

E. LAINÉ

Sur les transformations de contact

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2
(1923), p. 293-304

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2__293_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[P'6e]

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

(Fin) (1);

PAR E. LAINÉ.

II. — Équations aux dérivées partielles et transformations de contact de l'espace à trois dimensions.

12. La théorie que nous venons d'exposer en détail dans le cas du plan s'étend d'elle-même à l'espace à trois dimensions.

On appelle élément linéaire (x, y, z, p, q) l'ensemble d'un point (x, y, z) et d'un plan

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

passant par ce point.

Lorsque x, y, z, p et q sont des fonctions d'un paramètre variable telles que l'on ait

$$(28) \quad dz - p dx - q dy = 0,$$

les ∞^1 éléments correspondant aux différentes valeurs du paramètre forment une multiplicité m_1 ; l'ensemble des points appartenant à cette multiplicité en est le support ponctuel.

Lorsque x, y, z, p et q sont des fonctions de deux paramètres indépendants vérifiant la même équation (28), les ∞^2 éléments correspondant aux diffé-

(1) Cf. *N. A.*, janvier, février et mars 1924.

rentes valeurs des paramètres forment une multiplicité m_2 ; l'ensemble des points appartenant à cette multiplicité en est le support ponctuel.

Suivant que le support ponctuel est un point, une courbe, ou une surface, on affecte la lettre m d'un indice supérieur égal à 0, 1 ou 2. Par exemple :

Une m_1^0 est l'ensemble d'un point et des plans tangents à un cône ayant son sommet en ce point;

Une m_2^1 est l'ensemble des points d'une courbe, à chacun desquels sont associés tous les plans passant par la tangente à la courbe en ce point;

Enfin une m_2^2 est l'ensemble des points et des plans tangents d'une surface, chaque plan tangent étant associé à son point de contact.

L'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

définit ∞^3 éléments. On peut la considérer aussi comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre; intégrer cette équation revient alors à associer de toutes les manières possibles les ∞^3 éléments qu'elle définit de façon à obtenir des m_2 . Les m_2^2 donneront les intégrales considérées habituellement : les m_2^1 et m_2^0 , les intégrales au sens de Lie (n° 3).

Soient

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = X(x, y, z, p, q), \\ Y = Y(x, y, z, p, q), \\ Z = Z(x, y, z, p, q), \\ P = P(x, y, z, p, q), \\ Q = Q(x, y, z, p, q) \end{array} \right.$$

des équations qui établissent une correspondance entre les éléments des espaces (x, y, z) et (X, Y, Z) . On dit que ces équations définissent une transformation de

contact (T. C.) quand il existe une fonction non nulle $\rho(x, y, z, p, q)$ telle que l'on ait identiquement

$$(30) \quad dZ - P dX - Q dY = \rho(dz - p dx - q dy).$$

Alors à toute m_1 ou m_2 les équations (29) font correspondre une M_1 ou une M_2 , et inversement. A deux m ayant un élément commun, elles font correspondre deux M ayant aussi un élément commun.

De cette définition on déduit, comme dans le cas du plan, les propriétés des T. C. de l'espace, et des fonctions X, Y, Z, P, Q et ρ qui les caractérisent. Nous ne reviendrons pas sur ce point.

La méthode déduite de la théorie des T. C. pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre est aussi une extension directe de la méthode exposée aux n^{os} 6 et 7; nous nous contenterons de l'indiquer rapidement.

13. A toute équation du premier ordre

$$f(x, y, z, p, q) = 0;$$

les équations (29) font correspondre une autre équation

$$F(X, Y, Z, P, Q) = 0,$$

la T. C. (29) conduit d'une intégrale de l'une à une intégrale de l'autre; en particulier, si les équations considérées ont une intégrale singulière, ces deux intégrales se correspondront.

Proposons-nous d'intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(31) \quad Z(x, y, z, p, q) = 0.$$

Il résulte de la théorie des T. C. que Z étant donné arbitrairement, on peut, d'une infinité de façons, lui

adjoindre quatre autres fonctions $X(x, y, z, p, q)$, Y , P et Q telles que les équations (29) définissent une T. C. Cette T. C. ramène alors l'équation (31) à la forme

$$Z = 0.$$

Or, on a immédiatement les M_2 satisfaisant à cette dernière équation; ce sont :

1° Les M_2^0 obtenues en posant

$$Z = 0, \quad X = a, \quad Y = b,$$

a et b désignant des constantes arbitraires; il leur correspond, pour l'équation (31), l'intégrale complète obtenue en éliminant p et q entre les équations

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, p, q) = 0, \quad X(x, y, z, p, q) = a, \\ Y(x, y, z, p, q) = b. \end{aligned}$$

2° Les M_2^1 obtenues en posant

$$Z = 0, \quad \varphi(X, Y) = 0, \quad P \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0,$$

φ désignant une fonction arbitraire; en éliminant p et q entre les trois équations

$$\begin{aligned} Z(x, y, z, p, q) = 0, \\ \varphi[X(x, y, z, p, q), Y(x, y, z, p, q)] = 0, \\ P \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - Q \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0, \end{aligned}$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation (31).

3° Enfin la M_2^2 obtenue en posant

$$Z = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0;$$

il lui correspond, si elle existe, l'intégrale singulière de (31).

14. Nous n'insisterons pas davantage sur ce pro-

blème, renvoyant, pour plus de détails, aux « Leçons » de M. Goursat. Nous signalerons pourtant une différence essentielle entre les deux domaines, plan et espace à trois dimensions, relativement à la théorie des T. C.

Comme nous l'avons vu plus haut (nos 8 et 9), ce n'est qu'à partir du troisième ordre qu'il existe des équations différentielles telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre par une T. C. prolongée. Dans l'espace à trois dimensions, cette circonstance se présente dès le second ordre, et ce sont seulement les équations aux dérivées partielles du premier ordre qui n'ont pas d'invariant pour le groupe des transformations de contact.

Il est facile d'en donner un exemple simple. Prolongeons jusqu'au second ordre la T. C. définie par les équations (29). En désignant par r, s, t, R, S, T , les dérivées partielles du second ordre, on trouve pour R une expression de la forme

$$R = \frac{Ar + 2Bs + Ct + D + E(rt - s^2)}{A_1r + 2B_1s + C_1t + D_1 + E_1(rt - s^2)}.$$

Il en résulte que les seules équations que l'on puisse ramener, par une T. C., à la forme

$$R = 0,$$

sont du type de Monge-Ampère; encore ne forment-elles, parmi les équations de Monge-Ampère, qu'une classe très particulière.

15. Nous étendrons, en terminant, à l'espace à trois dimensions, la proposition démontrée au n° 11. Supposons qu'il existe, dans cet espace, une transformation

qui conserve les contacts du second ordre et change une multiplicité d'éléments (x, y, z, p, q, r, s, t) satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} dz - p dx - q dy = 0, \quad dp - r dx - s dy = 0, \\ dq - s dx - t dy = 0, \end{aligned}$$

en une multiplicité d'éléments (X, Y, Z, P, Q, R, S, T) vérifiant les équations analogues

$$\begin{aligned} dZ - P dX - Q dY = 0, \quad dP - R dX - S dY = 0, \\ dQ - S dX - T dY = 0; \end{aligned}$$

il y a là une généralisation de la notion de multiplicité identique à celle que nous avons faite dans le plan (n° 10), et l'on voit, comme au n° 11, le parti que l'on pourrait tirer d'une transformation de [ce genre pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Cette transformation sera définie par un système de huit fonctions distinctes X, Y, Z, \dots, T , des variables indépendantes x, y, z, \dots, t , telles que l'on ait identiquement

$$(32) \left\{ \begin{aligned} dZ - P dX - Q dY &= \lambda_1(dz - p dx - q dy) \\ &+ \lambda_2(dp - r dx - s dy) \\ &+ \lambda_3(dq - s dx - t dy), \\ dP - R dX - S dY &= \mu_1(dz - p dx - q dy) \\ &+ \mu_2(dp - r dx - s dy) \\ &+ \mu_3(dq - s dx - t dy), \\ dQ - S dX - T dY &= \nu_1(dz - p dx - q dy) \\ &+ \nu_2(dp - r dx - s dy) \\ &+ \nu_3(dq - s dx - t dy), \end{aligned} \right.$$

les trois coefficients λ n'étant pas tous nuls, non plus que les trois coefficients μ , ni les trois coefficients ν .

Nous allons montrer que les équations

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z, p, q, r, s, t), & Y &= Y(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ &\dots & T &= T(x, y, z, p, q, r, s, t) \end{aligned}$$

définissent nécessairement une T. C. prolongée, c'est-à-dire que les fonctions X, Y, Z, P et Q sont nécessairement indépendantes de r, s, t .

Les équations (32) montrent qu'il existe trois relations de la forme

$$\begin{aligned} Z &= F_1(X, Y, x, y, z, p, q), & P &= F_2(X, Y, x, y, z, p, q), \\ & & Q &= F_3(X, Y, x, y, z, p, q). \end{aligned}$$

Si les déterminants du second ordre déduits du tableau

$$\begin{vmatrix} X_r & X_s & X_t \\ Y_r & Y_s & Y_t \end{vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls, il n'existe pas entre X et Y de relation indépendante de r, s, t . On peut alors prendre X et Y comme variables indépendantes à la place de l'un des couples (r, s) ou (s, t) . Supposons par exemple

$$\frac{D(X, Y)}{D(r, s)} \neq 0;$$

nous prendrons comme variables indépendantes x, y, z, p, q, X, Y, t . On tire alors de la première équation (32)

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + p \frac{\partial F_1}{\partial z} + r \frac{\partial F_1}{\partial p} + s \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} + q \frac{\partial F_1}{\partial z} + s \frac{\partial F_1}{\partial p} + t \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0, \\ F_2 = \frac{\partial F_1}{\partial X}, & F_3 = \frac{\partial F_1}{\partial Y}, \end{cases}$$

et de la seconde,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + p \frac{\partial F_2}{\partial z} + r \frac{\partial F_2}{\partial p} + s \frac{\partial F_2}{\partial q} = 0,$$

ou, en vertu de la troisième équation (33),

$$(34) \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial x} + p \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial z} + r \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial p} + s \frac{\partial^2 F_1}{\partial X \partial q} = 0.$$

En dérivant par rapport à X la première équation (33), où r et s sont certaines fonctions des variables indépendantes, on a, après comparaison avec (34),

$$\frac{\partial r}{\partial X} \frac{\partial F_1}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial X} \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0.$$

En utilisant la seconde équation (33), on aurait de même

$$\frac{\partial r}{\partial Y} \frac{\partial F_1}{\partial p} + \frac{\partial s}{\partial Y} \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0.$$

Puisque l'on a, par hypothèse,

$$\frac{D(X, Y)}{D(r, s)} \neq 0,$$

on en déduit

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial q} = 0,$$

et les équations (33) donnent alors

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0.$$

Les fonctions X , Y et Z ne seraient donc pas distinctes.

Il nous reste à examiner le cas où il existe entre X et Y une seule relation indépendante de r , s , t . Il est inutile en effet de s'arrêter à l'hypothèse où il existerait deux telles relations, car on voit immédiatement que la transformation considérée est alors une T. C. prolongée.

Nous démontrerons d'abord un lemme.

16. LEMME. — Si, entre six fonctions X, Y, Z, P, Q et ρ des variables indépendantes x, y, z, p, q, r, s, t il existe une relation de la forme

$$(35) \quad dZ - P dX - Q dY = \rho(dz - p dx - q dy),$$

ces six fonctions sont nécessairement indépendantes de r, s, t , pourvu que ρ ne soit pas nul identiquement (1).

En effet, l'équation (35) montre qu'il y a, entre les variables x, y, z, X, Y et Z , au moins une relation indépendante de p, q, r, s, t ; il ne peut d'ailleurs en exister plus de trois.

Supposons d'abord qu'il en existe trois; X, Y et Z seront alors des fonctions des seules variables x, y et z , et en identifiant les deux membres de (35), on aura, pour déterminer P, Q et ρ , les trois équations

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} - Q \frac{\partial Y}{\partial x} - \rho p = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} - Q \frac{\partial Y}{\partial y} + \rho q = 0,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - P \frac{\partial X}{\partial z} - Q \frac{\partial Y}{\partial z} - \rho = 0.$$

Or, p et q sont des variables indépendantes; il en résulte que, si $\rho \neq 0$, ces trois équations sont distinctes; elles déterminent donc P, Q et ρ en fonction de x, y, z, p , et q .

Supposons en second lieu qu'il n'existe qu'une relation de la forme

$$Z = \varphi(X, Y, x, y, z);$$

(1) GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 305.

l'équation (35) doit être identique à

$$dZ - d\varphi = 0,$$

ce qui exige

$$P = \frac{\partial\varphi}{\partial X}, \quad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial Y}, \quad \rho = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0, \quad -\rho P = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$-\rho Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

et par suite

$$\frac{\partial z}{\partial x} + P \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + Q \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

Ces deux dernières équations peuvent être résolues par rapport à X et Y ; sinon, comme elles sont distinctes, puisque $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \neq 0$, on en tirerait une relation entre les variables indépendantes. On aura donc bien λ , Y , et par suite Z , P , Q et ρ en fonction de x , y , z , p et q .

Supposons enfin qu'il existe, entre x , y , z , X , Y et Z , deux relations; on peut toujours les mettre sous la forme

$$Z = \varphi_1(X, x, y, z), \quad Y = \varphi_2(X, x, y, z).$$

Si X n'est fonction d'aucune des variables r , s , t , on a, par exemple, $\frac{\partial X}{\partial p} \neq 0$. Prenons comme nouvelles variables indépendantes x , y , z , X , q , r , s , t . L'équation (35) donne alors, par identification,

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial X} - P - Q \frac{\partial Y}{\partial X} = 0, \\ \frac{\partial Z}{\partial z} - Q \frac{\partial Y}{\partial z} = \rho, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - Q \frac{\partial Y}{\partial x} = -\rho P, \\ \frac{\partial Z}{\partial y} - Q \frac{\partial Y}{\partial y} = -\rho Q; \end{array} \right.$$

on en tire

$$Q \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + q \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial z};$$

comme on ne peut avoir à la fois

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,$$

puisque ρ n'est pas nul, on voit que Q , et par suite P et ρ , s'expriment en fonction de X , x , y , z et q , de sorte qu'en définitive X , Y , Z , P , Q et ρ sont indépendantes de r , s , t .

Si X était fonction de l'une des variables r , s , t , on prendrait comme variables indépendantes x , y , z , ρ , q , X et deux des variables r , s , t . On aurait encore les équations (36), d'où l'on tirerait

$$Q \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + p \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\partial Z}{\partial x} + p \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$Q \left(\frac{\partial Y}{\partial y} + q \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = \frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial z};$$

ces équations ne pourraient être compatibles que si l'on avait

$$Q = \frac{Z_y}{Y_y} = \frac{Z_z}{Y_z} = \frac{Z_x}{Y_x},$$

et par suite

$$\rho = 0.$$

17. Le lemme démontré, revenons à l'hypothèse signalée à la fin du n° 15, d'après laquelle il existerait, entre X et Y , une seule relation indépendante de r , s , t ; nous la supposerons, pour fixer les idées, résolue par rapport à Y , de sorte qu'on aura

$$Y = \varphi(X, x, y, z, p, q),$$

$$Z = \theta_1(X, x, y, z, p, q),$$

$$P = \theta_2(X, x, y, z, p, q),$$

$$Q = \theta_3(X, x, y, z, p, q).$$

Si X ne dépend d'aucune des variables r ou t , il en est de même de Y, Z, P, Q . La première équation (32) montre alors que λ_2 et λ_3 sont nécessairement nuls et, d'après le lemme, X, Y, Z, P et Q sont indépendants de r, s, t .

Supposons que X dépende, par exemple, de r . Prenons pour variables indépendantes x, y, z, p, q, X, s, t . La première équation (32) donne, par identification

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial X} - \theta_2 - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial r} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\lambda_1 p - \lambda_2 r - \lambda_3 s,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda_1 q - \lambda_2 s - \lambda_3 t,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda_1,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial p} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \lambda_2,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial q} - \theta_3 \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \lambda_3.$$

Les trois dernières équations montrent que λ_1, λ_2 et λ_3 ne dépendent ni de s , ni de t , et la troisième équation montre alors que $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Le lemme s'applique encore, et l'on est conduit à une contradiction.

En résumé, dans l'espace à trois dimensions comme dans le plan, toute transformation qui conserve les contacts du second ordre est une T. C. prolongée. Il est donc impossible de généraliser, dans cette direction, la théorie des T. C. en vue de son application à l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.