

## Solutions de questions proposées

*Nouvelles annales de mathématiques 5<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1923), p. 35-40

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1923\\_5\\_2\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2_35_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.**


---

**2411.**

( 1919, p. 278, 1922, p. 40.)

*Une horloge porte une aiguille des heures, une aiguille des minutes et une aiguille des secondes montées sur le même pivot. Ces trois aiguilles ne peuvent être en coïncidence qu'à midi, comme on le reconnaît facilement. A quelle heure, non infiniment voisine de midi, sont-elles contenues dans un angle aussi petit que possible ?*

R. B.

**SOLUTION**

Par M. C. E. T.

Je représenterai les trois aiguilles par leurs points de rencontre H, M, S avec la circonférence du cadran.

H parcourt la circonférence du cadran, de longueur  $2\pi$ , en 12 heures: sa vitesse est  $\frac{2\pi}{12}$ , en prenant l'heure pour unité de temps.

M fait un tour par heure; sa vitesse est  $2\pi$ .

S fait un tour par minute, sa vitesse est  $2\pi \cdot 60$ .

Les points H et M sont confondus au temps zéro; leurs points de coïncidence sont aux abscisses  $\alpha$  telles que

$$\frac{\alpha}{\frac{2\pi}{12}} = \frac{2k\pi + \alpha}{2\pi}, \quad \alpha = \frac{2k\pi}{11},$$

qui correspondent aux temps  $\frac{12k}{11}$ .

J'appellerai  $A_k$  le point d'abscisse  $\frac{2k\pi}{11}$ .

Les points H et S sont confondus au temps zéro ; leurs points de coïncidence sont aux abscisses  $\beta$  telles que

$$\frac{\beta}{\frac{2\pi}{12}} = \frac{2k\pi + \beta}{2\pi \cdot 60}, \quad \beta = \frac{2k\pi}{719},$$

qui correspondent aux temps  $\frac{12k}{719}$ .

Il est d'abord bien évident que les positions cherchées doivent être dans le voisinage des points  $A_k$ , puisque H et M doivent être voisins.

D'autre part, S doit être entre H et M ; en effet, si S est en dehors de l'arc HM, en faisant varier le temps, dans le sens où HM diminue, d'une quantité inférieure à une minute environ, S vient sur l'arc HM, dont la longueur est devenue moindre ; par conséquent les trois points sont situés sur un arc plus petit que l'arc qui les contenait auparavant.

On voit ainsi qu'on est ramené à trouver les arcs HM aussi petits que possible et S compris entre H et M.

Ceci posé, je vais déterminer les positions de S correspondant aux points de coïncidence  $A_k$  et je ramènerai E, par une variation du temps aussi petite que possible, sur l'arc HM. Le problème posé sera ainsi résolu.

Au temps  $\frac{12k}{11} = k \left[ 65^m + \frac{5}{11} \right]$ , H et M sont en  $A_k$  et S est au point dont l'abscisse correspond au temps  $k \frac{5}{11}$  minutes ou  $\frac{k}{12 \cdot 11}$  heures. La vitesse de S étant égale à  $2\pi \cdot 60$ , cette abscisse est  $2k\pi \frac{5}{11}$ .

Ainsi lorsque H et M sont en  $A_3$ , S est en  $A_4$ , et lorsque H et M sont en  $A_8$ , S est en  $A_7$ . Pour les autres valeurs de  $k$ , les points sont moins rapprochés ; ces positions ne peuvent donc être considérées.

J'examine d'abord le premier cas ; pour ramener S sur l'arc HM, je dois ramener les aiguilles en arrière ; dans ce mouvement M et S encadrent H et leur intervalle diminue jusqu'au moment où S coïncide avec H ; alors c'est l'intervalle HM qui contient S et il augmente. Le moment cherché est donc la coïncidence HS qui précède immédiatement  $A_3$ .

( 37 )

Elle est déterminée par l'inégalité

$$k \frac{12}{719} < 3 \frac{12}{11}, \quad \text{d'où} \quad k = 196.$$

La distance HM est alors égale à

$$\frac{2\pi}{12} 196 \frac{12}{719} - 2\pi \cdot 196 \frac{12}{719} + 6\pi = \frac{2\pi}{719}$$

et l'heure est

$$3^h 16^m 16^s + \frac{256^s}{719}.$$

Par un raisonnement analogue, le deuxième cas conduit à la solution suivante :

H et S sont en coïncidence au temps

$$523 \frac{12}{719} = 8^h 43^m 43^s \frac{463^s}{719}$$

et M est à la distance  $\frac{2\pi}{719}$

Autres solutions par l'AUTEUR et par MM. AUBRY, EGAN, A. MARCEL.

#### 2419.

(1919, p. 279; 1922, 79)

Soit ABA'B' un quadrilatère circonscrit à une conique de foyers F et F'. On considère les deux groupes de quatre triangles :

$$\begin{array}{l} \text{FAB, FA'B', F'AB', F'A'B;} \\ \text{FAB', FA'B, F'AB, F'A'B'.} \end{array}$$

Démontrer que :

1° Les cercles circonscrits aux triangles de ces deux groupes passent respectivement par des points C et C', qui sont les deux foyers d'une nouvelle conique inscrite au quadrilatère;

2° Les orthocentres des triangles de ces deux groupes

sont respectivement sur des droites  $D$  et  $D'$ , toutes deux perpendiculaires à la droite, lieu des centres des coniques inscrites dans le quadrilatère. R. B.

## SOLUTION

Par l'AUTEUR.

Ces propositions peuvent être rattachées, d'une part, à la théorie des *cubiques focales* (cubiques circulaires contenant leur foyer singulier), d'autre part, à l'étude du système de quatre positions quelconques d'une figure de grandeur invariable mobile dans son plan. En voici des démonstrations élémentaires et directes.

Je désignerai par  $(AB)$  l'*orientation* d'une droite quelconque  $AB$ , c'est-à-dire l'angle, défini à  $\pi$  près, dont il faut faire tourner un axe fixe pour l'amener sur cette droite. Les égalités entre orientations de droites sont valables à  $\pi$  près. On a  $(AB) = (BA)$ .

On reconnaît aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points  $A, B, C, D$  soient sur un cercle est  $(AB) + (CD) = (AC) + (BD)$  [ou bien  $= (AD) + (BC)$ ].

Les théorèmes de Poncelet appliqués à la figure  $AA'BB'FF'$  de l'énoncé donnent l'égalité

$$(AF) + (AF') = (AB) + (AB')$$

et toutes celles qu'on tire de la précédente en permutant, soit les points  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ ,  $F$  et  $F'$ , soit les couples  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(F, F')$  entre eux.

Soit alors  $M$  le second point commun aux cercles  $FAB, FA'B'$ . On a

$$(MA) + (FB) = (FM) + (AB),$$

$$(MB') + (FA') = (FM) + (A'B'),$$

d'où

$$\begin{aligned} (MA) - (MB') &= (AB) - (FB) + (FA') - (A'B') \\ &= (BF') - (BA') + (A'B) - (A'F') \\ &= (F'B) - (F'A') \\ &= (F'A) - (F'B'), \end{aligned}$$

d'où enfin

$$(MA) + (F'B') = (MB') + (F'A).$$

Ce qui montre bien que le point M appartient au cercle F'AB'. On établit de même les résultats analogues.

On a d'ailleurs, en remplaçant A par A' et B par B' dans la dernière relation écrite,

$$(MA') + (F'B) = (MB) + (F'A'),$$

d'où par addition, et en tenant compte de ce que F' est le foyer d'une conique inscrite à ABA'B',

$$(MA) + (MA') = (MB') + (MB).$$

Le point M est donc bien le foyer d'une conique analogue.

Passons à la démonstration de la seconde partie. Soient H et H' les orthocentres des triangles FAB, FA'B',  $\alpha$ ,  $\beta$  et I les milieux respectifs de AA', BB' et AB'.

FH est perpendiculaire à AB, c'est-à-dire à I $\gamma$ ; FH' est perpendiculaire à B'A', c'est-à-dire à I $\alpha$ . L'angle  $\widehat{HFH'}$  est donc égal à  $\widehat{\beta I \alpha}$  ou à son supplémentaire. C'est la première égalité qui est vraie. On reconnaît en effet que les angles droits dont il faut faire tourner AB pour l'amener sur FH et B'A' pour l'amener sur FH' sont égaux *en signe*, à cause de l'égalité des angles (FA, FB) et (FB', FA').

D'autre part, la longueur de FH est le double de la distance à AB du centre du cercle FAB, On a donc

$$FH = AB \cot \widehat{AFB}$$

et de même

$$FH' = B'A' \cot \widehat{B'FA'},$$

d'où

$$\frac{FH}{FH'} = \frac{AB}{B'A'} = \frac{I\beta}{I\alpha}.$$

Les deux triangles FHH', I $\beta\alpha$  sont donc semblables, et il en résulte immédiatement que HH' est perpendiculaire à  $\alpha\beta$ , qui n'est autre que la droite, lieu des centres des coniques inscrites dans ABA'B'. Cela suffit à établir la seconde partie.

2436.

(1920, p. 120; 1922, p. 120.)

*Deux points décrivent avec des vitesses uniformes deux cercles concentriques. Démontrer que la droite qui les joint reste normale à une épicycloïde ou à une hypocycloïde, en général allongée ou raccourcie.*

*Dans le cas où les deux points ont des vitesses angulaires opposées, on obtient une propriété connue de l'ellipse.*

L. MALOUE.

## SOLUTION

Par M. M.-F. EGAN.

Si un cercle de centre  $O'$  et de rayon  $\alpha : n$  roule sur un cercle fixe de centre  $O$  et de rayon  $\alpha$ , un point  $C$  lié au cercle mobile décrit une trochoïdale d'indice  $n$ . La normale en  $C$  passe par le point de contact  $A$  des deux cercles.

Menons  $OB$  parallèle à  $O'C$ , rencontrant  $CA$  au point  $B$ .  
On a

$$OB : OA = O'C : O'A,$$

donc  $B$  décrit un cercle de centre  $O$ . Si la vitesse angulaire de  $OA$  est  $\alpha$ , celle de  $O'C$  (donc aussi celle de  $OB$ ) sera visiblement  $\beta = (n + 1)\alpha$ .

Inversement, étant donnés deux vecteurs  $OA$ ,  $OB$  tournant autour de  $O$  avec les vitesses angulaires  $\alpha$ ,  $\beta$ ;  $AB$  est la normale en un point  $C$  à une trochoïdale d'indice  $n = (\beta - \alpha) : \alpha$ . Pour avoir le point  $C$ , on prend  $O'$  sur  $OA$  tel que

$$OO' : OA = \beta : (\beta - \alpha),$$

et l'on mène  $O'C$  parallèle à  $OB$ .

Lorsque  $\beta = -\alpha$ ,  $C$  est le milieu de  $AB$ , et la trochoïdale ( $C$ ) est une ellipse ( $n = -2$ ).

La courbe ( $C$ ) sera une cycloïdale quelle que soit la valeur de  $\alpha : \beta$  si  $O'C = O'A$ , c'est-à-dire si  $OA = OB$ .

Autre solution par M. FAUCHEUX.

