

J. PAOLI

La limite de $(1 + \frac{x}{m})^m$ établie par un procédé de démonstration élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 5^e série, tome 2 (1923), p. 47-50

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1923_5_2_47_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D1a]

LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ ÉTABLIE PAR UN PROCÉDÉ
DE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

PAR J. PAOLI,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée d'Alger.

Je rappelle l'inégalité connue, bien facile à établir
d'ailleurs,

(1) • $(1 - \alpha)^n > 1 - n\alpha,$

dans laquelle α désigne un nombre relatif plus petit que 1, et n un nombre naturel.

Soient x un nombre relatif donné, et m un nombre naturel variable assujéti à la condition $m + x > 0$.

La fonction $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ du nombre naturel m est croissante et a une limite quand m augmente infiniment.

Démontrons d'abord qu'elle est croissante.

Il s'agit d'établir l'inégalité

$$\left(1 + \frac{x}{m+1}\right)^{m+1} > \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m,$$

ou

$$\left(\frac{m+1+x}{m+1}\right)^{m+1} > \left(\frac{m+x}{m}\right)^m,$$

laquelle, après avoir multiplié ses deux membres par le nombre positif $\left(\frac{m}{m+x}\right)^{m+1}$, s'écrit

$$\left(\frac{m(m+1+x)}{(m+1)(m+x)}\right)^{m+1} > \frac{m}{m+x},$$

ou encore

$$\left(\frac{(m+1)(m+x) - x}{(m+1)(m+x)}\right)^{m+1} > 1 - \frac{x}{m+x},$$

puis enfin

$$\left(1 - \frac{x}{(m+1)(m+x)}\right)^{m+1} > 1 - (m+1)\frac{x}{(m+1)(m+x)}.$$

Sous cette forme on voit que ce n'est autre que l'inégalité (1) dans laquelle on a remplacé n par $m+1$ et α par le nombre $\frac{x}{(m+1)(m+x)}$ qui est manifestement plus petit que 1.

Si le nombre donné x est négatif, la fonction $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ est bornée supérieurement par le nombre 1 ;

or elle est croissante, elle a donc une limite quand m augmente infiniment.

Supposons x positif et posons

$$y = \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m, \quad z = \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m.$$

On a

$$y = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m}{z}.$$

On vient de démontrer que z a une limite; je dis que $\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m$ a pour limite 1. En effet, si dans l'inégalité (1) je remplace α par $\frac{x^2}{m^2}$ et n par m , j'obtiens

$$\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{m},$$

la double inégalité

$$1 > \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{m}$$

montre bien que $\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^m$ a pour limite 1 quand m augmente infiniment. La fonction y a par conséquent une limite qui est égale à $\frac{1}{\lim z}$.

La proposition est donc démontrée, et la démonstration a mis en évidence la propriété suivante : Si l'on désigne par $l(x)$ la limite de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$, on a

$$l(x) \cdot l(-x) = 1.$$

On déduit de là que la fonction $\left(1 + \frac{x}{m-x}\right)^m$ est décroissante et a pour limite $l(x)$. Cela résulte de la relation évidente

$$\left(1 + \frac{x}{m-x}\right)^m = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m}.$$

(50)

Quel que soit le nombre naturel m on pourra donc écrire

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m < l(x) < \left(1 + \frac{x}{m+1-x}\right)^{m+1}.$$

En particulier, si $x = 1$,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Cette double inégalité peut être utilisée pour le calcul approché du nombre e .