

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 268-279

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2_268_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Lignes asymptotiques, définition, équation différentielle, propriété caractéristique. Cas des surfaces réglées.*

II. *On donne un plan (P) et, dans ce plan, une droite $x'x$. Soit une surface (S), un point quelconque M pris sur (S) la normale en M, MI, limitée au point de rencontre I avec (P) et la perpendiculaire IH sur $x'x$.*

On demande de trouver les surfaces (S) pour lesquelles $MI = HI$.

On est conduit à une équation aux dérivées partielles de premier ordre.

Des considérations géométriques simples permettent d'avoir une intégrale complète. Pour l'obtenir par le calcul il sera commode de prendre une nouvelle fonction z' définie par

$$(1) \quad z' = x^2 + y^2 + z^2.$$

Caractéristiques et développables caractéristiques.

Intégrale générale. Y a-t-il une intégrale singulière?

Surface intégrale passant par la parabole

$$(2) \quad y = k, \quad z^2 - 2ux - v = 0$$

(k, u et v sont des constantes).

Surface intégrale inscrite dans la surface

$$(3) \quad 4y(x^2 + z^2) - 4z^2 - y = 0;$$

courbe de contact.

Nota : On prendra des axes rectangulaires, l'axe des y dans le plan (P).

SOLUTION DU PROBLÈME (par M. A. Sade). — L'équation aux

dérivées partielles des surfaces (S) est

$$(y + qz)^2 = (1 + p^2 + q^2)z^2,$$

et, en introduisant les dérivées partielles p' et q' de la nouvelle fonction z' , il vient

$$4z^2 + (p' - 2x)^2 + (q' - 2y)^2 = q'^2,$$

ou, enfin,

$$z' = p'x + q'y - \frac{p'^2}{4},$$

équation du type de Clairaut. Une intégrale complète est donc donnée par

$$z' = 2ax + 2by - a^2,$$

c'est-à-dire par les sphères (tangentes à $x'x$ et ayant leurs centres dans P)

$$(4) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = b^2,$$

ce qui était évident géométriquement.

L'intégrale générale est l'enveloppe des sphères (4) quand a et b sont liés par une relation arbitraire

$$(5) \quad b = \varphi(a),$$

on la définit donc en joignant aux équations précédentes

$$(6) \quad x + y \frac{d\varphi}{da} = a.$$

Les caractéristiques sont déterminées par (4) et (6). Ce sont les cercles de contact des cônes circonscrits aux sphères (4) et ayant leurs sommets sur $x'x$.

La parabole (2) appartient évidemment à l'un des cônes précédents qui constitue la surface intégrale demandée passant par la parabole. Un calcul aisé conduit à l'équation

$$(k^2 - u^2)y^2 + k^2z^2 - 2ukyx + k(y(u^2 - k^2 - v)) = 0.$$

Une sphère (4) touche la surface (3) au point xyz si

$$\frac{x - a}{2xy} = \frac{y - b}{\frac{z^2}{y}} = \frac{1}{2(y - 1)},$$

et l'élimination de α et β entre ces équations et l'équation (4) donne une relation qui, avec (3), définit la courbe de contact de (3) et de la surface intégrale inscrite. On trouve pour cette courbe, en plus de l'axe $x'x$ ⁽¹⁾,

$$y = \frac{1}{2}, \quad x^2 - z^2 = \frac{1}{4},$$

ou bien

$$y = \frac{3}{2}, \quad 3x^2 + z^2 = \frac{3}{4},$$

les surfaces intégrales correspondantes étant respectivement

$$\begin{aligned} x^2 y + (y^2 + z^2)(y - 1) &= 0, \\ x^2 y + (y^2 + z^2 - 2y)(y - 1) &= 0. \end{aligned}$$

(Nancy, octobre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Calculer la valeur de l'intégrale de variable complexe

$$\int_0^1 \frac{dz}{z - e^z},$$

pour un chemin d'intégration déterminé que l'on pourra choisir à volonté ne passant par aucun des pôles de la fonction placée sous le signe \int . Donner ensuite l'expression générale des diverses valeurs de cette intégrale qui correspondent à tous les chemins d'intégration.

II. Soit S la surface définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques

$$\begin{aligned} x &= u \cos v + \sin^2 v, \\ y &= u \sin v - \frac{1}{2} \sin 2v - v, \\ z &= \varphi(u, v). \end{aligned}$$

(1) A côté des surfaces dont les équations suivent, noter aussi $4x^2 y + (4y^2 + 4z^2 + y)(y - 1) = 0$ qui est osculatrice à (3) suivant $x'x$

On demande de trouver l'expression la plus générale de la fonction $\varphi(u, v)$ pour chacun des trois cas suivants :

1° Pour que les deux familles de courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ soient orthogonales sur la surface S .

2° Pour que ces deux familles de courbes soient conjuguées sur la surface S .

3° Pour que ces deux familles de courbes soient les lignes de courbure de S .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. La question est une application immédiate du théorème classique des résidus. Pour le calcul de la première détermination il est commode de prendre le chemin rectiligne en évitant le passage par le pôle réel L au moyen d'une demi-circonférence ayant ce point pour centre et limitée à l'axe réel; on trouve ainsi facilement le résultat en faisant tendre vers zéro le rayon de cette demi-circonférence.

II. La première condition conduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

La seconde conduit à

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial v} + (u - 2 \cos v) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = 0,$$

qui s'intègre facilement en prenant $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ comme inconnue intermédiaire.

Quant à la troisième condition, elle est formée par la réunion des deux premières; l'hypothèse $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ entraîne $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, ce qui donne le plan, solution n'ayant pas de sens et il reste les seules fonctions φ indépendantes de v qui, vérifiant les deux conditions, donnent la vraie solution.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Soit, en coordonnées rectangulaires, S la sphère ayant pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque M de cette sphère s'expriment paramétriquement par les formules

$$\begin{aligned} x &= R \sin 2\nu \cos u, & 0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}, \\ y &= R \sin 2\nu \sin u, & \\ z &= R(1 + \cos 2\nu), & -\pi \leq u < \pi \end{aligned}$$

(où ν est l'angle de OM avec Oz et u l'angle du plan zOM avec le plan zOx). Montrer que l'angle ω que fait OM avec Ox est donné par la formule

$$\cos \omega = \sin \nu \cos u.$$

Soit C la nappe du cône de révolution de sommet O (origine des coordonnées) dont les génératrices font avec la direction positive Ox un angle aigu donné α .

- 1° Calculer l'aire de la portion de S intérieure à C .
- 2° Calculer le volume intérieur à S et à C .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Soit m la projection de M sur le plan des xy . On obtient la formule par l'application de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique au trièdre OMm dans lequel on connaît deux faces u et $\frac{\pi}{2} - \nu$ ainsi que le dièdre compris $\frac{\pi}{2}$.

Les coordonnées u, ν sur la sphère étant orthogonales on a de suite l'élément de surface de la sphère

$$d\sigma = 2R^2 \sin 2\nu \, du \, d\nu,$$

et l'élément de volume, cône de sommet O et de base $d\sigma$,

$$dV = \frac{2R^3}{3} (1 + \cos 2\nu) \sin 2\nu \, du \, d\nu.$$

On a alors à calculer deux intégrales doubles étendues au domaine en u, ν défini par les inégalités de l'énoncé et l'inégalité

$$\sin \nu \cos u \geq \cos \alpha.$$

Si l'on pose

$$1 + \cos 2\nu = \omega,$$

(273)

on est ramené aux intégrales doubles très simples

$$-R^2 \int \int du d\omega, \quad -\frac{R^3}{3} \int \int \omega du d\omega,$$

ω variant de $2 \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 u} \right)$ à 0, puis u variant de $-\alpha$ à α .

On arrive ainsi aux deux intégrales simples

$$2R^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 u} \right) du, \quad \frac{2R^3}{3} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 u} \right)^2 du,$$

c'est-à-dire à un calcul classique d'intégrales de la forme $\int \cos^{-2p} u du$. (Bordeaux, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de cours. *Théorèmes généraux relatifs aux fonctions de variables complexes ;*

a.
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(z)}{z-a} dz;$$

b. *expression des dérivées successives :*

c. *Série de Taylor ; développement autour d'un zéro ou d'un pôle ; développement de Laurent.*

II. Problème : 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$p - q = e^z \sin(x - y).$$

2° *Déterminer la surface qui passe par la courbe*

$$(C) \quad \begin{cases} x = y, \\ e^z \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

3° *Pour cette dernière surface déterminer les rayons de courbure principaux en un point. Exprimer $R_1 + R_2$ et $R_1 - R_2$ en fonction des angles α, β, γ de la normale avec les axes.*

4° *Lignes de courbure de la surface.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° On trouve

$$\cos(x - y) - 2e^{-z} = f(x + y).$$

Ann. de Mathémat., 5° série, t. II. (Avril 1924.)

(274)

2° On trouve

$$z + L(\cos x \cos y) = 0.$$

3° et 4°

$$R_1 + R_2 = \frac{2}{\cos \gamma}, \quad R_1 - R_2 = \frac{2 \sin x \sin y}{\cos \gamma},$$
$$L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2} \right) = \pm L \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + Lk.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer

$$\int \int \int [(\sqrt{2}x + z)^2 - 45] dx dy dz,$$

à l'intérieur du volume

$$x^2 + y^2 - 10z < 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 75 < 0.$$

II. 1° Déterminer une courbe telle que le rayon de courbure R égale $4y^{\frac{5}{4}}$. Prendre celle des courbes pour laquelle le point de contact de la tangente parallèle à Oy est rejeté à l'infini.

2° Relation entre R et la portion de normale limitée à Ox .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. On trouve

$$I = -\frac{7\pi}{6} \times 5^{\frac{5}{4}}.$$

II. 1° On a

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{dy}{\sin \alpha d\alpha} = 4y^{\frac{5}{4}},$$

d'où

$$y = \frac{1}{\cos^4 \alpha} \quad x = 4 \operatorname{tang} \alpha + \frac{4}{3} \operatorname{tang}^3 \alpha.$$

2° On trouve

$$R = 4MN.$$

(Alger, novembre 1923.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad px + qy = f(v, z) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v = p^2 + q^2 \right).$$

1° Montrer que, sur chaque surface intégrale de (E), les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont situées dans des plans parallèles.

2° Déterminer la fonction $f(v, z)$ de manière que les courbes caractéristiques de (E) soient des lignes asymptotiques des surfaces intégrales. On trouvera pour (E) deux formes possibles : la première, (E₁) renfermera z sous une forme simple ; pour la seconde, (E₂), on trouvera

$$f(v, z) = V(v) \varphi(z),$$

où $V(v)$ est une fonction bien déterminée de v , et $\varphi(z)$, une fonction arbitraire de z .

3° Indiquer une intégrale complète de (E₁) ; faire connaître une propriété géométrique des cônes circonscrits aux surfaces intégrales de (E₁) et ayant leurs sommets sur Oz.

4° Choisir $\varphi(z)$ de manière que l'équation (E₂) correspondante possède une infinité de surfaces intégrales (S) dépendant d'un paramètre arbitraire et qui soient, toutes, hélicoïdes, d'axe Oz et de même pas.

5° Calculer la courbure totale de (S) en un point M situé à une distance r de Oz.

II. Quelle relation faut-il établir entre les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ de l'équation différentielle linéaire

$$(A) \quad y'' + py' + qy = 0,$$

pour que (A) possède deux intégrales y_1 et y_2 satisfaisant à la relation $y_2 = xy_1$?

Application. — On donne $p(x) = \frac{1}{x} - 2$; déterminer $q(x)$ de manière que (A) possède la propriété précédente et intégrer ensuite l'équation

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2\right)y' + q(x)y = \sqrt{x}$$

[où $q(x)$ aura la valeur particulière qu'on aura obtenue.]

INDICATIONS SUR LA SOLUTION — I. 1° Les courbes conjuguées des courbes caractéristiques sont définies par $p \delta x + q \delta y$: elles sont dans les plans $z = \text{const.}$

2° On trouve pour déterminer $f(v, z)$ la condition

$$(1 - f'_z)(f - 2vf'_v) = 0,$$

On obtient (E_1) en prenant

$$f \equiv z + \psi(p^2 + q^2),$$

et (E_2) en prenant

$$f \equiv \sqrt{v} \varphi(z).$$

3° $z = ax + by + \psi(a^2 + b^2)$ (résultat classique). Les cônes sont de révolution autour de Oz (dans l'hypothèse où ψ ne se réduit pas à une constante).

4° On exprime que les équations différentielles des caractéristiques de (E_2) admettent l'intégrale première

$$(1) \quad -py + qx = h.$$

On trouve $h\varphi' = 0$ ou $\varphi(z) \equiv k$, en écartant le cas des surfaces de révolution : $k = 0$, $\varphi(z)$ quelconque. [Le cas est banal; quelle que soit la fonction φ , (E_2) possède les intégrales $z = \text{const.}$ et $\sqrt{x^2 + y^2} = \varphi(z)$, de révolution autour de Oz .] Pour $\varphi(z) = k$, les équations finies des multiplicités caractéristiques de (E_2) sont

$$(2) \quad \begin{cases} x = h \cos \alpha + \beta t \sin \alpha, & p = t^{-1} \cos \alpha, \\ y = k \sin \alpha + \beta t \cos \alpha, & q = t^{-1} \sin \alpha, \\ z = \gamma \end{cases}$$

(α, β, γ , constantes arbitraires; t , paramètre variable). Pour les grouper de manière qu'elles appartiennent à une même surface S , il faut prendre $d\gamma = \beta d\alpha$; et, si l'on veut que S soit une intégrale de (1), on doit faire $\beta = h$, d'où $\gamma = h\alpha + \text{const.}$, équation qui jointe à (2) représente la famille de surfaces demandées, chacune d'elles étant rapportée aux deux paramètres t et α .

$$\begin{aligned} 5^\circ \quad \frac{1}{R_1 R_2} &= \frac{D(p, q)}{D(x, y)} \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + p^2 + q^2)^2} \frac{D(p, q)}{D(t, \alpha)} \cdot \frac{D(x, y)}{D(t, \alpha)} \\ &= \frac{-h^2}{(r^2 + h^2 - k^2)^2}. \end{aligned}$$

N. B. — L'équation (E₂) est de la forme $\frac{q}{p} = \Phi(x, y, z)$; les courbes caractéristiques sont des droites, parallèles au plan des xy et dépendant de deux paramètres arbitraires.

II. On trouve

$$2p' + p^2 - 4q = 0 \quad \text{avec} \quad y_1 = e^{-\int \frac{p}{2} dx}$$

Application :

$$q = -\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} + 1; \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}} [x + \gamma + (\Lambda x + B) e^x].$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_1^{-1} \frac{\text{Log } z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} dz,$$

prise successivement le long des quatre chemins indiqués ci-contre. (La figure montre ces chemins C₁, C₂, C₃, C₄ traversant respectivement l'axe imaginaire au-dessus du point i , entre i et 0 , entre 0 et i , au-dessous de $-i$).

La détermination initiale de $\text{Log } z$ est 0 , celle de $(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ est $\gamma\sqrt{2}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'intégrale indéfinie est

$$\frac{z \text{Log } z}{\sqrt{1+z^2}} - L(z + \sqrt{1+z^2}).$$

En étudiant la variation de cette fonction le long de chacun des quatre chemins on trouvera les valeurs correspondantes de l'intégrale

$$\begin{aligned} \pi i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right); & \quad \gamma \log(\sqrt{2}-1) - \frac{\pi i}{\sqrt{2}}; \\ 2 \log(\sqrt{2}-1) + \frac{\pi i}{\sqrt{2}}; & \quad -\pi i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right). \end{aligned}$$

(Poitiers, juin 1923.)

(278)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une surface S est représentée par les équations paramétriques

$$x = u \left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} \right),$$

$$y = v \left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} \right),$$

$$z = 2uv.$$

1° Montrer que les courbes $u = c$ et $v = c'$ sont orthogonales et que ce sont les lignes asymptotiques de la surface.

2° Déterminer les lignes de courbure. Montrer qu'elles sont planes et trouver l'enveloppe de leurs plans.

3° Déterminer les rayons de courbure principaux et les centres de courbure principaux en un point de la surface.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION — Les lignes de courbure sont

$$u + v = \lambda, \quad u - v = \mu :$$

les rayons de courbures principaux étant

$$- R_1 = + R_2 = \frac{\left[3(u^2 + v^2) + \frac{1}{3} \right]^2}{}.$$

On trouve pour plans des lignes de courbure

$$x + y - 3\lambda z + \lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda = 0,$$

$$x - y + 3\mu z + \mu^3 + \frac{1}{3}\mu = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Intégrer l'équation différentielle

$$2yy' - x(1 + y'^2) = y' - y'^2 + \frac{y'^4}{3}.$$

Déterminer une courbe intégrale qui passe par le point

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}.$$

(279)

INDICATIONS.— On trouve

$$x = t(t + C), \quad y = (t + C) \frac{1+t}{2} + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6},$$

et l'on vérifiera la condition imposée pour C égal à 0 ou $\pm\sqrt{3}$.
(Marseille, juin 1922).