^{-\pi})^n \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

et l'on a à calculer les limites des sommes de deux progressions géométriques de raison $-e^{-\pi}$ et $e^{-\pi}$.

Pour la troisième partie le point B_n est d'abscisse $n\pi + \frac{\pi}{2}$, le produit indiqué, ou mieux son carré, se calcule sans difficulté. C'est une fonction de x qui prend la forme $\frac{0}{0}$ quand M tend vers B_n et l'on peut trouver sa limite par application répétée de la règle de l'Hôpital. Le reste est immédiat.

(Bordeaux, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Construire la courbe (C) qui représente les variations de la fonction

$$(1) \quad f(x) = e^{-x}(x+1).$$

Évaluer l'aire limitée, au-dessus de l'axe des x , par la courbe (C).

2° Vérifier que, x étant positif, la différence

$$f(x) - f(-x)$$

est toujours positive et trouver la partie principale de cette différence quand x , pris pour infiniment petit principal, tend vers zéro.

3° Soit M_1 un point de la courbe (C) d'abscisse positive donnée x_1 ; la parallèle à l'axe des x menée par M_1 rencontre (C) en un autre point dont on nommera $-x_2$ l'abscisse; on a donc $f(-x_2) = f(x_1)$.

Soient de même $-x_3$ tel que $f(-x_3) = f(x_2)$; $-x_4$ tel que $f(-x_4) = f(x_3)$, ...

Quelle est la limite de la suite des nombres ainsi définis : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

4° Un point matériel P, de masse unité, est mobile sans frottement sur un axe Ox . Il est attiré par l'origine proportionnellement à la distance, la force correspondante étant $F = -\frac{1}{2}x$ (x abscisse du mobile); il est de plus

soumis à une force dirigée en sens inverse de la vitesse

$$\left(v = \frac{dx}{dt} \right) \text{ et égale à } \frac{1}{2} v^2.$$

Montrer que, lorsque la vitesse est négative, elle est liée à l'abscisse par la relation

$$(2) \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = e^{-x} [f(x) - C].$$

C étant une constante et $f(x)$ étant la fonction précédente (1). Qu'y a-t-il à changer à l'équation (2) si la vitesse du mobile est positive.

Indiquer sommairement, sans chercher à intégrer (2) les circonstances du mouvement. [Conditions initiales : pour $t = 0$, $x = x_1$ donné, $\frac{dx}{dt} = 0$.]

INDICATIONS. — 1° L'aire vaut e . 2° La partie principale est $\frac{2}{3} x^3$. 3° On vérifiera immédiatement que la suite envisagée est décroissante; la limite l est nulle car elle vérifie

$$f(l) = f(-l).$$

4° Ne présente pas de difficultés; on retrouvera, dans l'étude du mouvement de P, la suite précédente.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit la courbe représentée paramétriquement par

$$x = R(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = R(1 - \cos \varphi)$$

(axes rectangulaires). On la fait tourner autour de Ox .

1° Aire engendrée par un arc OM de cette courbe (M étant le point de paramètre φ).

2° Coordonnées du point M_0 pour lequel l'aire précédente est égale à $8\pi R^2$.

3° Volume engendré par l'aire plane comprise entre l'arc OM_0 , Ox et l'ordonnée de M_0 en tournant autour de Ox .

INDICATIONS. — L'application des formules classiques conduit pour déterminer le paramètre φ_0 du point M_0 à l'équation

$$2 \cos^3 \frac{\varphi_0}{2} - 6 \cos \frac{\varphi_0}{2} + 1 = 0.$$

(Marseille, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Intégrer l'équation différentielle*

$$y'' - 4y' + 5y = e^x \cos x.$$

II. *Construire, en employant par exemple les coordonnées polaires, la courbe $y^4 - x^4 + 2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0$. Chercher si la courbe admet des asymptotes.*

La courbe coupe Ox en un point A d'abscisse $\sqrt{2}$. Aire comprise entre OA et la courbe.

III. 1° *Construire les projections sur le plan xOy des courbes tracées sur la surface S qui a pour équation*

$$z = x^2y + y^3$$

et qui coupent à angle droit les sections de S par les plans parallèles à xOy.

2° *On considère le solide limité par S et la surface*

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

volume de la portion de ce solide pour laquelle on a

$$y > 0, \quad z > 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un point M est soumis à son poids mg et à une force $mg \frac{OM}{a}$ dirigée de M vers un point fixe O.*

1° *Surfaces de niveau et lignes de forces du champ ainsi défini.*

2° *Le point M est mobile sans frottement sur une droite verticale D, située à la distance $a = OA$ du point O. Peut-il être en équilibre stable. Étudier le mouvement de M abandonné sans vitesse en A.*

3° Le point M est mobile avec frottement sur D, le coefficient de frottement est $\frac{1}{4}$. Mêmes questions que dans 2°.

II. x étant évalué en radians, dire combien l'équation $4 \sin x - 2x - 1 = 0$ a de racines. Calculer la plus petite racine positive à $\frac{1}{100}$ près. (Lyon, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation

$$(3x^2 + y^2)y dx + (y^2 - x^2)x dy = 0 :$$

a. considérée comme équation homogène; b. en lui donnant un facteur intégrant fonction de y seul.

2° On considère les cercles C d'équation

$$x^2 + y^2 + (1 - \lambda^2)x - 2\lambda y + (1 + \lambda)^2 = 0,$$

λ étant un paramètre variable. Soient D le lieu de leurs centres, Γ leur enveloppe, C_2 le cercle particulier obtenu pour $\lambda = -2$; dessiner les courbes D, Γ , C_2 sur la même figure; préciser l'intersection et la disposition mutuelle de Γ avec D et C_2 .

3° Chaque cercle C coupe Γ en deux points P et Q: montrer que PQ passe par un point fixe A et que le produit $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ est indépendant de λ .

4° Le point A est le point d'abscisse positive sur Γ où la tangente est parallèle à Oy: calculer à $\frac{1}{100}$ près l'aire comprise entre l'arc OA de Γ et sa corde.

II. Une plaque carrée homogène de côté $a = 1^m$ et de masse $M = 10^k$ est mobile autour d'un de ses côtés qui est fixe. A l'instant où sa vitesse angulaire est $\omega = 2\pi$ radians par seconde; la plaque s'arrête brusquement en heurtant un obstacle fixe par le côté opposé à l'axe de rotation. La durée du choc étant $\tau = 0,01$ seconde, quelle est la valeur moyenne de la force de percussion correspondante, supposée normale au plan de la plaque?

(Toulouse, juillet 1923.)

[O'4f]

**ASYMPTOTIQUES NON RECTILIGNES D'UNE SURFACE RÉGLÉE
ET ÉQUATION DE RICCATI CORRESPONDANTE ;**

PAR BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. On sait que sur une surface réglée S non développable les asymptotiques non rectilignes découpent sur deux génératrices D, D' , voisines ou non voisines, deux divisions en homographie : un calcul classique très simple montre en effet que, si les équations paramétriques de S sont

$$(1) \quad x = a + a_1 v, \quad y = b + b_1 v, \quad z = c + c_1 v,$$

où a, b, c, a_1, b_1, c_1 ne dépendent que de u , l'équation différentielle des asymptotiques est de la forme

$$(2) \quad \frac{dv}{du} = Uv^2 + U_1v + U_2,$$

où U, U_1 et U_2 sont des fonctions de u seul : la propriété en résulte.

2. Ce résultat admis, si les asymptotiques A, A_1, \dots, A_n découpent sur D et D' les couples correspondants $(M, M'), (M_1, M'_1), \dots, (M_n, M'_n), \dots$, les droites $MM', M_1M'_1, \dots, M_nM'_n, \dots$ joignant les points homologues de cette homographie engendrent une quadrique et comme cela subsiste, même si D' se rapproche indéfiniment de D , à la limite les tangentes asymptotiques $MT, M_1T_1, \dots, M_nT_n, \dots$ autres que D , menées à S aux divers points de D engendrent une quadrique q nécessairement osculatrice à S tout le long de D .

3. Je ferai remarquer que dans la solution du problème d'analyse d'agrégation 1923 (1), j'ai indiqué une méthode différente, ne supposant connu aucun résultat de calcul, pour arriver à démontrer que les tangentes $MT, M, T_1, \dots, M_n T_n, \dots$ engendrent une quadrique q . Cette méthode est basée sur la considération des quadriques contenant D et une autre génératrice D' , qui se rapproche indéfiniment de D , puis sur la considération de la quadrique contenant D , et deux génératrices D', D'' distinctes de D , qui se rapprochent ensuite indéfiniment de D , indépendamment l'une de l'autre. J'ai ainsi démontré les deux résultats suivants :

a. Il existe un système linéaire ∞^3 de quadriques Q , se raccordant avec S tout le long de D .

b. Dans ce système, il y a une quadrique q et une seule osculatrice à S tout le long de D ; les génératrices de q , de système opposé à D , sont les tangentes asymptotiques à S tout le long de D .

4. Je crois instructif de montrer que cette seconde méthode permet de démontrer directement, sans aucun calcul, que quatre asymptotiques A, A_1, A_2, A_3 , quelconques non rectilignes, découpent sur les génératrices D, D', \dots quatre points de rapport anharmonique constant, d'où résultera bien que v , étudié comme fonction de u sur une asymptotique, satisfera à une équation de Riccati de la forme (2). Les deux méthodes diffèrent donc en ce que l'hypothèse de l'une est au contraire la conclusion de l'autre et inversement.

Il suffit de démontrer que les asymptotiques $A, A_1, \dots, A_n \dots$ découpent sur D et D' des couples $(M, M'), \dots$,

(1) Voir *Nouvelles Annales*, 5^e série, t. II, 1923-1924, p. 144-157.

(M_n, M'_n) en homographie; ou encore, si l'on considère le rapport anharmonique

$$(3) \quad \rho = (MM_1M_2M_3),$$

ce rapport est une fonction de u dont nous calculerons la valeur, $\rho + \Delta\rho$, en série ordonnée suivant les puissances de Δu , quand on passe à la génératrice $u + \Delta u$:

$$(4) \quad \rho + \Delta\rho = \rho + \frac{\Delta u}{1} \left(\frac{d\rho}{du} \right) + \frac{\Delta u^2}{1.2} \left(\frac{d^2\rho}{du^2} \right) + \dots,$$

et il suffit de montrer que le coefficient de Δu est nul, quel que soit u , pour montrer que ρ est constant. En effet, supposons D' infiniment voisine de D , correspondant à la valeur $u + \Delta u$, où Δu est considéré comme infiniment petit principal. Chaque segment MM' , $M_1M'_1$, ..., $M_nM'_n$, ... est alors infiniment petit du premier ordre; sur la tangente MT prenons une longueur $M\mu$ égale, par exemple, à MM' et traçons la génératrice Δ de q , de même système que D , issue de μ ; Δ perce chaque tangente M_1T_1 , ..., M_nT_n , ... aux points $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, chaque segment $M_n\mu_n$ est lui aussi du premier ordre, donc la distance $\mu_nM'_n$ est du second ordre. Le rapport anharmonique

$$\rho + \Delta\rho \quad \text{ou} \quad (M'M'_1M'_2M'_3),$$

ne diffère donc du rapport

$$(\mu_1\mu_2\mu_3) = (MM_1M_2M_3) = \rho$$

que d'une quantité du second ordre, cela exige

$$\frac{d\rho}{du} = 0$$

Le rapport ρ est donc une constante : tout le reste en découle.

C. Q. F. D.

[O'5a]

SUR LES VOLUMES TOURNANTS ;

PAR A. BUHL.

1. Ceci est la suite de l'article précédemment publié *Sur la Géométrie de la formule de Stokes*.

Les travaux fondamentaux sur le sujet sont toujours ceux de M. G. Kœnigs qui, pour un contour fermé C donné, a considéré le complexe formé par les axes auxquels correspondent des volumes tournants équivalents. C'est dans un ordre d'idées analogue que je considère les familles de surfaces portant des C qui, avec deux axes de rotation donnés D et D' , engendrent des volumes tournants équivalents ou en rapport constant.

L'étude est intéressante, d'abord parce qu'elle livre quelques aperçus probablement nouveaux sur les hélicoïdes et les surfaces de révolution, ensuite et surtout, parce qu'elle conduit à un système d'équations différentielles qui est de ceux qui sont *identiques à leur système adjoint* (ou du moins qui se ramène facilement à ce type après avoir fait abstraction des termes purement constants). On sait que ces systèmes ont été particulièrement étudiés; on pourra se reporter aux *Surfaces* de Gaston Darboux (t. I, 2^e édition, Ch. II) et au *Cours d'Analyse* de M. Édouard Goursat (t. II, 2^e édition, p. 482) encore que le système envisagé plus loin soit fort simple et puisse être intégré par des considérations des plus élémentaires.

Les systèmes différentiels identiques à leur adjoint ont d'ailleurs actuellement un regain d'actualité qui leur vient de la théorie du déplacement parallèle géné-

ralisé de M. T. Levi-Civita (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1917, p. 173). Au fond ce n'est pas une coïncidence fortuite qui lie ce grand sujet avec les lignes élémentaires qui suivent; il y a, dans les deux cas, une invariance stokienne concernant une intégrale double, mais ici, je laisse de côté de tels points de vue pour lesquels je renverrai à mes Mémoires *Sur l'Électromagnétisme et la Gravifique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, années 1921 et suivantes).

2. *Équation aux dérivées partielles des surfaces S sur lesquelles on peut tracer un contour fermé C donnant, quant à deux axes de rotation D et D' quelconques, deux volumes tournants de rapport constant.* — Reprenons l'expression générale du volume tournant dû à une cloison S :

$$(1) \quad V = 2\pi \int \int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma.$$

Cette expression est celle de l'article précédent et de mon opuscule *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* (p. 25). Ici l'axe de rotation passe par le point (a, b, c) et a pour cosinus directeurs λ, μ, ν . Dans ces conditions, on peut écrire immédiatement, pour définir les surfaces S, l'équation

$$(2) \quad m \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ x-a' & y-b' & z-c' \end{vmatrix}.$$

Les axes de rotation sont évidemment

D passant par (a, b, c) avec les cosinus directeurs λ, μ, ν ,
 D' » (a', b', c') » λ', μ', ν' .

Ils sont quelconques mais, pour éviter toute difficulté, on supposera n'étudier que des contours C non traversés par D ou D' . Dans (2), m et n sont des facteurs de proportionnalité constants. Manifestement (2) est une équation aux dérivées partielles linéaire et homogène, du premier ordre, puisque α, β, γ peuvent y être remplacés par les coefficients directeurs de la normale à S .

L'étude de (2), en lui laissant la forme absolument symétrique qui vient d'être indiquée, ne serait sans doute pas sans intérêt. Ici nous prendrons des coordonnées telles que D et D' aient les équations :

$$(D) \quad \begin{cases} x = a, \\ z = y \cdot \text{tang } \omega, \end{cases}$$

$$(D') \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = -y \cdot \text{tang } \omega. \end{cases}$$

Les axes de rotation D et D' ne cessent point ainsi d'être quelconques l'un par rapport à l'autre, mais leur perpendiculaire commune est prise pour axe Ox cependant que leurs projections sur Oyz admettent Oy et Oz pour bissectrices.

Pour fixer les idées, on peut imaginer que l'angle ω est aigu. Nous le ferons tendre vers l'angle droit au paragraphe 4.

Alors l'équation (2) devient

$$(3) \quad m \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ x-a & y & z \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & -\cos \omega & \sin \omega \\ x+a & y & z \end{vmatrix}.$$

Posons

$$m + n = \mu, \quad m - n = \nu;$$

il est à peine besoin de dire que c'est là une notation nouvelle en laquelle μ et ν n'ont aucun rapport avec les

cosinus λ , μ , ν , de (1) ou (2), qui ne reparaîtront pas explicitement dans la suite. Ainsi (3) peut s'écrire

$$(4) \quad \alpha \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ \nu y & \mu z \end{vmatrix} - \beta \sin \omega \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ x & a \end{vmatrix} - \gamma \cos \omega \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ a & x \end{vmatrix} = 0,$$

et, en posant

$$y = \eta \sin \omega, \quad z = \zeta \cos \omega,$$

le système différentiel ordinaire, à considérer pour intégrer (4), est

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu \cos^2 \omega \cdot \zeta - \nu \sin^2 \omega \cdot \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = \nu x - \mu a, \\ \frac{d\zeta}{dt} = -\mu x + \nu a. \end{cases}$$

C'est ce système (5) qui, en variables x , y , z et abstraction faite des termes νa et $-\mu a$, est identique à son adjoint. Des calculs très simples donnent pour son intégrale générale

$$(6) \quad \begin{cases} x = A \cos kt + \frac{\alpha \mu \nu}{k^2}, \\ \eta = A \frac{\nu}{k} \sin kt + \mu \left(\frac{\nu^2}{k^2} - 1 \right) at + B, \\ \zeta = -A \frac{\mu}{k} \sin kt - \nu \left(\frac{\mu^2}{k^2} - 1 \right) at + C, \end{cases}$$

avec

$$(7) \quad \begin{cases} k^2 = \mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega, \\ B \nu \sin^2 \omega = C \mu \cos^2 \omega. \end{cases}$$

Les constantes arbitraires A , B , C se réduisent à deux d'après la seconde équation (7); il pourrait bien y en avoir une troisième accompagnant t de manière purement additive mais elle disparaîtrait en même temps que t , variable auxiliaire destinée à l'élimination. Ainsi le

problème général ici posé peut être considéré comme résolu et de façon fort élémentaire, mais il reste à en étudier bien des particularités géométriques intéressantes.

3. Surfaces S portant des contours C donnant, quant à D et D' , des volumes tournants équivalents. — Traitons directement cette question (1). Avec

$$m = 1, \quad n = -1, \quad \text{d'où} \quad \mu = 0, \quad \nu = 2,$$

l'équation (3) devient

$$\alpha y - \beta x - \gamma \cdot a \cotang \omega = 0.$$

En coordonnées semi-polaires, on a les surfaces intégrales

$$(8) \quad z = \frac{a}{\text{tang } \omega} \theta + \varphi(r).$$

Ce sont des *hélicoïdes*.

Le même résultat est facile à tirer des équations (6) et (7) qui donnent

$$x = A \cos kt, \quad ky = 2A \sin kt, \quad z = 2at + C, \quad k = 2 \sin \omega$$

Les droites D et D' étant génératrices d'un même système sur l'hyperboloïde de révolution

$$(9) \quad x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\text{tang}^2 \omega} = a^2,$$

on peut énoncer ce théorème :

Si un contour fermé, tracé sur l'hélicoïde (8),

(1) Proposée au Certificat de calcul différentiel et intégral, à Toulouse, en juillet 1923. On voit que le problème est susceptible de conduire à d'autres plus généraux et dont le niveau atteindrait vite celui de l'Agrégation.

tourne dans l'espace autour de deux génératrices d'un même système, passant en deux points diamétralement opposés du cercle de gorge de l'hyperboloïda (9), les deux volumes tournants sont équivalents.

Si l'on avait pris $m = n$ on aurait trouvé un hélicoïde analogue à (8) mais ayant Oy pour axe.

4. Cas de l'angle ω droit, m et n étant quelconques. — Ici l'équation (3) est

$$m \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x - a & y \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x + a & y \end{vmatrix}$$

ou

$$\alpha \nu y - \beta (\nu x - \mu a) = 0.$$

Le système différentiel

$$\frac{dx}{\nu y} = \frac{dy}{\mu a - \nu x} = \frac{dz}{0}$$

donne les surfaces intégrales

$$(10) \quad \left(x - a \frac{\mu}{\nu}\right)^2 + y^2 = \varphi(z).$$

Ce résultat peut encore se déduire très aisément des formules générales (6) et (7). On a

$$k = \nu, \quad B = 0, \quad x = A \cos \nu t + a \frac{\mu}{\nu}, \quad y = A \sin \nu t,$$

d'où l'intégrale

$$\left(x - a \frac{\mu}{\nu}\right)^2 + y^2 = A^2.$$

Enfin la troisième équation (6), multipliée par $\cos \omega$, peut prendre la forme $z = C$, et l'on retrouve les surfaces (10) qui sont évidemment de révolution autour

de la droite

$$v x = a \mu, \quad y = 0.$$

Si D et D' sont coplanaires et parallèles avec l'axe d'une surface de révolution S , un contour C , tracé sur celle-ci, donne, pour les axes de rotation D et D' , des volumes tournants de rapport constant. Ces volumes sont égaux si D et D' sont équidistants de l'axe de S .

Pour imaginer une figure, admettons que D et D' soient d'un même côté de l'axe de la surface et à des distances de cet axe

$$\delta = a \left(\frac{\mu}{v} - 1 \right), \quad \delta' = a \left(\frac{\mu}{v} + 1 \right).$$

On conclut immédiatement de là, pour le rapport des volumes tournants,

$$\frac{n}{m} = \frac{\delta}{\delta'}.$$

§. *Cas des axes D et D' concourants; a est nul, ω , m et n sont quelconques.* — Cette fois l'équation (4) conduit au système différentiel

$$\frac{x dx}{\mu \cos^2 \omega \cdot \zeta - v \sin^2 \omega \cdot \eta} = \frac{d\eta}{v} = - \frac{d\zeta}{\mu}$$

qui admet les combinaisons

$$\begin{aligned} x dx + \cos^2 \omega \cdot \zeta d\zeta + \sin^2 \omega \cdot \eta d\eta &= 0, \\ \mu d\eta + v d\zeta &= 0 \end{aligned}$$

et, par suite, les intégrales

$$x^2 + \cos^2 \omega \cdot \zeta^2 + \sin^2 \omega \cdot \eta^2, \quad \mu \eta + v \zeta.$$

On a donc les surfaces

$$(11) \quad x^2 + y^2 + z^2 = \varphi (\mu \cos \omega \cdot y + v \sin \omega \cdot z)$$

qui sont encore des surfaces de révolution. L'axe est la droite

$$x = 0, \quad \frac{z}{y} = \frac{\nu}{\mu} \operatorname{tang} \omega.$$

Ces résultats se déduisent encore très simplement du système (6) où l'on annule a .

L'axe Δ de la surface (11) est donc dans le plan de D et D'; il passe par l'intersection de ces axes de rotation. Si Ω est l'angle $\Delta O y$, disposé comme $D O y$, la seconde équation de Δ se traduit évidemment par

$$(12) \quad \operatorname{tang} \Omega = \frac{m-n}{m+n} \operatorname{tang} \omega.$$

Si deux droites D et D', se coupent sur l'axe Δ d'une surface de révolution S et sont coplanaires à Δ , tout contour tracé sur S donne, quant aux axes de rotation D et D', des volumes tournants de rapport constant. Ces volumes sont égaux quand Δ est l'une quelconque des bissectrices de D et D'.

Il est assez curieux de retrouver ici la formule (12) qui est bien connue, mais dans des sujets fort éloignés de la théorie des volumes tournants. Elle donne lieu à d'intéressants et utiles développements trigonométriques et se rencontre en de nombreuses questions d'Astronomie parce qu'au fond c'est une formule relative aux triangles sphériques rectangles. Il suffit de poser

$$\frac{n}{m} = \operatorname{tang}^2 \frac{\psi}{2}$$

pour lui donner la forme

$$\operatorname{tang} \Omega = \cos \psi \operatorname{tang} \omega.$$

6. *Cas général.* — Il n'est pas difficile d'obtenir,

dans le cas général, des résultats géométriques aussi élégants que ceux des cas particuliers précédents. Si l'on reprend les équations (6), on peut en tirer diverses combinaisons, par exemple

$$(13) \quad \mu\eta + \nu\zeta + (\mu^2 - \nu^2)at = B\mu + C\nu;$$

de même

$$\begin{aligned} \mu \cos^2 \omega . \zeta - \nu \sin^2 \omega . \eta &= -kA \sin kt, \\ kx - \frac{\alpha \mu \nu}{k} &= kA \cos kt. \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations donnent

$$(14) \quad k^2(\mu \cos^2 \omega . \zeta - \nu \sin^2 \omega . \eta)^2 + (k^2 x - \alpha \mu \nu)^2 = k^4 A^2.$$

Ceci est, pour le système (5), une intégrale indépendante de t .

On en aura une autre en éliminant t entre (13) et la première équation (6), ce qui donne, en utilisant (14),

$$\frac{k}{\alpha} \frac{\mu\eta + \nu\zeta}{\nu^2 - \mu^2} = \arccos \frac{k^2 x - \alpha \mu \nu}{k^2 A} + \frac{k}{\alpha} \frac{B\mu + C\nu}{\nu^2 - \mu^2}$$

Le terme transcendant de cette égalité peut être remplacé par

$$\arccos \frac{k(\mu \cos^2 \omega . \zeta - \nu \sin^2 \omega . \eta)}{k^2 x - \alpha \mu \nu}.$$

Reprenons maintenant les variables y et z ; considérons le *déplacement*

$$(15) \quad \begin{cases} X = x - \frac{\alpha \mu \nu}{k^2}, \\ Y = y \cos \Omega + z \sin \Omega, \\ Z = -y \sin \Omega + z \cos \Omega, \end{cases}$$

en lequel Ω est défini par les relations

$$(16) \quad \mu \cos \omega = k \cos \Omega, \quad \nu \sin \omega = k \sin \Omega$$

et, pour intégrale générale de l'équation (3), nous pourrons écrire

$$(17) \quad \frac{k^2}{\alpha(\nu^2 - \mu^2) \sin \omega \cos \omega} Y = \text{arc tang } \frac{Z}{X} + f(X^2 + Z^2),$$

en désignant par f une fonction arbitraire.

7. On voit que le problème le plus général ici posé conduit à de simples hélicoïdes à disposer convenablement par rapport aux droites D et D' . L'équation (17) peut être présentée différemment, par exemple sous la forme

$$(18) \quad Y = \frac{\alpha(\mu^2 - \nu^2) \sin \omega \cos \omega}{\mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega} \text{arc tang } \frac{X}{Z} + f(X^2 + Z^2).$$

Celle-ci est propre à redonner les résultats particuliers précédemment obtenus mais par des transformations qu'on aimerait assez à justifier directement et c'est précisément cela qui nous a conduit à nous assurer d'abord des cas particuliers.

Ainsi soit $\mu = 0$, d'où $2\Omega = \pi$, d'après (16). On a

$$X = x, \quad Y = z, \quad Z = -y$$

et, dans ces conditions, on retrouve (8) et les conclusions du paragraphe 3.

Soit encore $2\omega = \pi$ avec μ et ν quelconques. D'après (16) on aura encore $2\Omega = \pi$ et $k = \nu$. La transformation (15) deviendra

$$X = x - \frac{\mu\alpha}{\nu}, \quad Y = z, \quad Z = -y$$

et l'on retrouvera (10) ainsi que tout le paragraphe 4.

Enfin soient α nul, ω , μ , ν quelconques. Alors (18) peut prendre la forme

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \Psi(Y)$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\mu \cos \omega . y + \nu \sin \omega . z).$$

C'est l'équation (11). Les conclusions géométriques sont d'ailleurs analogues à celles du paragraphe 5. Les relations absolument générales (16) ne le sont pas plus que (12).

8. *Généralités diverses.* — Les résultats de ce petit Mémoire ont été exposés sous des formes sensiblement équivalentes par M. Pierre Papillon, élève de la Faculté des Sciences de Toulouse, dans un travail, fort digne d'éloge, destiné à l'obtention d'un Diplôme d'études supérieures de Mathématiques. M. Papillon a d'ailleurs rattaché le sujet à d'autres.

Ainsi l'hélicoïde (18) admet évidemment l'axe

$$X = 0, \quad Z = 0$$

ou, en coordonnées x, y, z ,

$$x = \frac{\alpha \mu \nu}{\mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega},$$

$$\nu \sin \omega . y = \mu \cos \omega . z.$$

Quel est le lieu de cet axe, quand les volumes tournants relatifs aux droites axiales D et D' sont dans un rapport variable?

L'élimination du rapport de μ à ν donne immédiatement la surface

$$x = \frac{\alpha}{\sin \omega \cos \omega} \frac{yz}{y^2 + z^2}.$$

C'est le *conoïde de Plücker*. L'étude du lien existant entre l'hélicoïde et ce conoïde permet alors de revenir aux généralités classiques concernant le mouvement hélicoïdal, le théorème de Schönemann et Mannheim, etc., toutes choses que l'on trouvera

notamment dans la *Théorie des Surfaces* de Gaston Darboux (t. I, 2^e édition, Chap. VII), dans les *Leçons de Cinématique*, de M. G. Kœnigs (Chap. I et X; note IX), ou dans les *Principes et Développements de Géométrie cinématique* de A. Mannheim (p. 127 et 258).

On aperçoit ainsi la possibilité de faire une théorie purement géométrique de tout ce qui a été déduit, dans les pages précédentes, de l'intégration du système d'équations différentielles (5).

Nous comptons revenir sur le nouveau point de vue dans un prochain article qui contiendra d'ailleurs des références bibliographiques plus détaillées.

[R7f]

ÉTUDE D'UN PROBLÈME SUR LE PENDULE
A LONGUEUR VARIABLE

(Agréation, 1922);

PAR RENÉ THIRY

(Strasbourg).

Parmi les épreuves proposées pour la composition de Mécanique au concours d'Agréation de 1922 se trouvait la question suivante :

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires Ox , Oy (Oy vertical vers le haut). Un pendule simple est formé par un fil inextensible et sans masse dont une extrémité est fixée en un point A de Oy ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel M de poids mg , dont la position d'équilibre est le point O . Ce fil passe à travers un anneau horizontal

très petit dont le centre peut occuper une position quelconque entre O et A. Si l'anneau est fixé de manière que son centre occupe un point B de Oy, la longueur véritable du pendule est $OB = b$. On fait alors osciller ce pendule dans le plan xOy , on désigne par α son angle d'élongation maximum et l'on suppose α assez petit pour que, dans toutes les expressions dépendant de α , on ne conserve que la partie principale. Calculer la période du mouvement qu'on appellera période du pendule et l'énergie totale qu'il a fallu dépenser pour le mettre en mouvement à partir de sa position d'équilibre (énergie du pendule).

Comment se modifie la période et l'énergie lorsqu'on modifie la position de l'anneau en le déplaçant à la main sur Oy? On étudiera d'abord le cas où l'on élève et abaisse l'anneau d'une longueur très petite ε à partir de B assez rapidement pour que, pendant ce déplacement, l'angle du fil avec Oy puisse être regardé comme constant; on désignera cet angle par θ . On suppose ensuite, le déplacement ε restant très petit, que le mouvement de l'anneau est uniforme et que la durée du déplacement ε est égale à la période du pendule. On étudiera enfin le cas où la durée du déplacement comprend un grand nombre de périodes (la fraction de période, si elle existe, étant par suite négligeable), sa vitesse restant assez faible pour que le déplacement pendant une période soit très petit, et les variations de cette vitesse étant également assez faibles pour qu'elle puisse être regardée comme constante pendant la durée de chaque période. La position finale de l'anneau étant C ($OC = c$) on examinera en particulier ce qui se passe si c augmente indéfiniment

(ce qui exige que OA soit considérable) ou si c tend vers zéro. Peut-on trouver entre la période et l'énergie du pendule une relation indépendante de c ? (1).

Je me propose d'étudier plus spécialement la première partie de cette question, celle qui est relative à un déplacement du point B « assez rapide pour que, pendant ce déplacement, l'angle du fil avec Oy puisse être regardé comme constant ».

1. Si à un instant donné le fil BM fait un angle θ_0 avec la verticale et possède une vitesse angulaire θ'_0 , et si dans la suite du mouvement le point B reste fixe (à une distance b_0 de O), le pendule oscille comme un pendule simple ordinaire et le calcul élémentaire classique donne, pour la période, pour l'élongation maximum, pour l'énergie et pour la tension du fil, les valeurs suivantes :

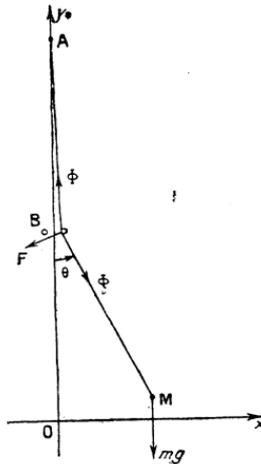
$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{b_0}{g}}, \\ \alpha_0^2 = \theta_0^2 + \frac{b_0}{g} \theta_0'^2, \\ E_0 = \frac{mgb_0}{2} \alpha_0^2 = \frac{mgb_0}{2} \left[\theta_0^2 + \frac{b_0}{g} \theta_0'^2 \right], \\ \mathcal{T}_0 = mg, \end{array} \right.$$

en se bornant à l'approximation, indiquée dans l'énoncé, des petites oscillations.

(1) On comprend généralement sous le nom de *pendule simple à longueur variable* le cas où, le point B restant fixe, la longueur du pendule varierait par suite du déplacement du point A. Ce problème ne coïncide avec celui qui nous occupe ici que dans le cas où la variation de la longueur du pendule est fonction linéaire du temps ou, ce qui revient au même, lorsque le mouvement de l'anneau est uniforme.

Ceci posé, un premier raisonnement, presque imposé par la rédaction du problème, se présente à l'esprit.

Supposons que nous tenions l'anneau à la main à un moment où les conditions θ_0, θ'_0, b_0 sont réalisées. Le fil agit alors sur une des sections de l'anneau par le plan d'oscillation à la façon des deux brins de la corde dans la poulie fixe et l'anneau est soumis aux deux forces Φ et Φ' égales toute deux à la tension \mathfrak{C}_0 du fil à cet instant (voir *fig. 1*). Pour que l'anneau reste



immobile, il faut donc que la main exerce sur lui une force F équilibrant les deux forces précédentes. Si brusquement nous déplaçons l'anneau d'une quantité très petite ε et si nous admettons que le déplacement soit tel que la tension varie peu et que l'angle θ conserve à peu près la même valeur, la force F fournira un certain travail ⁽¹⁾ qui modifiera d'autant l'énergie du pendule.

(1) Ce travail sera effectivement fourni au pendule si ε est négatif, il sera au contraire récupéré par la main de l'opérateur si ε est positif.

Ce travail se calcule immédiatement, il a pour valeur algébrique

$$- \varepsilon \cdot \mathfrak{E}_0 (1 - \cos \theta).$$

En s'en tenant toujours à la même approximation, on aura pour l'énergie du pendule lorsque le point B se sera arrêté à la cote $b_0 + \varepsilon$ la formule

$$(2) \quad E_1 = E_0 - \frac{mg}{2} \theta_0^2 \cdot \varepsilon.$$

A partir de là, on calcule immédiatement le nouvel angle d'écart maximum

$$(3) \quad \alpha_1^2 = \alpha_0^2 - \left[\frac{2\theta_0^2}{b_0} + \frac{\theta_0'^2}{g} \right] \varepsilon$$

(au même degré d'approximation) et enfin la nouvelle période

$$(4) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{b_0 + \varepsilon}{g}} = T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{b_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sim T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2b_0} \right).$$

On ne saurait dire, à mon avis, que ce raisonnement soit bien satisfaisant. Il faut en effet, d'une part, que le déplacement soit *assez rapide* pour que l'angle reste sensiblement constant; mais, d'autre part, un déplacement *trop rapide* (vers le haut par exemple) entraînera nécessairement pour B des périodes de grande accélération, comme nous le verrons tout à l'heure, et il est à craindre que le fil ne reste pas tendu, ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse faite que la tension varie peu pendant le déplacement. Dans quelles limites ces conditions, en apparence opposées, sont-elles compatibles, c'est ce que je me propose d'étudier ici. On pourrait peut-être exposer de façon plus synthétique les réflexions qui vont suivre, mais il m'a paru plus intéressant, dans l'étude d'une question d'examen, de laisser subsister les différentes phases de l'analyse du

problème telles qu'elles se sont présentées naturellement à moi.

2. Commençons d'abord par établir les équations générales du mouvement de M en supposant que les variations du point B aient lieu suivant une loi donnée quelconque

$$b = f(t).$$

Les coordonnées du point B étant $x = b \sin \theta$, $y = b(1 - \cos \theta)$, on en calculera facilement les dérivées secondes par rapport à t et les équations fondamentales de la dynamique du point s'écriront :

$$(5) \quad \begin{cases} m [b \cos \theta \cdot \theta'' - b \sin \theta \cdot \theta'^2 \\ \quad + 2b' \cos \theta \cdot \theta' + b'' \sin \theta] = - \mathfrak{T} \sin \theta, \\ m [b \sin \theta \cdot \theta'' + b \cos \theta \cdot \theta'^2 \\ \quad + 2b' \sin \theta \cdot \theta' + b''(1 - \cos \theta)] = \mathfrak{T} \cos \theta - mg. \end{cases}$$

On les remplacera par deux combinaisons évidentes éliminant, l'une la tension, l'autre la dérivée θ'' :

$$(6) \quad \begin{cases} b\theta'' + 2b'\theta' + (b'' + g') \sin \theta = 0, \\ \mathfrak{T} = m [b\theta'^2 + b''(\cos \theta - 1) + g' \cos \theta]. \end{cases}$$

Si l'on se borne à étudier des parties du mouvement pendant lesquelles θ reste très petit, on peut remplacer ces équations par les suivantes :

$$(7) \quad \begin{cases} b\theta'' + 2b'\theta' + (b'' + g')\theta = 0, \\ \mathfrak{T} = m \left[g + b\theta'^2 - \frac{1}{2}(\mathfrak{L}'' + g)\theta^2 \right]. \end{cases}$$

Nous allons maintenant supposer d'abord que le déplacement ε soit réalisé avec une vitesse constante. Nous placerons l'origine des temps au début du mouvement de l'anneau et nous appellerons τ_1 la durée du

déplacement. A l'instant initial θ, θ', b auront les valeurs θ_1, θ'_1, b_1 et nous nous proposons de calculer les valeurs correspondantes θ_2, θ'_2, b_2 à la fin de la perturbation.

Pendant la durée du déplacement, on aura

$$b = b_1 + kt$$

(la vitesse k ayant une valeur finie quelconque), et puisque nous supposons τ_1 très petit, nous pourrions chercher θ sous forme d'un développement en série

$$\theta = \theta_1 + \theta'_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

Le calcul du coefficient a_2 se fait immédiatement à l'aide de l'équation différentielle et l'on trouve, au bout du temps τ_1 ,

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_2 = b_1 + k\tau_1, \\ \theta_2 = \theta_1 + \theta'_1 \tau_1, \\ \theta'_2 = \theta'_1 - \frac{g\theta_1 + 2k\theta'_1}{b_1} \tau_1, \end{array} \right.$$

en négligeant les puissances de τ_1 supérieures à la première.

On en tire de suite, toujours avec la même approximation :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2^2 = a_1^2 - 3 \frac{\theta_1'^2}{g} k \tau_1, \\ E_2 = E_1 - \frac{mg}{2} \left[\frac{2b_1}{g} \theta_1'^2 - \theta_1^2 \right] k \tau_1. \end{array} \right.$$

Les formules que nous trouvons ainsi ne sont nullement d'accord avec les formules (2) et (3) trouvées plus haut. Il n'y a pas lieu de s'en étonner; en effet, il est impossible que l'anneau passe brusquement du repos à un mouvement uniforme. Il faut nécessairement qu'il y ait un mouvement varié aussi bien au départ qu'à l'arrêt. Pour produire ce mouvement varié il

faudra faire agir sur l'anneau des forces d'autant plus grandes que l'on voudra établir plus rapidement le régime uniforme et, en particulier, si l'on voulait réaliser le passage brusque du repos initial au mouvement uniforme puis au repos final, il faudrait introduire une percussion au départ et une autre à l'arrêt.

θ_1, θ'_1, b_1 sont les valeurs après la première percussion; θ_2, θ'_2, b_2 les valeurs avant la deuxième, ce ne sont nullement les valeurs à prendre au début et à la fin de la perturbation totale.

Remarquons encore que, pendant la période de mouvement uniforme, la tension reste très voisine de la valeur mg .

3. Proposons-nous maintenant d'étudier l'effet de la période de mouvement varié (nous le supposons uniformément varié) qui doit nécessairement précéder la phase uniforme.

En reportant l'origine des temps au début de cette période (dont nous supposons la durée égale à τ_0) et en appelant θ_0, θ'_0, b_0 les valeurs des paramètres à cette époque, on aura

$$b = b_0 + \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

γ devant être tel qu'au bout du temps τ_0 la vitesse k de régime uniforme soit réalisée, ce qui donne $\gamma \tau_0 = k$.

La même méthode de recherche de θ sous forme d'un développement en série donne par un calcul facile

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = b_0 + \frac{1}{2} \gamma \tau_0^2, \\ \theta_1 = \theta_0 + \theta'_0 \tau_0 - \frac{g + \gamma}{2 b_0} \theta_0 \tau_0^2, \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{g + \gamma}{b_0} \theta_0 \tau_0 - \frac{g + 3\gamma}{2 b_0} \theta'_0 \tau_0^2. \end{array} \right.$$

Si l'on voulait se rapprocher du cas théorique de la percussion instantanée, il faudrait dans ces formules faire tendre τ_0 vers zéro, ce qui donnerait (en tenant compte naturellement des variations de γ)

$$(11) \quad \begin{cases} b_1 = b_0, \\ \theta_1 = \theta_0, \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{\theta_0}{b_0} k. \end{cases}$$

Une étude complètement analogue donnerait pour caractériser l'effet de la percussion d'arrêt (en appelant θ_2, θ'_2, b_2 les valeurs des paramètres avant la percussion et θ_3, θ'_3, b_3 leurs valeurs immédiatement après) les formules

$$(12) \quad \begin{cases} b_3 = b_2, \\ \theta_3 = \theta_2, \\ \theta'_3 = \theta'_2 + \frac{\theta_2}{b_2} k. \end{cases}$$

En sautant les intermédiaires, on aurait pour l'ensemble du déplacement

$$(13) \quad \begin{cases} b_3 = b_0 + \varepsilon, \\ \theta_3 = \theta_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{b_0} \right) + \frac{\varepsilon}{k} \theta'_0, \\ \theta'_3 = \theta'_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{b_0} \right) + \frac{g\varepsilon}{kb_0} \theta_0, \end{cases}$$

et l'on en déduirait, par un calcul que je pense inutile de reproduire,

$$(14) \quad E_3 = E_0 - \frac{mg}{2} \theta_0^2 \varepsilon;$$

ce qui, cette fois, concorde entièrement avec la formule (2) obtenue au début de cette étude.

Mais ce résultat n'est pas encore satisfaisant; en effet, pendant la période variée (celle du début par

exemple), on aura pour la tension

$$\tau = m \left[g + b \theta^2 - \frac{1}{2} (\gamma + g) \theta^2 \right].$$

Or si τ_0 tend vers zéro, θ augmente indéfiniment (puisque $\gamma \tau_0 = k$); la tension subira donc des variations considérables et, en particulier, si γ est positif, elle s'annulera certainement (1).

Autrement dit, le fil aura une tendance à se rompre à une des extrémités du mouvement et à se détendre à l'autre. Ceci est incompatible avec les conditions du problème qui suppose la liaison du fil jouant en permanence.

4. Il est par conséquent impossible d'assimiler à des percussions les périodes de mise en marche et d'arrêt, ces périodes ne peuvent être instantanées, elles doivent occuper une partie notable de la durée totale du déplacement.

Entre les quantités γ , k , τ_0 et τ_1 on a les relations

$$\gamma \tau_0^2 + k \tau_1 = \varepsilon,$$

$$\gamma \tau_0 = k,$$

d'où l'on tire

$$\tau_0 (\tau_0 + \tau_1) = \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

On prendra alors γ arbitrairement, tel qu'on soit assuré que la tension ne s'annule pas et l'on choisira pour τ_0 et τ_1 des quantités positives satisfaisant à la dernière des relations précédentes.

On peut alors reprendre le calcul de θ_3 , θ'_3 , b_3 en

(1) Si γ était négatif pour la percussion de début, le déplacement aurait lieu vers le bas et ce serait à la percussion d'arrêt que la tension s'annulerait.

fonction de θ_0, θ'_0, b_0 en se servant alors des formules (10) au lieu des formules (11) et en remplaçant de même le groupe (12) par un groupe analogue. Le calcul est possible mais est un peu long; il conduit à la formule (2) et cette fois sans aucune impossibilité mécanique. On peut le simplifier en supprimant la phase de mouvement uniforme (ce qui revient à poser $\tau_1 = 0$) et en réalisant le déplacement à l'aide de deux mouvements, l'un accéléré, l'autre retardé, de même durée, se succédant immédiatement. Je laisse au lecteur le soin de faire les calculs sous cette forme.

5. On peut du reste réaliser en une seule formule cette succession de deux mouvements, l'un accéléré, l'autre retardé, en prenant pour la fonction $b = f(t)$ un polynôme du troisième degré dont la dérivée soit nulle au début et à la fin de la perturbation. Si l'on appelle τ la durée totale du déplacement, il suffit de poser

$$(15) \quad b = b_0 + \frac{3}{2} h \tau t^2 - h t^3,$$

h étant une constante quelconque reliée à ε par la condition

$$(16) \quad \frac{1}{2} h \tau^3 = \varepsilon.$$

Dans un tel mouvement, la valeur absolue de l'accélération aura pour maximum la quantité

$$\gamma = 3 |h| \tau.$$

On prendra arbitrairement la valeur de h , l'équation (16) déterminera τ et la valeur de γ (égale à $3\sqrt[3]{2\varepsilon h^2}$) nous mettra certainement à l'abri de toute variation trop grande de la tension du fil.

Ici, si nous effectuons les calculs comme précédem-

ment en nous bornant aux termes en ε , il faut pousser nos développements jusqu'aux termes en τ^3 .

Comme précédemment, nous chercherons θ sous forme d'un développement en série

$$\theta = \theta_0 + \theta'_0 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

L'équation différentielle donnera facilement les valeurs des coefficients

$$(17) \quad \begin{cases} a_2 = -\frac{g\theta_0}{2b_0} - \frac{3h\tau}{2b_0} \theta_0, \\ a_3 = \frac{6h\theta_0 - g\theta'_0}{6b_0} - \frac{3h\tau}{2b_0} \theta'_0, \\ a_4 = \frac{g^2\theta_0}{24b_0^2} + \frac{h\theta'_0}{b_0} + \frac{7g h \tau}{8b_0^2} \theta_0 + \frac{9h^2\tau^2}{4b_0^2} \theta_0, \end{cases}$$

et en donnant à t la valeur τ et en négligeant les puissances de τ supérieures à la troisième on aura

$$(18) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_0 + \theta'_0 \tau - \frac{g\theta_0}{2b_0} \tau^2 - \frac{3h\theta_0 + g\theta'_0}{6b_0} \tau^3, \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{g\theta_0}{b_0} \tau - \frac{g\theta'_0}{2b_0} \tau^2 + \left(\frac{g^2\theta_0}{6b_0^2} - \frac{h\theta'_0}{2b_0} \right) \tau^3, \end{cases}$$

d'où enfin, au même degré d'approximation ⁽¹⁾,

$$(19) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_0^2 - \left[\frac{2\theta_0^2}{b_0} + \frac{\theta_0'^2}{g} \right] \varepsilon, \\ E_1 = E_0 - \frac{mg}{2} \theta_0^2 \varepsilon, \end{cases}$$

et ces formules sont entièrement d'accord avec celles que nous avons pressenties au début ⁽²⁾.

(1) Les termes en τ et τ^2 qui correspondent à des puissances fractionnaires de ε disparaissent.

(2) Il est à remarquer que pendant ce déplacement la vitesse moyenne $V = \frac{\varepsilon}{\tau} = \sqrt[3]{\frac{h\varepsilon^2}{2}}$ reste très faible; il semble donc que l'auteur de l'énoncé a voulu dire que le déplacement devait avoir une durée courte plutôt qu'une grande vitesse, comme le mot *rapide* pouvait le laisser supposer.

6. Je ne dirai que quelques mots de la suite du problème, pour laquelle de semblables difficultés ne se présentent pas. Les déplacements y ont lieu en effet avec des vitesses et des accélérations très faibles et l'effet des périodes de mise en marche et d'arrêt devient tout à fait négligeable.

Si nous supposons le petit déplacement ε réalisé pendant une période avec une vitesse constante très petite k , en appelant ω la quantité $\sqrt{\frac{g}{b_0}}$ et en posant

$$\frac{k}{b_0} = h,$$

l'équation différentielle deviendra

$$(20) \quad (1 + ht)\theta'' + 2h\theta' + \omega^2\theta = 0.$$

Nous en chercherons une solution sous forme d'un développement en série de fonctions suivant les puissances de h ,

$$\theta = \Phi_0(t) + h\Phi_1(t) + h^2\Phi_2(t) + \dots,$$

en supposant que pour $t = 0$ (début du mouvement), on ait

$$\Phi_0(0) = \theta_0, \quad \Phi_0'(0) = \theta_0', \quad \Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = \dots = 0.$$

Un calcul facile donnera pour Φ_0 et Φ_1 les expressions

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_0 = \theta_0 \cos \omega t + \frac{\theta_0'}{\omega} \sin \omega t, \\ \Phi_1 = \left[\frac{3}{4} \frac{\theta_0}{\omega} - \frac{3}{4} \theta_0 t - \frac{1}{4} \theta_0' t^2 \right] \cos \omega t \\ \quad + \left[-\frac{3}{4} \frac{\theta_0'}{\omega} t + \frac{1}{4} \omega \theta_0 t^2 \right] \sin \omega t, \end{array} \right.$$

d'où par suite à la fin de la période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ les nou-

velles valeurs de θ et de θ' (en négligeant toujours les puissances de ε supérieures à la première),

$$(22) \quad \begin{cases} \theta_1 = \theta_0 - \frac{\varepsilon}{4b_0} (3\theta_0 + T_0 \theta'_0), \\ \theta'_1 = \theta'_0 - \frac{\varepsilon}{4b_0} (5\theta'_0 - T_0 \omega^2 \theta_0), \end{cases}$$

ce qui donne enfin, pour le nouvel angle d'écart maximum et pour l'énergie,

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha_1^2 = \alpha_0^2 \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2b_0}\right), \\ E_1 = E_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2b_0}\right). \end{cases}$$

D'autre part, la nouvelle période du pendule sera

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{b_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sim T_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2b_0}\right).$$

On en déduit immédiatement la relation

$$(24) \quad E_1 \cdot T_1 = E_0 \cdot T_0.$$

Enfin, si l'on réalise un déplacement fini tel qu'on puisse le décomposer en déplacements très petits remplissant les conditions précédentes, on aura pendant toute la durée du mouvement

$$(25) \quad E \cdot T = \text{const.}$$

En particulier, si l'anneau est déplacé très loin vers le haut, la période augmente indéfiniment et par suite l'énergie tend vers zéro. Si, au contraire, l'anneau se rapproche du point O, la période diminue et l'énergie grandit, mais ceci entraîne également une augmentation de l'angle α et l'on ne peut trop se rapprocher

de O sans que les approximations faites sur les petites oscillations cessent d'être valables ⁽¹⁾.

(1) On peut encore retrouver la formule (23) en utilisant les résultats de la première partie du problème. Le raisonnement suivant m'a été signalé par un de mes élèves, M. Hourt.

Décomposons l'intervalle ε en un grand nombre de parties suffisamment petites pour que chacune d'elles soit parcourue par l'anneau en un temps très court. Soit $d\varepsilon$ une de ces parties correspondant à l'époque t du mouvement. Dans le déplacement $d\varepsilon$ l'énergie du pendule s'accroît algébriquement de la quantité

$$-\mathfrak{C} \frac{\theta^2}{2} d\varepsilon \sim -mg \frac{\theta^2}{2} d\varepsilon,$$

d'après la formule (2).

Pendant la période totale T l'accroissement d'énergie sera donc

$$E_1 - E_0 = - \int_0^T \frac{mg}{2} \theta^2 k dt \quad \text{puisque} \quad d\varepsilon = k dt.$$

Or, $\frac{mg b \theta^2}{2}$ est égal à l'énergie *potentielle* E_p , à l'instant t . On a donc

$$E_1 - E_0 = - \int_0^T \frac{E_p}{b} k dt = -kT \cdot \left(\frac{E_p}{b} \right),$$

$\left(\frac{E_p}{b} \right)$ désignant la valeur moyenne de la fonction $\frac{E_p}{b}$ pendant une période. Cette expression pourrait se développer en série suivant les puissances de k ,

$$\left(\frac{E_p}{b} \right) = \left(\frac{E_p}{b} \right)_0 + Ak + \dots,$$

et le premier terme serait la valeur moyenne de $\frac{E_p}{b}$ dans le cas où k serait nul, c'est-à-dire où le pendule conserverait la longueur b_0 .

Or, dans ce cas, le calcul de la valeur moyenne se fait immédiatement et donne la valeur $\frac{E_0}{2b_0}$ (E_0 désignant comme dans le corps de l'article l'énergie totale du pendule de longueur b_0).

D'où la formule

$$E_1 - E_0 = - \frac{\varepsilon E_0}{2b_0},$$

qui n'est autre que la seconde des formules (23).

QUESTIONS.

2471. On considère des cubiques circulaires Γ formant un faisceau ponctuel linéaire. L'enveloppe de leurs asymptotes réelles est un hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle tritangent (K) est égal, sans lui être identique, au cercle (K') lieu des foyers singuliers des courbes Γ .

Si O est le centre du cercle (K'), les directions asymptotiques de Γ issues de O coupent la courbe en six points à distance finie situés sur une conique S . Les coniques S forment, lorsque Γ varie, un faisceau ponctuel. Pour que les cercles (K) et (K') soient confondus, il faut et il suffit que ce faisceau soit équilatère.

A. LABROUSSE.

2472. Soit B un point variable sur une chaînette donnée, de base $x'x$ et de sommet A . On abaisse de B la perpendiculaire BC sur $x'x$, et de C , la perpendiculaire CD sur la tangente en B à la chaînette. On sait que le lieu de D est une tractrice.

De C comme centre avec CD comme rayon, on décrit un cercle qui rencontre BC en E . Démontrer que le triangle mixtiligne ABD qui a pour côtés l'arc AB de chaînette, l'arc AD de tractrice et le segment BD est équivalent au triangle mixtiligne BDE qui a pour côtés les deux segments BD , BE et l'arc de cercle DE .

R. ESRÈVE.

2473. Soient ω et θ la longitude et la latitude d'un point M de la sphère de rayon 1. Déterminer la courbe lieu de M par la condition que, φ étant l'angle qu'elle fait avec le parallèle, on ait constamment

$$\varphi = \theta.$$

Montrer que, $M_1(\omega_1, \theta_1)$ et $M_2(\omega_2, \theta_2)$ étant deux points quelconques de la courbe (C) ainsi déterminée, on a

$$\text{arc } M_1 M_2 = \omega_2 - \omega_1$$

et que l'aire comprise entre l'arc, les méridiens de ses extrémités et l'équateur égale $\theta_2 - \theta_1$.

Calculer le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (C).
J. DARD.

2474. Étant donnée l'équation

$$x^n + x + 1 = 0$$

dans laquelle n est un entier plus grand que 2, la somme des $(n^2 + n - 1)$ ièmes puissances des racines de cette équation est nulle.
L. TITS.

2475. Par quatre points d'une quartique gauche unicursale Γ (quartique de Steiner) situés dans un même plan, on fait passer une conique S . On considère le cône de base S et ayant pour sommet un point M de Γ . La plan diamétral conjugué de la tangente MT à Γ en M passe par un point fixe lorsque M décrit Γ .
A. LABROUSSE.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2327.

(1917, p. 326.)

Si sur chaque rayon vecteur OM d'une lemniscate de centre O, on porte, à partir de O, une longueur égale au rayon de courbure de la courbe en M, le lieu des extrémités des longueurs ainsi obtenues est une hyperbole équilatère.

F. BALITRAND.

SOLUTION

PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

On sait que la lemniscate peut être regardée comme la podaire, par rapport à son centre O , de l'hyperbole équilatère qui lui est bitangente en ses sommets et admet, par suite, pour asymptotes les tangentes Ox et Oy en son point double.

Soit A un point quelconque de cette hyperbole équilatère ⁽¹⁾,

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

milieu du segment ST de la tangente compris entre les asymptotes Ox et Oy ; le point correspondant M de la lemniscate est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur ST , et, puisque, dans le triangle rectangle OST , OA est médiane et OM hauteur, ces deux droites sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xOy , c'est à-dire à l'axe commun de la lemniscate et de l'hyperbole.

Si N est le quatrième sommet du rectangle construit sur OM et MA , MN est la normale à la lemniscate et l'on sait que, si C est le centre de courbure correspondant, on a

$$MC = \frac{MN}{3} = \frac{OA}{3} \quad (1).$$

Si donc on porte sur OM le vecteur OP égal à MC , on voit que le lieu du point P est symétrique, par rapport à l'axe de la lemniscate, de la courbe homothétique de l'hyperbole équilatère, relativement au centre O , pour un rapport d'homothétie égal à $\frac{1}{3}$. C'est donc bien aussi une hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy .

Autres solutions par l'AUTEUR et MM. DUFOUR, BALITRAND, FAUCHEUX, R.-S. DE BEIRES, LÉMAIRE, LONG, ROSE.

2328.

(1917, p. 322.)

Étant donnée une lemniscate de centre O et de sommet A , on mène un rayon vecteur quelconque OM et l'on projette le sommet A sur ce rayon vecteur en P .

1° Démontrer que l'aire du secteur de lemniscate AQM et l'aire du triangle OAP sont égales. En déduire un moyen de diviser un secteur de lemniscate en deux parties équivalentes, avec la règle et le compas et sans supposer la courbe tracée.

2° La perpendiculaire élevée en O à OM et la normale

(1) M. d'Ocagne donne, dans son *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique* (t. I, p. 143), une démonstration géométrique fort simple de cette propriété.

en M à la courbe se coupent en Q. Démontrer que l'aire du triangle MOQ est double de celle du triangle AOP.

F. BALITRAND.

SOLUTION

Par M. J. LEMAIRE.

1° L'équation de la lemniscate étant

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\omega,$$

nous avons

$$\text{aire OAM} = \frac{1}{2} \int_0^\omega \rho^2 d\omega = \frac{a^2}{4} \sin 2\omega,$$

ρ et ω désignant les coordonnées de M; d'autre part,

$$\begin{aligned} \text{aire OAP} &= \frac{1}{2} \text{OA} \cdot \text{OP} \sin \omega \\ &= \frac{1}{2} a^2 \cos \omega \sin \omega = \frac{a^2}{4} \sin 2\omega, \end{aligned}$$

ce qui démontre la première partie; si OM'' est le rayon vecteur partageant le secteur OMM' de la lemniscate en deux parties équivalentes, et si AP' et AP'' sont perpendiculaires sur OM' et OM'' , on doit avoir

$$2 \text{aire OAP}'' = \text{aire OAP} + \text{aire OAP}',$$

et par suite

$$2 \text{P}''\text{H}'' = \text{PH} + \text{P}'\text{H}',$$

H, H', H'' désignant les projections sur OA des points P, P' et P''. De là la construction suivante de OM'' , quand on a OM et OM' : on trace le cercle de diamètre OA, et par le milieu de la corde PP' , on mène la parallèle à OA, qui coupe l'arc PP' en P''; la droite OP'' partage le secteur OMM' en deux parties équivalentes. Nous avons supposé les points M et M' sur le même arc OA de la lemniscate, mais la construction s'applique encore si les points appartiennent l'un à un arc OA, l'autre à l'arc symétrique par rapport à OA.

2° Le lieu du point M' tel que

$$\overline{\text{OM}} \cdot \overline{\text{OM}'} = a^2$$

est l'hyperbole équilatère de sommet A et de centre O; la tangente en M' à cette hyperbole coupant les tangentes au point double à la lemniscate en B et C, M' est le milieu de BC, la normale MQ à la lemniscate et la normale en M' à l'hyperbole forment un triangle isocèle IMM'; si ω désigne l'angle MOA, on peut écrire

$$\widehat{OMQ} = \widehat{IM'M} = 90^\circ - \widehat{OM'C} = 90^\circ - 2\widehat{M'OB} = 2\omega,$$

d'où

$$OQ = OM \cdot \text{tang } 2\omega,$$

et par suite

$$\begin{aligned} \text{aire MOQ} &= \frac{1}{2} OQ \cdot OM = \frac{1}{2} \overline{OM}^2 \text{ tang } 2\omega \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sin 2\omega = 2 \cdot \text{aire AOP}. \end{aligned}$$

Autres solutions de l'AUTEUR et de MM. R.-S. DE BEIRES, FAUCHEUX, ROSE.

2442.

(1920, p. 200.)

Etant donné un réseau tangential des coniques, les cercles principaux des coniques du réseau dont le foyer décrit une droite sont orthogonaux à un cercle fixe.

Ce théorème comprend comme cas particulier le théorème de M. T. Lemoyne relatif aux cercles podaires des points d'une droite, par rapport à un triangle (N. A., 1904, p. 400).

R. B.

SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

Soit

$$ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite, l'équation tangentielle d'une conique ayant ses foyers en $F(\xi, \eta)$ et $F'(\xi', \eta')$ s'écrira

$$(1) \quad (\xi u + \eta v + w)(\xi' u + \eta' v + w) + \lambda(u^2 + v^2) = 0.$$

La puissance d'un foyer par rapport au cercle principal

est λ , et le centre de ce cercle est le milieu de FF' , son équation est donc

$$(2) \quad (x - \xi)(x - \xi') + (y - \eta)(y - \eta') + \lambda = 0.$$

(On retrouverait cette équation en cherchant la podaire de la conique par rapport à F ou F' .)

Si l'équation de la conique est donnée sous la forme

$$(3) \quad au^2 + bv^2 + cw^2 + 2fvw + 2g\omega u + 2huv = 0,$$

on a

$$\frac{\xi\xi' + \lambda}{a} = \frac{\eta\eta' + \lambda}{b} = \frac{1}{c} = \frac{\xi + \xi'}{2g} = \frac{\eta + \eta'}{2f},$$

et l'équation du cercle principal devient

$$(4) \quad c(x^2 + y^2) - 2gx - 2fy + a + b - \lambda c = 0.$$

Supposons maintenant que F décrive l'axe des x . On a $\eta = 0$, d'où $\lambda c = b$. L'équation (4) est alors linéaire en a , c , f , g , ce qui démontre la proposition énoncée.

Le théorème de M. Lemoine envisage le cas où trois tangentes de la conique sont données.

Autres solutions de MM. R. BOUVAIST, FAUCHEUX, ROY, SIGARD.

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Construire la courbe C lieu du point M de coordonnées

$$(1) \quad \begin{cases} x = \frac{a}{4}(e^{2u} - 2u), \\ y = ae^u \end{cases}$$

quand u varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° La tangente en M à la courbe coupe Ox en T , la tan-

gente en un second point M' coupe Ox en T' . Vérifier que $TT' = \text{arc } MM'$.

3° t représentant le temps, trouver la fonction $u = f(t)$ pour que les équations (1) soient celles d'un mouvement tel que, pour chaque position du mobile M , le vecteur vitesse soit égal à MT en grandeur, direction et sens.

4° En choisissant l'origine des temps on trouve $u = -t$. Étudier ce mouvement. Calculer l'accélération et ses composantes normale et tangentielle à l'instant t . En déduire le rayon de courbure à C . Étudier sa variation et calculer les coordonnées du point où ce rayon de courbure est minimum.

5° Former l'équation différentielle des courbes qui satisfont à la propriété géométrique de la 2^e question. Intégrer cette équation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - x - 1 &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - y &= 0, \end{aligned}$$

2° Déterminer les fonctions x et y qui vérifient ces équations et qui s'annulent, ainsi que leurs dérivées premières, pour $t = 0$.

3° Ces fonctions représentent les équations paramétriques d'une courbe. Aire limitée par l'arc compris entre l'origine et le point $t = \pi$, l'ordonnée de ce point et l'axe des x .
(Marseille, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Établir, sous des conditions de convergence qu'on énoncera, la formule de développement

$$y = \frac{L(x + \sqrt{1+x^2})}{x} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{7} + \dots$$

Étudier la fonction y , et construire sa courbe représentative.

Montrer qu'il existe des polynomes simples $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, tels que y vérifie l'équation différentielle

$$(1) \quad yP(x) + y'P_1(x) + y''P_2(x) = 0.$$

Fort de la connaissance d'une solution particulière, achever l'intégration de cette équation. N'est-il pas possible d'effectuer cette intégration directement, d'après la méthode même qui conduit le plus simplement à la formation de l'équation (1) ?

II. On pose

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega.$$

Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y d'une fonction de la forme $f(x, y) = \varphi(\rho)$ [on appellera $\varphi(\rho)$ la fonction dérivée de $\varphi(\rho)$, par rapport à ρ].

Déterminer $\varphi(\rho)$ de manière que l'expression

$$\frac{f'_x dy - f'_y dx}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}$$

soit une différentielle totale.

Soient f une fonction admettant cette différentielle, S la surface qui, en coordonnées rectangulaires, a pour équation $z = f(x, y)$. Exprimer les coordonnées d'un de ses points en fonction de sa cote z et de l'angle ω .

Déterminer les lignes asymptotiques de S par l'équation polaire de leur projection sur le plan xOy . Calculer l'angle sous lequel ces lignes coupent les sections de la surface par les plans $z = \text{const.}$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soient trois axes rectangulaires $Oxyz$, et quatre points

$$\begin{array}{ll} A(\lambda, 0, 1), & B(-\lambda, 0, 1), \\ C(0, \lambda, -1), & D(0, -\lambda, -1). \end{array}$$

Comment faut-il choisir λ pour que la figure $ABCD$ soit un tétraèdre régulier. Cette condition étant réalisée :

1° Évaluer les hauteurs du tétraèdre et l'aire d'une de ses faces.

2° Évaluer l'aire de sa section par un plan

$$z = h \quad (-1 < h < 1).$$

3° Trouver, par deux méthodes, le volume du tétraèdre.
(Poitiers, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° Intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z).$$

2° Étant donnés deux axes rectangulaires, on considère une courbe C, la tangente en un point quelconque M qui coupe l'axe des y en T, l'ordonnée du point M qui coupe l'axe des x en P.

Déterminer les courbes C telles que l'aire limitée par le segment OP, l'axe Oy, l'ordonnée PM et l'arc de courbe compris entre ces deux parallèles soit égale au produit de l'aire du trapèze OTMP par un nombre positif donné K. Les aires dont il s'agit ont des valeurs algébriques.

Il pourra être utile, pour intégrer l'équation différentielle du problème, de changer de variable indépendante et de poser $x = e^t$ (on se bornera aux abscisses positives).

Discuter les résultats suivant les valeurs de k.

MÉCANIQUE. — Une barre homogène de masse m, de longueur l, tourne dans un plan xOy autour de l'une de ses extrémités placée en O.

La barre non pesante, est sous l'influence d'un champ de forces. La force du champ agissant sur un élément de longueur infinitésimale, de coordonnées x, y, de masse infinitésimale m, a pour composantes sur les axes rectangulaires Ox, Oy :

$$X = my, \quad Y = mx.$$

1° La barre étant dans une position quelconque définie par l'angle θ qu'elle forme avec Ox, montrer que l'action

du champ sur la barre peut être réduite à une force unique. Trouver les composantes de cette force sur les axes et son point d'application.

Déterminer les positions d'équilibre de la barre.

2° On abandonne la barre sans vitesse initiale sur la partie positive de Ox . Trouver une équation permettant de déterminer en fonction du temps l'angle θ que forme la barre avec Ox .

Calculer la vitesse angulaire de la barre en fonction de sa position, indiquer l'allure et les limites du mouvement de rotation de la barre. (Nancy, juin 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Trouver une série entière y , se réduisant à l'unité pour $x = 0$ et vérifiant l'équation différentielle

$$(1) \quad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Quel est l'intervalle de convergence de cette série ?

On transforme l'équation (1), en posant $y = \frac{z}{x}$. Intégrer l'équation en z obtenue et retrouver, par ce moyen, la série déterminée précédemment.

II. Soit le plan

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + kz = f(\varphi),$$

où k désigne une constante et $f(\varphi)$ une fonction donnée du paramètre variable φ . Déterminer l'arête de rebroussement de l'enveloppe de ce plan. Démontrer que cette courbe est une hélice. Calculer, en fonction de φ , son arc, sa courbure et sa torsion.

III. Sur la chaînette définie par l'équation

$$y = \operatorname{ch} x,$$

on enroule un fil, de telle manière qu'une de ses extrémités M se trouve au sommet S , l'autre extrémité étant fixée au point P , d'abscisse a . L'axe Oy étant supposé vertical et dirigé vers le haut, on attache à l'extrémité M

du fil une petite masse pesante et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1° Calculer les coordonnées de M au temps t .

2° Calculer la tension du fil en fonction de l'ordonnée de M.

3° Calculer, en fonction de a , les coordonnées du point Q qui limite l'oscillation de M. Lieu de Q quand P décrit la chaînette.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère la courbe Γ , dont les coordonnées d'un point (x, y) , exprimées en fonction d'un paramètre t , sont

$$x = \pm t \sqrt{\frac{(t+2)(t^2+t+2)}{t+3}},$$

$$y = \pm (t+1)^2 \sqrt{\frac{-t+1}{t+3}}.$$

1° Calculer, à un centième près, les coordonnées des points réels où la tangente est parallèle à l'un des axes, ainsi que les valeurs de t correspondantes.

2° Calculer, à un centième près, les rayons de courbure aux points de paramètre t égal à -2 , à -1 et à $+1$.

(Clermont, juin 1923.)



[B12d]

DÉMONSTRATION D'UNE FORMULE D'HAMILTON;

PAR B. NIEWENGLOWSKI.

1. Je me propose, principalement, d'établir une formule due à Hamilton. Dans la théorie des quaternions il y a un assez grand nombre de formules à retenir; on simplifie souvent les calculs en opérant comme en géométrie analytique quand on choisit des axes particuliers. C'est ce que je vais montrer en premier lieu.

2. Rappelons d'abord que, dans la théorie des quaternions, on utilise trois unités imaginaires désignées par les lettres i, j, k , et que l'on pose

$$(1) \begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j. \end{cases}$$

Si les coordonnées rectangulaires d'un point M sont x, y, z , on fait correspondre au vecteur \overline{OM} , l'expression

$$u = ix + jy + kz$$

et l'on dit : le vecteur u .

Soit

$$u' = ix' + jy' + kz'$$

un second vecteur. On pose

$$uu' = (ix + jy + kz)(ix' + jy' + kz'),$$

et si l'on effectue en tenant compte de l'ordre des

facteurs et des équations (1), on trouve

$$uu' = -(xx' + yy' + zz') + i(yz' - zy') \\ + j(zx' - xz') + k(xy' - y'x').$$

L'expression qu'on vient d'écrire se nomme le produit des deux vecteurs u, u' . On a donné à ce produit le nom de quaternion.

On pose encore

$$uu' = S(uu') + V(uu')$$

avec

$$S(uu') = -(xx' + yy' + zz'), \\ V(uu') = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - y'x');$$

$V(uu')$ est un *vecteur*; $S(uu')$ un *scalaire*.

Si l'on calcule de la même façon $u'u$ on trouve

$$u'u = S(uu') - V(uu'),$$

et l'on dit que uu' et $u'u$ sont *conjugués*. En particulier si $u' = u$, on a

$$u^2 = -(x^2 + y^2 + z^2).$$

3. Soit s un scalaire, c'est-dire un nombre réel et soit u un vecteur, si l'on pose

$$q = s + u,$$

q est un quaternion et les formules (1) permettent de définir le produit de plusieurs quaternions, produit évidemment distributif et associatif. Le conjugué de q , que l'on note Kq est donné par l'égalité

$$Kq = s - u;$$

si, en particulier, q se réduit au vecteur u , on a

$$Ku = -u.$$

En général, il vient

$$\begin{aligned} q \cdot Kq &= (s + u)(s - u) = s^2 + us - su - u^2 \\ &= s^2 - u^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

en prenant

$$u = ix + jy + kz.$$

On pose

$$Tq = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

et cette quantité se nomme le *tenseur* de q ou de Kq .

On a donc

$$q Kq = (Tq)^2.$$

En posant

$$Tq = R, \quad s = R \cos \theta$$

et

$$x = aR \sin \theta, \quad y = bR \sin \theta, \quad z = cR \sin \theta,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)R^2 \sin^2 \theta,$$

on aura nécessairement $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, de telle sorte que a , b , c sont les cosinus directeurs du vecteur $OM = u$, et $R \sin \theta$ la longueur OM .

Dans ces conditions

$$q = R(\cos \theta + \lambda \sin \theta)$$

et

$$Kq = R(\cos \theta - \lambda \sin \theta),$$

où

$$\lambda = ia + jb + kc,$$

et par suite

$$\lambda^2 = -1.$$

L'expression $\cos \theta + \lambda \sin \theta$ se nomme le *verseur* de q et on le désigne par Uq .

On a

$$q = Tq \cdot Uq.$$

4. Ces résultats rappelés, considérons un nouveau système d'axes rectangulaires $OXYZ$, et supposons les deux systèmes de même disposition. En adoptant les mêmes notations qu'en géométrie analytique, si l'on

pose

$$\alpha = ia + jb + kc,$$

$$\beta = ia' + jb' + kc',$$

$$\gamma = ia'' + jb'' + kc'',$$

on aura

$$(2) \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1, \\ \alpha\beta = -\beta\alpha = \gamma, & \beta\gamma = -\gamma\beta = \alpha, & \gamma\alpha = -\alpha\gamma = \beta. \end{cases}$$

Les trois vecteurs unitaires α , β , γ ont les mêmes propriétés que i , j , k .

Soit u un vecteur OM. Si x, y, z sont les coordonnées de M dans le premier système et X, Y, Z les coordonnées dans le second système, on a

$$\begin{aligned} u = ix + jy + kz = & i(aX + a'Y + a''Z) \\ & + j(bX + b'Y + b''Z) \\ & + k(cX + c'Y + c''Z), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u = \alpha X + \beta Y + \gamma Z.$$

On voit que les nouveaux axes jouent exactement le même rôle que les axes primitifs. Or, ils peuvent être arbitrairement choisis; on peut donc, pour établir toutes formules relatives à des quaternions, donner aux vecteurs qui s'introduisent une position particulière par rapport aux axes, en interprétant convenablement le résultat. Par exemple, pour calculer u^2 on peut supposer u porté par Ox et prendre $u = ir$ (r étant sa longueur), d'où $u^2 = -r^2$, résultat général.

Soit, pour traiter un autre exemple, à faire le produit d'un vecteur u par un verseur $\cos\theta + \lambda \sin\theta$, l'axe λ du verseur étant perpendiculaire au vecteur u . Prenant u porté par Ox et $\lambda = k$, on a

$$ir(\cos\theta + k \sin\theta) = ir \cos\theta - jr \sin\theta$$

et

$$(\cos\theta + k \sin\theta)ir = ir \cos\theta + jr \sin\theta.$$

Donc le produit du verseur $\cos \theta + \lambda \sin \theta$ par u s'obtient en faisant tourner le vecteur de l'angle θ autour de l'axe du verseur ; pour faire le produit de u par le verseur on fera tourner de l'angle $-\theta$.

Remarque. — On voit encore que

$$(\cos \theta + \lambda \sin \theta) u = u (\cos \theta - \lambda \sin \theta);$$

si donc v est le premier verseur, en remarquant que

$$(\cos \theta + \lambda \sin \theta)(\cos \theta - \lambda \sin \theta) = 1,$$

le second verseur sera v^{-1} et l'on pourra écrire

$$vu = uv^{-1},$$

d'où l'on déduit

$$vuv = u;$$

mais cette identité n'est vraie que si l'axe du verseur v est perpendiculaire à u , ou, comme on dit encore, si le vecteur u est dans le plan du verseur v .

5. Nous établirons encore une formule utile.

Soient α , β , γ trois vecteurs quelconques. D'après ce que nous avons expliqué plus haut, sans diminuer la généralité nous pouvons supposer

$$\alpha = ir, \quad \beta = r'(i \cos \theta + j \sin \theta), \quad \gamma = r''(ia + jb + kc),$$

r , r' , r'' étant la longueur de ces vecteurs.

On a

$$\alpha\beta = rr'(-\cos \theta + k \sin \theta),$$

donc

$$\alpha\beta\gamma = -rr' \cos \theta \cdot \gamma + rr'r'' \sin \theta k(ia + jb + kc),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha\beta\gamma &= -rr' \cos \theta \cdot \gamma + arr''(ir' \cos \theta + jr' \sin \theta) \\ &\quad - irr'r''(a \cos \theta + b \sin \theta) - crr'r'' \sin \theta, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire ainsi

$$\alpha\beta\gamma = \alpha S(\beta\gamma) - \beta S(\gamma\alpha) + \gamma S(\alpha\beta) - cr r' r'' \sin \theta,$$

ou si l'on préfère

$$(3) \quad \begin{aligned} V(\alpha\beta\gamma) &= \alpha S(\beta\gamma) - \beta S(\gamma\alpha) + \gamma S(\alpha\beta), \\ S(\alpha\beta\gamma) &= -rr' \sin \theta cr''. \end{aligned}$$

On voit que $S(\alpha\beta\gamma) = \pm 6$ fois le volume du tétraèdre dont les trois vecteurs sont trois arêtes partant d'un même sommet. Or, si (x, y, z) , (x', y', z') , (x'', y'', z'') sont les coordonnées des extrémités M, M', M'' des vecteurs donnés, un calcul direct facile donne

$$S(\alpha\beta\gamma) = - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

on retrouve ainsi une formule de géométrie analytique. On peut remarquer qu'il résulte de la formule donnant $V(\alpha\beta\gamma)$ que

$$V(\alpha\beta\gamma) = V(\gamma\beta\alpha).$$

6. Pour arriver à la formule d'Hamilton que nous avons en vue, nous devons traiter le problème suivant :

Étant donnés les coordonnées x, y, z d'un point M et les cosinus directeurs d'un axe OR , on fait tourner le point M d'un angle θ autour de l'axe OR , trouver les coordonnées du point M_1 avec lequel M vient coïncider, la rotation effectuée.

Premier cas. — Les droites OM et OR sont perpendiculaires. La solution est immédiate. En supposant

$$\lambda = ia + jb + kc$$

et

$$\overline{OM} = u, \quad \overline{OM}_1 = u_1,$$

on a

$$u_1 = (\cos \theta + \lambda \sin \theta) u,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} i x_1 + j y_1 + k z_1 \\ = [\cos \theta + (ia + jb + kc) \sin \theta] (ix + jy + kz). \end{aligned}$$

Si l'on égale de part et d'autre les coefficients de i, j, k , on trouve immédiatement

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \theta + (bz - cy) \sin \theta, \\ y_1 = y \cos \theta + (cx - az) \sin \theta, \\ z_1 = z \cos \theta + (ay - bx) \sin \theta, \end{cases}$$

le terme réel $ax + by + cz$ est nul en vertu de l'hypothèse que OM et OR sont perpendiculaires.

Second cas. — OM n'est pas perpendiculaire à OR . Les formules (4) ne conviennent plus.

Soit P la projection commune des points M, M_1 sur l'axe OR . On a

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \overline{OP} + \overline{PM}, \\ \overline{OM_1} &= \overline{OP_1} + \overline{PM_1}. \end{aligned}$$

Soient \overline{Om} et $\overline{Om_1}$ deux vecteurs équipollents à \overline{PM} et $\overline{PM_1}$. Si l'on fait tourner autour de OR le vecteur Om de l'angle $\frac{\theta}{2}$ et le vecteur Om_1 de l'angle $-\frac{\theta}{2}$, l'un et l'autre viendront coïncider avec un même vecteur $\overline{Om_2}$. Si l'on pose $\cos \theta + \lambda \sin \theta = v$, on posera

$$\cos \frac{\theta}{2} + \lambda \sin \frac{\theta}{2} = v^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \frac{\theta}{2} - \lambda \sin \frac{\theta}{2} = v^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on aura

$$v^{\frac{1}{2}} \overline{Om} = \overline{Om_1} v^{\frac{1}{2}} = \overline{Om_2},$$

d'où

$$(5) \quad v^{\frac{1}{2}} \overline{Om} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = \overline{Om_1},$$

car

$$\overline{Om_2} v^{-\frac{1}{2}} = \overline{Om_1}.$$

En désignant \overline{OP} par $h\lambda$, u et u_1 désignant les vecteurs \overline{OM} et $\overline{Om_1}$, on a

$$\overline{Om} = u - h\lambda, \quad \overline{Om_1} = u_1 - h\lambda,$$

en portant ces expressions dans la relation (5) on obtient, après un calcul simple,

$$(6) \quad u_1 = v^{\frac{1}{2}} u v^{-\frac{1}{2}},$$

c'est la formule cherchée.

Si l'on change θ en $-\theta$, on aura pour u_1

$$u_1 = v^{-\frac{1}{2}} u v^{\frac{1}{2}}.$$

C'est sous cette forme qu'Hamilton écrit sa formule, mais comme il représente par ba le produit de a par b , c'est la formule (5) qui, avec nos notations, traduit sa pensée.

Pour calculer x_1, y_1, z_1 , effectuons les calculs indiqués:

$$\begin{aligned} & \left(\cos \frac{\theta}{2} + \lambda \sin \frac{\theta}{2} \right) u = u \cos \frac{\theta}{2} + \lambda u \sin \frac{\theta}{2}, \\ & \left(u \cos \frac{\theta}{2} + \lambda u \sin \frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \lambda \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ & = u \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\lambda u - u\lambda) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \lambda u \lambda \sin^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

mais

$$\lambda u = S(\lambda u) + V(\lambda u),$$

$$u\lambda = S(\lambda u) - V(\lambda u);$$

donc

$$\lambda u - u\lambda = 2 V(\lambda u).$$

Pour calculer $\lambda u \lambda$ on peut prendre les deux vecteurs λ, u dans le plan des xy , mais on peut se servir de

l'identité (3), en remarquant que $S(\lambda u \lambda) = 0$, et par suite

$$\lambda u \lambda = V(\lambda u \lambda) = 2\lambda S(u\lambda) + u,$$

car $S(\lambda^2) = -1$. On a donc

$$v^{\frac{1}{2}} u v^{-\frac{1}{2}} = u \cos^2 \frac{\theta}{2} + V(\lambda u) \sin \theta - [2\lambda S(u\lambda) + u] \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Or

$$\begin{aligned} V(\lambda u) &= i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx), \\ S(\lambda u) &= -(ax + by + cz), \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} ix_1 + jy_1 + kz_1 &= (ix + jy + kz) \cos \theta \\ &\quad + [i(bz - cy) + j(cx - az) + k(ay - bx)] \sin \theta \\ &\quad + 2(ia + jb + kc)(ax + by + cz) \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

En identifiant on obtient

$$(\tau) \begin{cases} x_1 = x \cos \theta + (bz - cy) \sin \theta + 2a \sin^2 \frac{\theta}{2} (ax + by + cz), \\ y_1 = y \cos \theta + (cx - az) \sin \theta + 2b \sin^2 \frac{\theta}{2} (ax + by + cz), \\ z_1 = z \cos \theta + (ay - bx) \sin \theta + 2c \sin^2 \frac{\theta}{2} (ax + by + cz). \end{cases}$$

Remarques. — Si OM et OR sont perpendiculaires, on a $ax + by + cz = 0$ et l'on retrouve les formules (4).

Si $\theta = \pi$, on a des formules évidentes *a priori* et qui expriment que P est alors le milieu de MM_1 .

7. Il est juste de rappeler encore que les formules (4) et, par suite, les formules (7) peuvent s'obtenir très aisément sans le secours des quaternions.

En conservant les mêmes notations, transportons l'origine des coordonnées au point P, par une translation égale à \overline{OP} . Soient X, Y, Z et X₁, Y₁, Z₁ les coordonnées de M et M₁ par rapport aux nouveaux axes. Prenons un troisième système d'axes définis ainsi : Pξ a la même direction et le même sens que PM; Pζ est confondu avec l'axe OR; enfin Pη est perpendiculaire à Pξ et Pζ et orienté de façon que le trièdre Pξηζ soit de même espèce que PXYZ et Oxyz. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées nouvelles de M₁, on a

$$\xi = r \cos \theta, \quad \eta = r \sin \theta, \quad \zeta = 0$$

avec $r = PM$. Les cosinus directeurs de Pξ par rapport aux premiers axes sont $\frac{X}{r}, \frac{Y}{r}, \frac{Z}{r}$; ceux de Pζ sont, par hypothèse, a, b, c et ceux de Pη ont pour valeurs

$$\frac{bZ - cY}{r}, \quad \frac{cX - aZ}{r}, \quad \frac{aY + bX}{r}.$$

On a donc

$$X_1 = r \cos \theta \frac{X}{r} + r \sin \theta \frac{bZ - cY}{r},$$

c'est-à-dire

$$(3') \quad X_1 = X \cos \theta + (bZ - cY) \sin \theta,$$

et pareillement pour Y₁, Z₁. On obtient ainsi les formules (4) et l'on passe aisément de ces formules aux formules (7) en remplaçant X, Y, Z par $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ et X₁, Y₁, Z₁ par $x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0$, où x_0, y_0, z_0 désignent les coordonnées de P par rapport au premier système, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x_0 &= a(ax + by + cz), \\ y_0 &= b(ax + by + cz), \\ z_0 &= c(ax + by + cz). \end{aligned}$$

[D6cα]

SUR LA DÉFINITION DE LA FONCTION e^x ;

PAR EUGÈNE FABRY.

La méthode classique pour définir la fonction exponentielle consiste à chercher la limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour m infini, et à démontrer que cette limite est donnée par une série dont la valeur numérique est représentée par e . On démontre ensuite que $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ a la même limite que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mx}$, et que cette limite est aussi représentée par une série qui donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Une autre méthode consiste à représenter par $f(x)$ la fonction définie par cette série, à étudier ces propriétés par des combinaisons de séries, en particulier

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

En donnant à x et y , successivement, des valeurs entières, fractionnaires, incommensurables, on en déduit

$$f(x) = e^x.$$

Je veux montrer que l'on peut simplifier ces démonstrations, en suivant une marche inverse plus directe, et en partant de la fonction a^x .

Supposons $a > 1$. Si x est entier positif, a^x est un produit de x facteurs égaux. Si x est un nombre frac-

tionnaire, on a la racine d'un produit. Si x est incommensurable, on peut former une suite de valeurs commensurables, et représenter par a^x la limite des valeurs correspondantes. De ces définitions on peut déduire la propriété fondamentale

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

où x et y sont deux nombres positifs ou négatifs. Pourvu que $a > 1$, a^x augmente avec x ; car, si $y > 0$,

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y > a^x.$$

$\frac{a^x - 1}{x}$ augmente aussi avec x . Le but de ce calcul étant de former la dérivée, nous éviterons de l'utiliser. Il s'agit de démontrer directement que

$$(1) \quad \frac{a^x - 1}{x} > \frac{a^y - 1}{y},$$

si $a > 1$, $x > y > 0$.

Supposons d'abord que x et y aient un rapport commensurable :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = z,$$

où p et q sont entiers. Soit

$$\begin{aligned} a^z &= b, \\ a^x &= a^{pz} = b^p, & a^y &= b^q. \end{aligned}$$

L'inégalité (1) à démontrer devient :

$$\frac{b^p - 1}{p} > \frac{b^q - 1}{q} \quad (p > q),$$

ou, en divisant par $b - 1$, qui est positif :

$$\begin{aligned} q(b^{p-1} + b^{p-2} + \dots + b + 1) &> p(b^{q-1} + b^{q-2} + \dots + b + 1), \\ q(b^{p-1} + b^{p-2} + \dots + b^q) &> (p - q)(b^{q-1} + b^{q-2} + \dots + b + 1). \end{aligned}$$

En considérant chaque produit comme une somme de q , ou de $p - q$, termes égaux, le premier membre renferme $q(p - q)$ termes, dont q sont toujours égaux entre eux; le second membre renferme de même $(p - q)q$ termes, dont $p - q$ sont, chaque fois, égaux. Chacun des termes du premier membre est supérieur à chaque terme du second membre, et l'inégalité est démontrée.

Si le rapport des nombres x et y n'est pas commensurable, on peut choisir des nombres u et v , ayant avec x des rapports commensurables, tels que

$$x > u > y > v,$$

on a alors

$$\frac{a^x - 1}{x} > \frac{a^u - 1}{u} > \frac{a^v - 1}{v},$$

on pourra former des suites de nombres u et v dont la différence tendra vers zéro, ce qui permet d'étendre l'inégalité (1) au cas où y et x ont un rapport incommensurable.

Si x prend des valeurs positives décroissantes et tendant vers zéro, $\frac{a^x - 1}{x}$ décroît et tend vers une limite que nous représenterons par A .

Si l'exposant prend des valeurs négatives $-x$, qui augmentent et tendent vers zéro, la limite sera la même, car

$$\frac{a^{-x} - 1}{-x} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{a^x - 1}{x}.$$

Le premier facteur tend vers 1, le second vers A . La dérivée de a^x est la limite, pour $h = 0$, de

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

cette limite est Aa^x .

Il en résulte que A ne peut pas être nul, puisque a^x n'est pas une constante.

La dérivée seconde de a^x est $A^2 a^x$.

La dérivée d'ordre n est $A^n a^x$.

En appliquant la formule de Mac-Laurin, on en déduit le développement en série :

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{2} + \dots + \frac{A^n x^n}{n!} + \dots$$

Nous représenterons par e la valeur que doit prendre a pour que $A = 1$; par définition, la limite de

$$\frac{e^h - 1}{h},$$

pour $h = 0$, sera 1. Alors

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Pour $x = 1$, on en déduit la série qui détermine la valeur numérique du nombre e .

[O'5a]

SUR LES VOLUMES TOURNANTS ;

PAR A. BUHL.

(Suite.)

9. *Rappel du problème.* — Le problème le plus général posé dans l'article précédent consistait à déterminer des surfaces telles qu'un contour fermé, tracé sur elles, donnait, en tournant autour de deux droites fixes, D et D' , des volumes tournants, V et V' , de

rapport constant, c'est-à-dire tels que

$$mV = nV'.$$

Les droites D et D' avaient pour équations

$$(D) \quad \begin{cases} x = a, \\ z = y \operatorname{tang} \omega; \end{cases}$$

$$(D') \quad \begin{cases} x = -a, \\ z = -y \operatorname{tang} \omega. \end{cases}$$

Dans ces conditions les surfaces cherchées sont les hélicoïdes

$$(19) \quad Y = l \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{X}{Z} + f(X^2 + Z^2),$$

en lesquels

$$l = \frac{\alpha(\mu^2 - \nu^2) \sin \omega \cos \omega}{\mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega}.$$

Pour le déplacement qui fait passer des x, y, z aux X, Y, Z on se reportera aux relations (15). Rappelons encore que

$$\mu = m + n, \quad \nu = m - n.$$

L'axe de l'hélicoïde (19) a pour équations $X = 0, Z = 0$, ou

$$(20) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha \mu \nu}{\mu^2 \cos^2 \omega + \nu^2 \sin^2 \omega}, \\ \nu \sin \omega y = \mu \cos \omega z. \end{cases}$$

Cet axe HY, si H est origine pour les coordonnées X, Y, Z, fait, avec Oy, un angle Ω qui se trouve être aigu dans la figure que nous imaginons.

10. L'axe HY est axe central pour deux vecteurs respectivement portés par D et D'. — Sur D portons un vecteur AD = m et sur D' un vecteur A'D' = -n. On peut convenir que A et A' seront sur l'axe OHx.

Alors, avec les notations habituelles de la théorie des vecteurs, on peut avoir

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & Y_1 &= m \cos \omega, & Z_1 &= m \sin \omega, \\ L_1 &= 0, & M_1 &= -am \sin \omega, & N_1 &= am \cos \omega, \end{aligned}$$

pour les composantes et les moments de AD relativement aux axes $Oxyz$. De même, pour $A'D'$, on peut avoir

$$\begin{aligned} X_2 &= 0, & Y_2 &= n \cos \omega, & Z_2 &= -n \sin \omega, \\ L_2 &= 0, & M_2 &= -an \sin \omega, & N_2 &= -an \cos \omega. \end{aligned}$$

Toujours avec les notations connues ⁽¹⁾, les équations de l'axe central des vecteurs AD et $A'D'$ sont

$$\frac{zY - yZ}{0} = \frac{M + xZ}{Y} = \frac{N - xY}{Z},$$

et, si l'on y remplace Y par $Y_1 + Y_2$, etc., on retrouve les équations (20). Donc l'axe central de AD et $A'D'$ n'est autre que HY, axe de l'hélicoïde (19).

Si l'on projette AD et $A'D'$ sur le plan ZHx normal à HY, la somme de ces deux projections doit évidemment être nulle et ceci donne

$$m \sin(\omega - \Omega) = n \sin(\omega + \Omega),$$

ce qui n'est qu'une autre forme de la relation déjà obtenue

$$\text{tang } \Omega = \frac{m - n}{m + n} \text{ tang } \omega.$$

De celle-ci, on peut déduire, par des calculs fort simples,

$$\text{tang}(\omega + \Omega) = \frac{l}{HA}, \quad \text{tang}(\omega - \Omega) = \frac{l}{HA'},$$

⁽¹⁾ P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. I, 3^e édition, p. 19. — G. KENIGS, *Leçons de Cinématique*, p. 36.

ce qui équivaut à une égalité bien connue ⁽¹⁾, qui, avec des notations analogues à celles de A. Mannheim, s'écrit

$$\overline{HA} \operatorname{tang} (D', HY) = \overline{HA'} \operatorname{tang} (D, HY).$$

En s'appuyant sur ces résultats, on démontre facilement que, *sur l'hélicoïde central, l'hélice passant par A rencontre normalement, en A, la droite symétrique de AD par rapport au plan $\pi O x$* . On pourrait évidemment continuer ainsi et retrouver tous les théorèmes attachés à l'hélicoïde central d'un système de vecteurs, système toujours réductible à deux vecteurs tels que AD et A'D'.

A propos de ces nombreux théorèmes et de toutes les références bibliographiques qui pourraient les concerner, il me semble juste de faire un éloge spécial des *Principes et Développements de Géométrie cinématique* dus au regretté Mannheim; sa géométrie de l'espace débute précisément par un très grand nombre de propositions analogues à celles que nous venons de rappeler, propositions auxquelles, en résumé, on peut joindre la suivante : *Les contours fermés tracés sur l'hélicoïde central relatif à deux vecteurs donnent, en tournant autour de ceux-ci, des volumes de révolution de rapport constant*. Et comme on l'a vu, l'infinité d'hélicoïdes possibles correspond à la variation du rapport des volumes de révolution considérés.

Il ne doit pas non plus être sans intérêt de remarquer que la théorie de l'hélicoïde central a été ramenée ici à l'étude d'une certaine équation aux dérivées partielles du premier ordre.

(1) A. MANNHEIM, *Géométrie cinématique*, p. 116. — A. SCHENFLIES, *Geometrie der Bewegung*, p. 168.

[12c]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE L'INDICATEUR ;

PAR G. MÉTOD.

1. Dans la démonstration habituelle de la formule qui donne le nombre $\varphi(m)$ des entiers premiers avec l'entier m et non supérieurs à m , on part d'un système complet (mod m) dans lequel on supprime les entiers non premiers avec m .

On peut appliquer la méthode inverse, c'est-à-dire former directement le système des entiers premiers avec m ; on obtient ainsi une démonstration simple de la formule de l'indicateur de m .

2. Soit p^α une puissance du nombre premier p . Dans le système de numération de base p , tout entier inférieur à p^α peut s'écrire sous la forme

$$x_{\alpha-1}p^{\alpha-1} + x_{\alpha-2}p^{\alpha-2} + \dots + p x_1 + x_0,$$

dans laquelle les x sont des entiers égaux à $p - 1$ au plus. Quand on donne aux x toutes les valeurs entières de 0 à $p - 1$, l'expression précédente parcourt l'ensemble des p^α nombres inférieurs à p^α .

Parmi ces nombres, ceux qui sont premiers avec p sont ceux pour lesquels x_0 n'est pas nul; leur nombre est donc

$$\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p - 1).$$

3. Soit maintenant un entier quelconque m décomposé en ses facteurs premiers, dont le nombre est ν :

$$m = a^\alpha b^\beta \dots l^\lambda.$$

Considérons l'expression

$$\frac{m}{a^\alpha} x_1 + \frac{m}{b^\beta} x_2 + \dots + \frac{m}{l^\lambda} x_v;$$

si x_1 parcourt un système complet (mod a^α), x_2 un système complet (mod b^β), ..., x_v un système complet (mod l^λ), l'expression prend m valeurs formant un système complet (mod m).

En effet l'expression considérée ne peut être congrue à 0 (mod m) que si elle est congrue à 0 suivant chacun des modules a^α , b^β , ..., l^λ ce qui exige

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 0 \pmod{a^\alpha}, \\ x_2 &\equiv 0 \pmod{b^\beta}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_v &\equiv 0 \pmod{l^\lambda}. \end{aligned}$$

Pour qu'un entier soit premier avec m il faut et il suffit qu'il soit premier séparément avec a^α , b^β , ..., l^λ , c'est-à-dire que x_1 soit premier avec a^α , x_2 avec b^β , ..., x_v avec l^λ . On obtient donc un système complet de nombres premiers avec m en faisant parcourir à x_1 un système complet de nombres premiers avec a^α , à x_2 un système complet de nombres premiers avec b^β , ..., à x_v un système complet de nombres premiers avec l^λ .

On a donc

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= \varphi(a^\alpha) \varphi(b^\beta) \dots \varphi(l^\lambda), \\ &= m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right). \end{aligned}$$

4. La méthode peut être généralisée pour calculer l'indicateur de $k^{\text{ième}}$ ordre. On sait qu'on appelle indicateur de $k^{\text{ième}}$ ordre de l'entier m le nombre des arrangements k à k avec répétition des entiers 0, 1, ..., $m - 1$ tels que ces k entiers et m soient premiers dans leur ensemble.

Considérons d'abord le cas d'une puissance p^α d'un nombre premier p . Un système de k entiers inférieurs à p^α peut être représenté par les k expressions

$$p^{\alpha-1} x_{\alpha-1}^{(1)} + p^{\alpha-2} x_{\alpha-2}^{(1)} + \dots + px_1^{(1)} + x_0^{(1)},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$p^{\alpha-1} x_{\alpha-1}^{(k)} + p^{\alpha-2} x_{\alpha-2}^{(k)} + \dots + px_1^{(k)} + x_0^{(k)},$$

dans lesquelles les x sont au moins 0 et au plus $p - 1$.

Les x parcourant séparément les entiers de 0 à $p - 1$, ces expressions engendrent les $p^{\alpha k}$ systèmes de k entiers (mod p^α).

Pour que le plus grand commun diviseur des entiers d'un tel système soit premier avec p^α il faut et il suffit que les nombres x_0 ne soient pas tous nuls.

On a donc pour l'indicateur de $k^{\text{ième}}$ ordre la formule

$$\varphi_k(p^\alpha) = p^{(\alpha-1)k} (p^k - 1)$$

ou

$$\varphi_k(p^\alpha) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p^k}\right).$$

§. Soit maintenant

$$m = \alpha^\alpha b^\beta \dots l^\lambda.$$

Le nombre des arrangements complets k à k des entiers d'un système complet (mod m) est m^k . L'un quelconque de ces arrangements est représenté par les k expressions

$$\frac{m}{\alpha^\alpha} x_1^{(1)} + \frac{m}{b^\beta} x_2^{(1)} + \dots + \frac{m}{l^\lambda} x_\nu^{(1)},$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\frac{m}{\alpha^\alpha} x_1^{(k)} + \frac{m}{b^\beta} x_2^{(k)} + \dots + \frac{m}{l^\lambda} x_\nu^{(k)}.$$

Si les x_1 parcourent séparément un système complet (mod α^α), les x_2 un système complet (mod b^β), ...,

les x_i un système complet (mod l^k), l'ensemble des k expressions précédentes parcourt tous les arrangements complets k à k d'un système complet (mod m).

Pour que le plus grand commun diviseur d'un système de k entiers soit premier avec m , il faut et il suffit qu'il le soit avec $a^\alpha, b^\beta, \dots, l^\lambda$. Un système de k entiers possède cette propriété lorsque les x_i forment un système de k entiers dont le plus grand commun diviseur est premier avec $a^\alpha, \dots, l^\lambda$, les x_i un système de k entiers dont le plus grand commun diviseur est premier avec l^λ .

On a donc pour l'indicateur de $k^{\text{ième}}$ ordre

$$\begin{aligned} \varphi_k(m) &= \varphi_k(a^\alpha) \cdot \varphi_k(b^\beta) \dots \varphi_k(l^\lambda) \\ &= m^k \left(1 - \frac{1}{a^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{b^\beta}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l^\lambda}\right). \end{aligned}$$

6. La méthode peut aussi s'appliquer à la théorie des entiers et des idéaux d'un corps algébrique.

Soient P un idéal premier d'un corps algébrique, p un entier de ce corps divisible par P mais non par P^2 , l'expression

$$p^{\alpha-1} x_{\alpha-1} + p^{\alpha-2} x_{\alpha-2} + \dots + p x_1 + x_0$$

parcourt un système complet (mod P^α) lorsque les x_i parcourent séparément un système complet (mod P). On s'en assure en observant que l'expression ne peut être congrue à 0 que si tous les x_i sont congrus à 0 (mod P).

D'autre part, soit M un idéal composé

$$M = A^\alpha B^\beta \dots L^\lambda,$$

A, B, \dots, L étant des idéaux premiers. Choisissons dans le corps algébrique un entier a divisible par A

mais non par A^2 et premier avec $\frac{M}{A^\alpha}$; un entier b divisible par B mais non par B^2 et premier avec $\frac{M}{B^\beta}$; ...; un entier l divisible par L mais non par L^2 et premier avec $\frac{M}{L^\lambda}$; puis posons

$$m = \alpha^\alpha b^\beta \dots l^\lambda.$$

Cet entier m est divisible par l'idéal M et le quotient $\frac{m}{M}$ est premier avec M .

On voit alors que l'expression

$$\frac{m}{\alpha^\alpha} x_1 + \frac{m}{b^\beta} x_2 + \dots + \frac{m}{l^\lambda} x_\nu$$

donne un système complet (mod M) lorsque x_1 parcourt un système complet (mod A^α), x_2 un système complet (mod B^β), ..., x_ν un système complet (mod L^λ). La démonstration se continue ensuite comme dans les nos 2 et 3. On raisonne de même pour l'indicateur de $k^{\text{ième}}$ ordre.

7. La méthode que j'indique peut encore servir à résoudre d'autres questions analogues, par exemple la suivante qui constitue une extension de la notion de l'indicateur (LUCAS, *Théorie des nombres*, n° 221).

Trouver le nombre des entiers h de la suite

$$0, 1, 2, \dots, m-1$$

tels que

$$h - e_1, h - e_2, \dots, h - e_k$$

soient premiers avec m ; e_1, e_2, \dots, e_k étant des entiers donnés.

On trouvera facilement que ce nombre est :

$$m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{l}\right),$$

a, b, \dots, l étant les facteurs premiers de m ; μ_1 le nombre des entiers e différents (mod a), μ_2 le nombre des entiers e différents (mod b), \dots , μ_ν le nombre des entiers e différents (mod l).

[R9b]

**NOTE SUR LE CHOC
EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT;**

PAR MM. DELASSUS ET PÉRÈS.

Dans tout ce qui suit nous adopterons uniformément les notations employées dans les deux articles de M. Pérès (¹), que l'article actuel est destiné à compléter sur certains points.

1.

1. Commençons par préciser les hypothèses ou, plus exactement, les approximations classiques habituelles.

Dans la théorie du choc sans frottement il y a, à chaque instant du choc, une réaction normale très grande; cette réaction est normale à *la liaison déformée par le choc*, elle a donc une direction variable mais (c'est un fait d'expérience) elle donne naissance *pour la totalité du choc* à une percussion de réaction qui est normale à *la liaison non déformée*; la solution ne fait intervenir que l'instant initial et l'instant final donc élimine la déformation.

Il n'en est plus de même pour le choc avec frottement. Il faut alors, en général, faire intervenir la suite

(¹) PÉRÈS, *N. A.*, 5 série, t. II, 1923-1924, p. 98 et 216.

continue des états intermédiaires en tenant compte de la déformation ou en la négligeant. Dans la théorie classique, à laquelle se rapporte cet article, *on néglige la déformation* et l'on applique au mouvement pendant le choc les lois ordinaires du frottement, la réaction normale et la réaction tangentielle étant définies par la liaison non déformée.

2. Les approximations ainsi faites qui, dans le cas d'un frottement négligeable, conduisent en accord avec l'expérience à une percussion totale normale à la liaison non déformée, reviennent, en somme, à assimiler le mouvement de choc avec frottement à un mouvement ordinaire avec frottement, mais il reste néanmoins une différence essentielle :

Dans le mouvement ordinaire la vitesse normale W est constamment nulle ; dans le mouvement de choc il n'y a pas de mouvement normal, puisqu'on néglige la déformation, mais cela n'empêche pas W de varier en passant par une suite continue de valeurs. Au mouvement tangentiel vient s'ajouter ce que l'on pourrait appeler un mouvement normal de vitesse. Quand le choc est sans frottement W va constamment en croissant de sa valeur initiale négative W_0 à la valeur positive $-eW_0$ qui indique la fin du choc ; quand le choc a lieu avec frottement ce mouvement constamment croissant de W n'existe plus forcément, mais nous continuerons à admettre que la fin du choc est arrivée quand W atteint pour la première fois la valeur $-eW_0$; c'est là une hypothèse et non plus une approximation, elle est commode comme donnant une définition unique de la fin du choc, mais ne pourrait se justifier que par des expériences qui n'ont jamais été tentées.

3. Du fait que W était constamment nulle pour tout

mouvement ordinaire résultait que les réactions initiales de tous les mouvements obtenus en faisant varier le coefficient de frottement avaient leurs extrémités sur une même parallèle au diamètre conjugué D de Oy dans l'ellipse $\varphi = 1$ (cas du plan) ou sur un même plan parallèle au plan diamétral conjugué D de Oz dans l'ellipsoïde $\varphi = 1$ (cas de l'espace) et cela conduisait à l'impossibilité du mouvement chaque fois que la vitesse initiale de glissement indiquait une réaction de glissement *au-dessous* de la droite ou du plan D (1).

On est tenté, par généralisation, d'appliquer ce résultat au mouvement de choc puisqu'on l'assimile à un mouvement ordinaire avec frottement, mais cette généralisation est fautive. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre le cas d'impossibilité du mouvement plan avec frottement; nous avons des conditions initiales (C) d'impossibilité du mouvement, l'expérience nous apprend qu'il y a choc ramenant brusquement aux conditions initiales du roulement (2); mais ce choc effectif débute par ces mêmes conditions (C); donc, pour le choc, celles-ci ne sont pas des conditions initiales d'impossibilité.

Cela tient en réalité à l'existence, dans le cas du choc, du mouvement normal de vitesse. Deux mouvements de choc à débuts identiques donnent des vitesses W et W_1 , qui ne sont pas identiquement nulles de sorte qu'on ne sait rien sur $W - W_1$, ni sur $\left(\frac{dW}{dt} - \frac{dW_1}{dt}\right)_0$; comme la propriété de la droite D ou du plan D résultait de ce que cette quantité était nulle dans le mouvement ordinaire, on en conclut qu'elle n'existe plus dans le cas du mouvement de choc. Ainsi :

(1) DELASSUS, *N. A.*, 4^e série, t. XX, 1920, p. 485.

(2) *Ibid.*, p. 491.

Pour le mouvement de choc il n'existe jamais de conditions initiales d'impossibilité et la discussion de M. Pérès (plan ou espace) s'applique toujours.

4. Revenons au cas d'impossibilité du mouvement ordinaire plan. Il se produit au début un choc qui n'est intéressant que par son résultat final connu d'avance, mais dont on peut facilement étudier la nature en remarquant qu'on est dans le cas (c) de la discussion plane de M. Pérès puisque M_0 est sur Ox et p entre A et K ; il y a choc à deux périodes G et R amenant au point M_1 placé en O .

Essayons d'étudier le cas analogue de l'espace. On suppose que les conditions initiales (C) conduisent à une réaction initiale X_0, Y_0, Z_0 dirigée suivant une demi-génératrice du cône positif de frottement située *au-dessous* du plan D . Il se produit choc avec frottement, le point de départ M_0 étant dans le plan des xy et tout ce que nous savons *a priori* sur ce choc c'est qu'il sera suivi d'un mouvement ordinaire, donc qu'il transformera les conditions (C) d'impossibilité de mouvement en conditions (C') de possibilité de mouvement.

Ces conditions (C') ne sont plus, comme dans le cas du plan, connues *a priori* et pour les déterminer il faut faire l'étude complète du choc.

Bornons-nous ici à montrer que ce choc conduira toujours au résultat cherché, c'est-à-dire à des conditions (C') de possibilité pour le mouvement.

La discussion de M. Pérès montre que, dans le mouvement indéfiniment prolongé du point M , la cote de ce point croît indéfiniment, que le choc soit à période unique ou à deux périodes; autrement dit, W part de W_0 , varie d'une façon continue et finit par tendre vers $+\infty$.

Dans le cas actuel $W_0 = 0$, le point M_0 est dans le plan des xy et, par hypothèse, le point P_0 est *au-dessous* du plan D , ce qui donne un vecteur OR_0 dirigé vers le bas et montre que la courbe (M) part de M_0 en descendant. La vitesse W part de zéro en décroissant, elle est donc négative au début, et comme elle deviendrait finalement infinie et positive elle est obligée par continuité de revenir s'annuler ; la première fois que ce fait se produit le choc est terminé, d'une part, et, d'autre part, W passe du négatif au positif, donc va en croissant, de sorte que le point M_0 du plan des xy qui termine le choc se trouve sur une portion *ascendante* de la trajectoire de M et, s'il n'est pas en O , donne un point P situé *au-dessus* du plan D .

Le choc donne donc pour le mouvement ordinaire ultérieur des conditions initiales soit de roulement, soit de glissement possible, c'est-à-dire la solution complète sans impossibilité ni indétermination.

Il est à remarquer que si l'on avait essayé de traiter le choc dans les mêmes conditions mais en supposant la réaction X_0, Y_0, Z_0 au-dessus du plan D , on aurait eu une courbe (M) partant du point M_0 du plan des xy en montant. Ce choc ne pourrait pas avoir lieu puisque, dès son début, la molécule au contact prendrait une vitesse normale positive indiquant l'échappement. De là et de ce qui précède résulte cette conclusion :

Des conditions initiales quelconques de mouvement sont toujours des conditions initiales de possibilité soit pour le mouvement, soit pour le choc, mais jamais pour les deux simultanément.

Il est bon de faire remarquer que les cas d'impossibilité de choc ici signalés n'infirment pas la conclusion précédemment indiquée (§ 3) qu'il n'y avait jamais

d'impossibilité pour le mouvement de choc. Nous supposons à ce moment choc ordinaire ($W_0 < 0$) tandis qu'actuellement nous nous plaçons dans le cas limite ($W_0 = 0$) donnant des propriétés spéciales.

L'étude faite dans ce paragraphe met en évidence ce fait curieux et inattendu que, dans certains cas, l'étude d'un mouvement avec frottement de glissement exige l'étude préalable d'un problème de choc avec frottement.

II.

§. Dans le cas du choc plan les formules fondamentales de M. Pères

$$\Delta U = \frac{\partial \varphi(X, Y)}{\partial X}, \quad \Delta V = \frac{\partial \varphi(X, Y)}{\partial Y}$$

linéaires et homogènes montrent qu'à tout déplacement ΔU , ΔV , du point M correspond une percussion de réaction bien déterminée et que si ce déplacement est la résultante de plusieurs autres, la percussion est la résultante de celles qui correspondent aux déplacements composants.

Tout choc à deux périodes est donné par deux déplacements rectilignes $M_0 M'$, $M' M_1$; il pourra être remplacé, au point de vue du calcul, par le choc correspondant au chemin rectiligne $M_0 M_1$, choc résultant que nous appellerons le *choc rectiligne*, dont la percussion sera la résultante des percussions qui correspondent aux deux périodes et qui sera complètement déterminé par la connaissance des deux points M_0 , M_1 . On aura ainsi ΔU et ΔV d'où l'on déduira X et Y puis, par les équations de percussion, toutes les variations de vitesses.

Tous les cas de choc à deux périodes peuvent se ranger en deux catégories :

a. Glissement suivi de roulement. — Le point M_1 est alors sur Oy , donc est déterminé par

$$U_1 = 0, \quad V_1 = -eV_0.$$

b. Glissement positif suivi de glissement négatif. — Le déplacement M_0M' est parallèle à la droite Or qui correspond aux glissements positifs et dont on calcule aisément les paramètres directeurs α, β au moyen de f et des coefficients de l'ellipse φ . De même $M'M_1$ est parallèle à Or , qui correspond aux glissements négatifs et dont on calcule les paramètres directeurs α', β' . En écrivant que les parallèles à Or et Or' , menées respectivement par M_0 et M_1 , se rencontrent sur Oy et adjoignant l'équation finale du choc, on a deux équations

$$\frac{\beta U_0 - \alpha V_0}{\alpha} = \frac{\beta' U_1 - \alpha' V_1}{\alpha'}, \quad V_1 = -eV_0$$

qui déterminent U_1, V_1 et permettant de traiter le choc rectiligne. Les deux cas *a, b* ne conduisent donc pas aux mêmes équations, mais la discussion plane de M. Pérès montre chaque fois dans lequel de ces deux cas on se trouve, donc quelles sont les équations à employer.

Nous remarquons que la percussion de choc rectiligne doit toujours, à titre de vérification, être une percussion de roulement, c'est-à-dire à l'intérieur de l'angle positif de frottement. Elle est en effet résultante d'une percussion effective de glissement et d'une percussion effective de roulement (cas *a*), c'est-à-dire de deux vecteurs dont l'un est sur un côté de l'angle de

frottement et dont l'autre est à l'intérieur, ou bien (cas b), résultante de deux percussions effectives de glissement, c'est-à-dire de deux vecteurs portés par les deux côtés de l'angle de frottement.

6. Les raisonnements précédents peuvent s'étendre au cas de l'espace et conduire encore à la notion résultante de choc rectiligne, avec cette seule différence que le parcours curviligne de M doit être considéré comme décomposé en éléments rectilignes infiniment petits. Chacun de ces éléments donnera une percussion de glissement effectif, vecteur infiniment petit porté par une génératrice du cône positif de frottement. Chaque élément rectiligne fini du chemin M_0M_1 donnera une percussion analogue mais finie; enfin si le parcours de M se termine par un segment de Oz , il y correspondra une percussion de roulement effectif, c'est-à-dire intérieure au cône positif. En composant toutes les percussions ainsi disposées on obtiendra sûrement une résultante intérieure de sorte que, comme dans le cas du plan, la percussion du choc rectiligne devra toujours être, à titre de vérification, une percussion de roulement.

L'étude effective du choc exige l'intégration des équations de la courbe (M) . Au point de vue pratique, le résultat final du choc nous importe seul. Peut-on l'obtenir sans intégration?

L'intégration des équations (M) est en général nécessaire pour déterminer le point M_1 et, quand cette détermination est faite, on traite la question de choc par la considération simple du choc rectiligne M_0M_1 .

Or, le point M_1 est connu *a priori* quand on sait que le choc se termine par roulement : il est alors sur Oz à l'altitude $-eW_0$ et, d'autre part, la discussion

de M. Pérès permet de reconnaître, sans aucune intégration, si l'on est dans ce cas. Donc :

Le résultat final du choc avec frottement s'obtient sans aucune intégration chaque fois que ce choc se termine par roulement.

Il suffit d'appliquer le choc rectiligne aboutissant au point M_1 défini par

$$U_1 = V_1 = 0, \quad W_1 = -eW_0.$$

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Mouvement d'un solide S homogène, pesant, de révolution, de centre de gravité G et d'axe Gz assujéti aux liaisons suivantes :*

Gz passe par un point fixe O.

G reste, sans pouvoir le quitter, sur un cylindre fixe de révolution autour de la verticale Oz₁.

1° *Discuter le mouvement dans la seule hypothèse où la position initiale de Gz est horizontale, la vitesse initiale de S se réduisant à une simple rotation ω autour de Gz. Discuter tous les paramètres. Étudier en détail les diverses formes de la trajectoire de G.*

2° *γ étant un parallèle tracé à l'avance, au-dessous de O, sur le cylindre, déterminer l'intervalle dans lequel doit être ω pour que le mouvement considéré précédemment se fasse entièrement au-dessus de γ .*

INDICATIONS POUR LA SOLUTION. — Soient θ l'angle de Oz avec la verticale (ascendante) Oz₁, ψ l'angle du plan zOz₁ avec un vertical fixe, φ l'angle de rotation du solide autour de son axe. Tenant compte des données initiales, on obtient, pour le

mouvement, les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi' + \psi' \cos \theta &= \omega, \\ (Mr^2 + A \sin^2 \theta) \psi' + C \omega \cos \theta &= 0, \\ (Mr^2 + A \sin^2 \theta) \left[\psi'^2 + \frac{\theta'^2}{\sin^2 \theta} \right] + Mgr \cos \theta &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit, pour déterminer θ , l'équation différentielle

$$\frac{[Mr^2 + A \sin^2 \theta]^2}{\sin^2 \theta} \theta'^2 + \cos \theta [Mgr(Mr^2 + A \sin^2 \theta) + C^2 \omega^2 \cos \theta] = 0,$$

et la discussion est immédiate.

Le parallèle γ étant déterminé par l'angle θ_0 ($> \frac{\pi}{2}$), la condition demandée dans la deuxième question est

$$\omega^2 > \frac{Mgr(Mr^2 + A \sin^2 \theta_0)}{-C^2 \cos \theta_0}.$$

(Bordeaux, juin 1921.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une droite homogène et pesante AA' , de longueur $2l$ et de masse m , peut tourner autour de la verticale ascendante Oz_1 , issue de son milieu O , en faisant un angle constant α avec cette verticale; soit φ l'angle du plan AOz_1 avec un plan vertical fixe x_1Oz_1 .

Un disque circulaire, homogène et pesant, de rayon R et de masse M , est assujéti à rester dans le plan vertical AOz_1 , et à rouler sans glisser sur la droite matérielle AA' , J étant le point de contact du disque, on pose $OJ = x$.

Les forces extérieures, appliquées au système, outre la pesanteur du disque et de la droite comprennent un système de forces appliquées à la droite AA' , se réduisant à un couple dont l'axe \vec{H} est dirigé selon Oz_1 .

1° En prenant comme paramètres x et φ , écrire les équations différentielles du mouvement du système.

2° Déterminer, en fonction de x et de $\frac{dx}{dt}$, la mesure H de l'axe du couple, de façon que le plan AOz_1 tourne

d'un mouvement uniforme avec une vitesse angulaire donnée autour de Oz_1 :

$$\varphi' = \omega.$$

3° Cette condition étant réalisée, intégrer l'équation du mouvement du disque sur AA' , en donnant l'expression de x en fonction de t .

4° En supposant toujours $\varphi' = \omega$, soit \vec{R} la réaction de la droite AA' , sur le disque; calculer en fonction de t les projections R_x, R_y, R_z de \vec{R} sur un trièdre mobile Ox, y, z ainsi défini :

Ox coïncide avec la demi-droite OA ; Oy est situé dans le plan AOz_1 , normal vers le haut à Ox ; Oz est normal au plan AOz_1 de façon que le trièdre soit direct.

Nota. — On supposera dans le problème que le disque n'atteint pas les extrémités A ou A' de la droite.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — La force vive du système est

$$2T = \frac{3}{2} M x'^2 + m \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha \cdot \varphi'^2 + M \left[(x \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha)^2 + \frac{R^2}{4} \right] \varphi'^2.$$

La fonction des forces de la pesanteur est par ailleurs

$$U = -M \cdot g(x \cdot \cos \alpha + R \cdot \sin \alpha).$$

Les équations de Lagrange donnent les équations du mouvement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2} M \cdot x'' - M \cdot \sin \alpha (x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha) \varphi'^2 = -M \cdot g \cdot \cos \alpha, \\ \left\{ \frac{d}{dt} \right\} \left\{ m \frac{l^2}{3} \sin^2 \alpha \cdot \varphi' + M \left[(x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha)^2 + \frac{R^2}{4} \right] \varphi \right\} = H. \end{array} \right.$$

De la deuxième équation on déduit la valeur de H pour que $\varphi' = \omega$; simplifications faites :

$$H = 2 \cdot M \omega x' \cdot \sin \alpha (x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha).$$

Cette condition étant réalisée, l'équation du mouvement est

$$\frac{3}{2}x'' - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot x = - (g + \omega^2 \cdot R \cdot \sin \alpha) \cos \alpha,$$

dont l'intégrale générale est immédiate. On a notamment une position d'équilibre relatif.

On calcule la réaction en appliquant le théorème du mouvement du centre de gravité au centre du disque, ce qui donne l'égalité vectorielle :

$$M \cdot \vec{\Gamma} = \vec{R} + \vec{P},$$

\vec{P} est le poids du disque, $\vec{\Gamma}$ est l'accélération du centre, on peut la décomposer par application du théorème de Coriolis :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r,$$

en prenant comme système mobile le plan du disque, les notations étant évidentes. En projetant ces égalités sur les axes indiqués, on obtient les composantes :

$$R_x = M g \cdot \cos \alpha - M \omega^2 \sin \alpha \cdot (x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha) + M \cdot x'',$$

$$R_y = M g \cdot \sin \alpha + M \omega^2 \cos \alpha \cdot (x \cdot \sin \alpha - R \cdot \cos \alpha),$$

$$R_z = - 2 \cdot M \omega \cdot \sin \alpha \cdot x'.$$

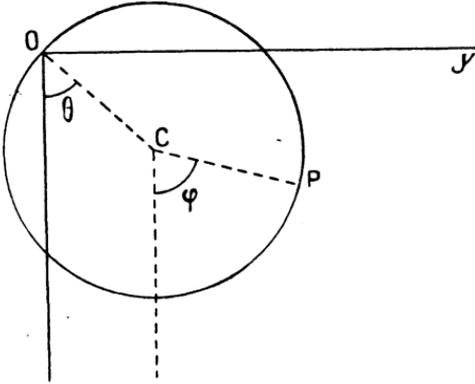
ÉPREUVE PRATIQUE. — Une circonférence matérielle, homogène et pesante, de rayon R et de masse totale M est mobile dans un plan vertical xOy autour d'un de ses points O qui est fixe; sur cette circonférence glisse sans frottement un point matériel pesant P de masse m .

1° En prenant comme paramètres les angles θ et φ des rayons OC et CP avec la verticale Ox , former les équations des petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable.

2° Intégrer ces équations et donner l'expression explicite de θ et de φ en fonction du temps, les données étant les suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_0 = 0, \quad \theta'_0 = 0, \quad \varphi_0 = 60', \quad \varphi'_0 = 0, \\ M = 100 \text{ gr}, \quad m = 10 \text{ gr}, \quad R = 98, 1 \text{ cm}, \quad g = 981, \end{aligned}$$

3° Montrer que dans ces conditions l'angle $\varphi - \theta$ est une fonction périodique du temps, calculer sa période à 0,01 sec. près.



SOLUTION. - La force vive du système est :

$$2T = 2.M.R^2\dot{\theta}^2 + R^2[\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)],$$

et la fonction des forces

$$U = M.g.R(\cos\theta - 1) + m.g.R[(\cos\theta - 1) + (\cos\varphi - 1)].$$

Les équations des petits mouvements autour de la position d'équilibre $\theta = 0$, $\varphi = 0$ sont par suite :

$$\begin{cases} R^2(2M + m)\theta'' + R^2m\varphi'' = -g.R(M + m)\theta, \\ R^2m\theta'' + R^2m\varphi'' = -g.R.m\varphi. \end{cases}$$

Pour l'application numérique demandée ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \theta'' + \varphi'' = -10\varphi, \\ 21\theta'' + \varphi'' = -110\theta. \end{cases}$$

La solution demandée est

$$\begin{cases} \varphi = 5'. [11\cos\sqrt{11}t + \cos\sqrt{5}t], \\ \theta = 5'. [-\cos\sqrt{11}t + \cos\sqrt{5}t]. \end{cases}$$

La suite est immédiate.

(Lille, juillet 1920.)



TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.
(TOME II, 5^e SÉRIE, 1923-1924.)

La classification adoptée est celle de l'*Index
du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

Analyse mathématique.

		Pages.
A 2 a	Sur la théorie des formes linéaires, par M. <i>Émile Borel</i>	1
A 5 a	Sur l'indice des fractions rationnelles, par M. <i>Rabatel</i>	161
B 12	Une première leçon sur les nombres complexes, par M. <i>R. Thiry</i>	17
B 12 d	Démonstration d'une formule d'Hamilton, par M. <i>B. Niewengłowski</i>	361
C 21	Sur l'intégration des différentielles totales rationnelles, par M. <i>E. Goursat</i>	81
D 1 a	La limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ établie par un procédé de démonstration élémentaire, par M. <i>J. Paoli</i>	47
D 1 b ζ	Résumé des principales propriétés des polynômes orthogonaux, par M. <i>N. Abramesco</i>	166
D 6 c α	Sur la définition de la fonction e^x , par M. <i>E. Fabry</i>	371
D 2 b	Sur une extension des séries de Bertrand, par M. <i>L. Pomey</i>	281
E 1 f	Quelques démonstrations de la relation des compléments $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$, par M. <i>A. Bloch</i>	283
I 2 c	Démonstration de la formule de l'indicateur, par M. <i>G. Métrod</i>	378

Géométrie.

	Pages.
K'9a	Sur les droites moyennes d'un triangle, par M. R. Bricard..... 241
K'13a	Sur une configuration connue de dix droites, par M. R. Bricard..... 41
K'21 a	Quadrature graphique du cercle par le rap- port de Mélius, par le général Chapel..... 73
M'2e	Sur quelques applications du principe de cor- respondance généralisé, par le C ^t Barré.. 201
O'2e	Sur une généralisation des théorèmes de Jamet, par M. R. Goormaghtigh..... 254
O'3gγ	Sur l'enveloppe d'une famille de lignes à deux paramètres, par M. Ch. Riquier..... 50
O'4f	Sur les lignes asymptotiques de certaines sur- faces gauches, par M. Ch. Bioche..... 260
O'4f	Asymptotiques non rectilignes d'une surface réglée et équation de Riccati correspondante, par M. Bertrand Gambier..... 321
O'5a	Sur la géométrie de la formule de Stokes, par M. A. Buhl..... 7
O'5a	Sur les volumes tournants, par M. A. Buhl.. 324 et 376
P'6e	Sur les transformations de contact, par M. E. Lainé..... 131, 177, 212 et 293

Mathématiques appliquées.

R1b	Sur les mouvements relatifs de trois plans qui glissent l'un sur l'autre, par M. F. Josse... 92
R1d	Sur la dérivée relative d'un vecteur; applica- tion au théorème de Coriolis, par M. J. Sudria..... 265
R2b	Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan, par M. J. Sudria..... 25
R7b	Sur une certaine loi de force comprenant comme cas particulier la loi de gravitation einsteinienne, par M. J. Haag..... 61
R7f	Étude d'un problème sur le pendule à longueur variable, par M. R. Thiry..... 335
R9a	Sur certains problèmes de frottement, par M. H. Bèghin..... 305
R9b	Choc en tenant compte du frottement, par M. J. Pérès..... 98

		Pages
R9b	Choc de deux solides avec frottement, par M. J. Pérès.....	216
R9b	Note sur le choc en tenant compte du frotte- ment, par MM. E. Delassus et J. Pérès....	383
T5	Capacités électriques et géométrie élémentaire par M. Janet.....	121

Questions d'examens et concours.

Certificats de Mathématiques générales.....	315 et	355
Certificats de Calcul différentiel et intégral.....		268
Certificats de Mécanique rationnelle.....	76, 157 et	391
Concours d'agrégation de 1922. Solution de la question de Mathématiques spéciales, par M. J. Lemaire.....	27 et	188
Concours d'agrégation de 1922. Solution d'une des questions de Mécanique, par M. R. Thiry.....		335
Concours d'agrégation de 1923. Solution de la question de Mathématiques élémentaires, par M. J. Dollon.....		107
Concours d'agrégation de 1923. Solution de la question de Calcul différentiel et intégral, par M. B. Gambier.....		144

Correspondance.

M. PHILBERT DU PLESSIS : A propos d'un article de M. Estève.		231
--	--	-----

Bibliographie.

G. VERRIEST : Cours de Mathématiques générales, première partie. — (J. P.).....		186
T. LEMOYNE : Les lieux géométriques en mathématiques spé- ciales. — (R. B.).....		187
M. D'OCAGNE : Notions sommaires de Géométrie projective. — (H. V.).....		231
STUYVAERT : Introduction à la méthodologie mathématique. — (J. P.).....		313

Questions proposées.

2460.....		74
2461, 2462, 2463.....		75
2464, 2465.....		200
2466, 2467, 2468.....		314
2469, 2470.....		315
2471, 2472, 2473.....		350
2474, 2475.....		351

Solutions de questions proposées.

	Pages.
2327, par M. <i>Philbert du Plessis</i>	351
2328, par M. <i>J. Lemaire</i>	352
2388, par l' <i>Auteur</i>	232
2408, par M. <i>R. Bouwaist</i>	279
2411, par <i>C. E. T.</i>	35
2419, par l' <i>Auteur</i>	37
2422, par M. <i>R. Marchay</i>	233
2423, par M. <i>G. Roy</i>	234
2434, par M. <i>Philbert du Plessis</i>	236
2436, par M. <i>F. Egan</i>	40
2442, par M. <i>F. Egan</i>	354
2448, par M. <i>Faucheux</i>	279
2457, par M. <i>J.-R. Bachiller</i>	240



TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME II, 5^e SÉRIE, 1923-24.)

- | | |
|---|--|
| N. ABRAMESCO, 166. | E. GOURSAT, 81. |
| J.-R. BACHILLER, 240. | J. HAAG, 61. |
| C ^t BARRÉ, 201. | M. JANET, 121. |
| H. BEGHIN, 305. | F. JOSSE, 92. |
| CH. BIOCHE, 260. | A. LABROUSSE, 200, 350, 351. |
| A. BLOCH, 283. - | E. LAINÉ, 131, 177, 212, 293. |
| E. BOREL, 1. | J. LEMAIRE, 27, 188, 352. |
| R. BOUVAIST, 279. | R. MARCHAY, 233. |
| R. BRICARD, 37, 41, 75, 187, 241,
315. | G. MÉTROD, 378. |
| A. BUHL, 7, 324, 376. | J.-A. MOREN, 75, 315. |
| C. E. T., 35. | B. NIEWENGLOWSKI, 75, 361. |
| G ^t CHAPEL, 73. | J. PAOLI, 47. |
| J. DARD, 314, 350. | J. PÉRÉS, 98, 186, 216, 313, 383. |
| ET. DELASSUS, 383. | PHILBERT DU PLESSIS, 231, 236,
351. |
| J. DOLLON, 107. | L. POMEY, 281. |
| M.-F. EGAN, 40, 354. | A. RABATEL, 161. |
| R. ESTÈVE, 350. | CH. RIQUIER, 50. |
| E. FABRY, 371. | J. SUDRIA, 25, 265. |
| M. FAUCHRUX, 279. | V. THÉBAULT, 314. |
| B. GAMBIER, 144, 321. | R. THIRY, 17, 335. |
| R. GOORMAUGHTIGH, 232, 254. | L. TITS, 351. |

BIBLIOTHÈQUE
MUSEUM
MILNERSTRAË